2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело – система материальных точек, расстояния между которыми в процессе движения остаются неизменными.

Три точки тела, не лежащие на одной прямой, называются *формальной моделью* твердого тела.

Различают пять видов движения твердого тела:

1) поступательное;
2) вращательное вокруг неподвижной оси;
3) плоское (плоскопараллельное);
4) сферическое (вращательное вокруг неподвижной точки);
5) общий случай движения.

Поступательным движением называют такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению (рис. 2.1).

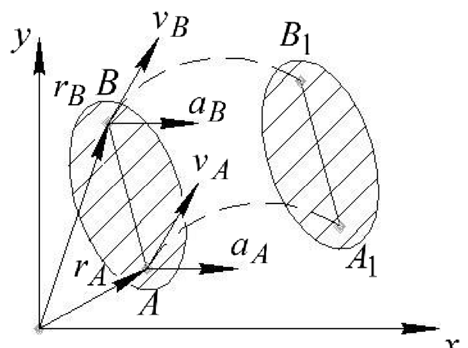


Рис. 2.1

Теорема. *Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют равные по величине и направлению скорости и ускорения:*

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,\ \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Поскольку все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями и ускорениями, изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения любой его точки (т. е. к задачам кинематики точки).

Вращательным движением твердого тела называют такое движение, при котором в теле имеются как минимум две неподвижные точки.

Проходящая через эти точки прямая называется осью вращения (скорости всех точек, лежащих на этой прямой, равны нулю). Расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, поэтому очевидно, что при вращательном движении все точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

При вращении твердого тела угол его поворота φ меняется с течением времени, т. е. зависимость $\varphi = f(t)$ является уравнением вращательного движения твердого тела.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ – это векторная величина, характеризующая изменение угла поворота φ тела с течением времени. Численное значение угловой скорости определяется как первая производная от угла поворота тела по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

при этом:

– если $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, то угол поворота φ увеличивается, т. е. вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла поворота;

– если $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, то угол поворота φ уменьшается, т. е. вращение тела происходит в обратную сторону.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ – это векторная величина, характеризующая изменение угловой скорости тела с течением времени. Алгебраическое значение углового ускорения твердого тела определяется как первая производная от его угловой скорости или как вторая производная от его угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

при этом:

– если $\frac{d\omega}{dt} > 0$, то движение ускоренное и $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}$;

– если $\frac{d\omega}{dt} < 0$, то движение замедленное и $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}$.

Если угловая скорость во все время движения постоянна $\omega = \text{const}$, то вращение тела называется равномерным и $\varphi(t) = \varphi_0 \pm \omega t$.

Если угловое ускорение во все время движения постоянно $\varepsilon = \text{const}$, то вращение тела называется равнопеременным и закон такого движения описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 \pm \varepsilon t; \\ \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Тело вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

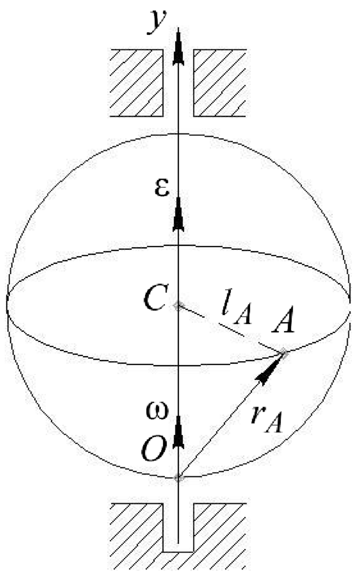


Рис. 2.2

Возьмем произвольную точку A (рис. 2.2), принадлежащую твердому телу и не лежащую на оси его вращения. Траекторией движения точки A при вращательном движении твердого тела будет окружность. Точка A смещена от оси вращения Oy на некоторое расстояние l_A. В системе координат $Oxyz$ положение точки A будет определятся радиусом-вектором $\vec{r}_A$, длина которого постоянна (из определения твердого тела).

Скорость точки A направлена по касательной к траектории ее движения и определяется как производная от радиуса-вектора $\vec{r}_A$ по времени:

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A.$$

Применив формулу Бура и учитывая определение твердого тела, получим *формулу Эйлера*:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A = \dot{r}_A \cdot \vec{e} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A \\ |\vec{r}_A| = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A,$$

где $\vec{e}$ – единичный базис неподвижной системы отсчета.

Производная радиуса-вектора постоянной длины, заданного во вращающейся системе отсчета, определяется по формуле Эйлера как векторное произведение угловой скорости вращения на сам вектор.

Иначе говоря, скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Тогда модуль скорости точки A:

$$\begin{cases} v_A = \omega r_A \sin [\vec{\omega}, \hat{\vec{r}}_A] \\ \sin [\vec{\omega}, \hat{\vec{r}}_A] = \dfrac{l_A}{r_A} \end{cases} \Rightarrow v_A = \omega l_A,$$

т. е. модуль скорости любой точки вращающегося твердого тела равен произведению угловой скорости его вращения на расстояние от этой точки до оси вращения.

Определим ускорение точки A как производную от ее скорости по времени:

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}_A\right]' = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v}_A = \vec{a}_{A\text{вр}} + \vec{a}_{A\text{ц}}.$$

$\vec{a}_{A\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A$ – вращательное ускорение точки A, характеризующее изменение по величине ее скорости с течением времени. При этом $\left|\vec{a}_{A\text{вр}}\right| = \varepsilon r_A \sin\left[\vec{\varepsilon} \,\hat{;}\, \vec{r}_A\right] = \varepsilon l_A$, т. е. модуль вращательного ускорения точки твердого тела равен произведению углового ускорения его вращения на расстояние от этой точки до оси вращения.

Кроме того, $\vec{a}_{A\text{вр}} \perp \vec{\varepsilon}, \vec{r}_A$, причем:

– если $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{A\text{вр}} \uparrow\uparrow \vec{v}_A$, и движение точки ускоренное (рис. 2.3);
– если $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{A\text{вр}} \uparrow\downarrow \vec{v}_A$, и движение точки замедленное.

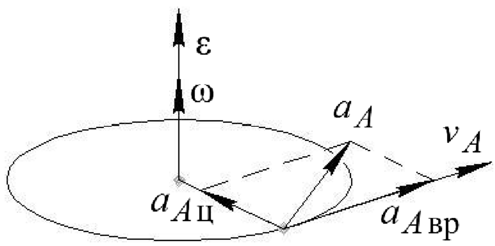


Рис. 2.3

$\vec{a}_{A\text{ц}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A$ – центростремительное ускорение точки A, характеризующее изменение по направлению ее скорости с течением времени. При этом $\left|\vec{a}_{A\text{ц}}\right| = \omega v_A \sin\left[\vec{\omega} \,\hat{}\, \vec{v}_A\right] = \omega v_A = \omega^2 l_A$, т. е. модуль центростремительного ускорения точки твердого тела равен произведению квадрата угловой скорости его вращения на расстояние от этой точки до оси вращения.

Кроме того, вектор $\vec{a}_{A\text{ц}} \perp \vec{a}_{A\text{вр}}$ и направлен к центру описываемой точкой окружности.

Тогда модуль ускорения точки A будет равен:

$$\left|\vec{a}_A\right| = \sqrt{\left(\vec{a}_{A\text{вр}}\right)^2 + \left(a_{A\text{ц}}\right)^2} = l_A\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Плоским или плоскопараллельным движением твердого тела называют такое движение, при котором все точки тела движутся во взаимно параллельных плоскостях, параллельных в свою очередь некоторой неподвижной плоскости.

Движение каждой точки плоской фигуры, образованной сечением тела неподвижной плоскостью, определяет движение всех точек твердого тела, т. е.

изучение плоского движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры.

Из геометрии известно, что положение плоской фигуры в ее плоскости однозначно определяется положением двух ее точек или положением отрезка.

Теорема. *Плоское движение твердого тела может быть представлено как совокупность поступательного движения вместе с некоторой точкой, принятой за полюс, и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс.*

За полюс принято брать точку, кинематические характеристики которой известны или легко находимы в условиях данной задачи.

Если принять некоторую точку A за полюс, тогда уравнения плоского движения принимают вид:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ \varphi = f_3(t). \end{cases}$$

где φ – угол поворота тела (плоской фигуры) вокруг оси, проходящей через полюс A.

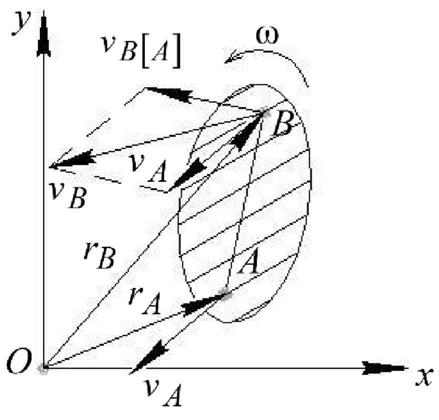


Рис. 2.4

Теорема. *Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки при ее вращательном движении относительно полюса.*

Рассмотрим движение плоской фигуры, заданной отрезком AB (рис. 2.4), и вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Приняв точку A за полюс с известной скоростью $\vec{v}_A$, определим скорость $\vec{v}_B$ точки B.

Из $\Delta OAB \Rightarrow \vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$, тогда:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{v}_A + \vec{v}_{B[A]},$$

где $\vec{v}_{B[A]} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$ – вращательная скорость точки B относительно полюса.

Теорема. *Проекции скоростей точек плоской фигуры на линию, их соединяющую, равны между собой:*

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta .$$

Знаю величину и направление скорости одной точки плоской фигуры, можно определить величину скорости любой другой ее точки (рис. 2.5), при условии, что известно направление ее вектора.

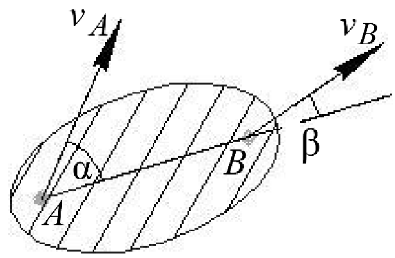


Рис. 2.5

$$v_B = v_A \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

При плоском движении твердого тела в каждый момент времени существует точка, неизменно с ним связанная (но не обязательно ему принадлежащая), скорость которой в этот момент времени равна нулю. Такая точка называется *мгновенным центром скоростей P*.

Мгновенный центр скоростей находится на перпендикуляре к направлению скорости $\vec{v}_O$ полюса O плоской фигуры, вращающейся с угловой скоростью ω, на расстоянии от этого полюса:

$$OP = \frac{v_O}{\omega}.$$

Определим скорости точек A, B и C плоской фигуры (рис. 2.6), приняв мгновенный центр скоростей P за полюс.

По теореме о скоростях точек плоской фигуры для точек A, B и C получим:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{A[P]} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{B[P]} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{v}_{C[P]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = v_{A[P]} = \omega \cdot AP, \vec{v}_A \perp \overrightarrow{AP}; \\ v_B = v_{B[P]} = \omega \cdot BP, \vec{v}_B \perp \overrightarrow{BP}; \\ v_C = v_{C[P]} = \omega \cdot CP, \vec{v}_C \perp \overrightarrow{CP}, \end{cases}$$

т. е. скорость любой точки плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, равный произведению угловой скорости вращения фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направление, перпендикулярное этому отрезку в сторону вращения плоской фигуры.

Таким образом, модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей.

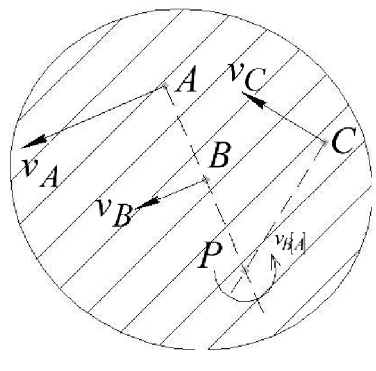


Рис. 2.6

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}, \frac{v_A}{v_C} = \frac{AP}{CP}, \frac{v_B}{v_C} = \frac{BP}{CP}.$$

Теорема. *Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки при ее вращении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.*

Рассмотрим движение плоской фигуры, заданной отрезком *AB* (рис. 2.7), и вращающейся ускоренно с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$. Приняв точку *A* за полюс с известным ускорением $\vec{a}_A$, определим ускорение $\vec{a}_B$ точки *B*:

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + \left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right]' = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \left(\overrightarrow{AB}\right)' = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{B[A]}.$$

$\vec{a}_{B[A]\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB}$ – вращательное ускорение точки *B* относительно полюса *A*. При этом $\vec{a}_{B[A]\text{вр}} \perp \vec{\varepsilon}, \overrightarrow{AB}$, причем:

– если $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{B[A]\text{вр}} \uparrow\uparrow \vec{v}_{B[A]}$, и движение точки ускоренное (см. рис. 2.7);

– если $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{B[A]\text{вр}} \uparrow\downarrow \vec{v}_{B[A]}$, и движение точки замедленное.

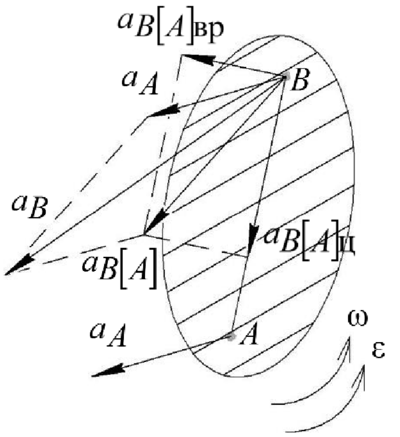


Рис. 2.7

$\vec{a}_{B[A]\text{ц}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{B[A]}$ – центростремительное ускорение точки *B* относительно полюса *A*. При этом вектор $\vec{a}_{B[A]\text{ц}} \perp \vec{a}_{B[A]\text{вр}}$ и направлен к полюсу *A*.

Таким образом, ускорение $\vec{a}_{B[A]}$ точки *B* относительно полюса *A:*

$$\vec{a}_{B[A]} = \vec{a}_{B[A]\text{вр}} + \vec{a}_{B[A]\text{ц}},$$

а общее ускорение точки *B* плоской фигуры:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B[A]}.$$

Сферическим движением твердого тела называют такое движение, при котором в теле существует одна неподвижная точка, а все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой.

Общий случай движения твердого тела – это такой вид движения, при котором тело в пространстве движется произвольным образом (движение свободного тела).

Задача 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

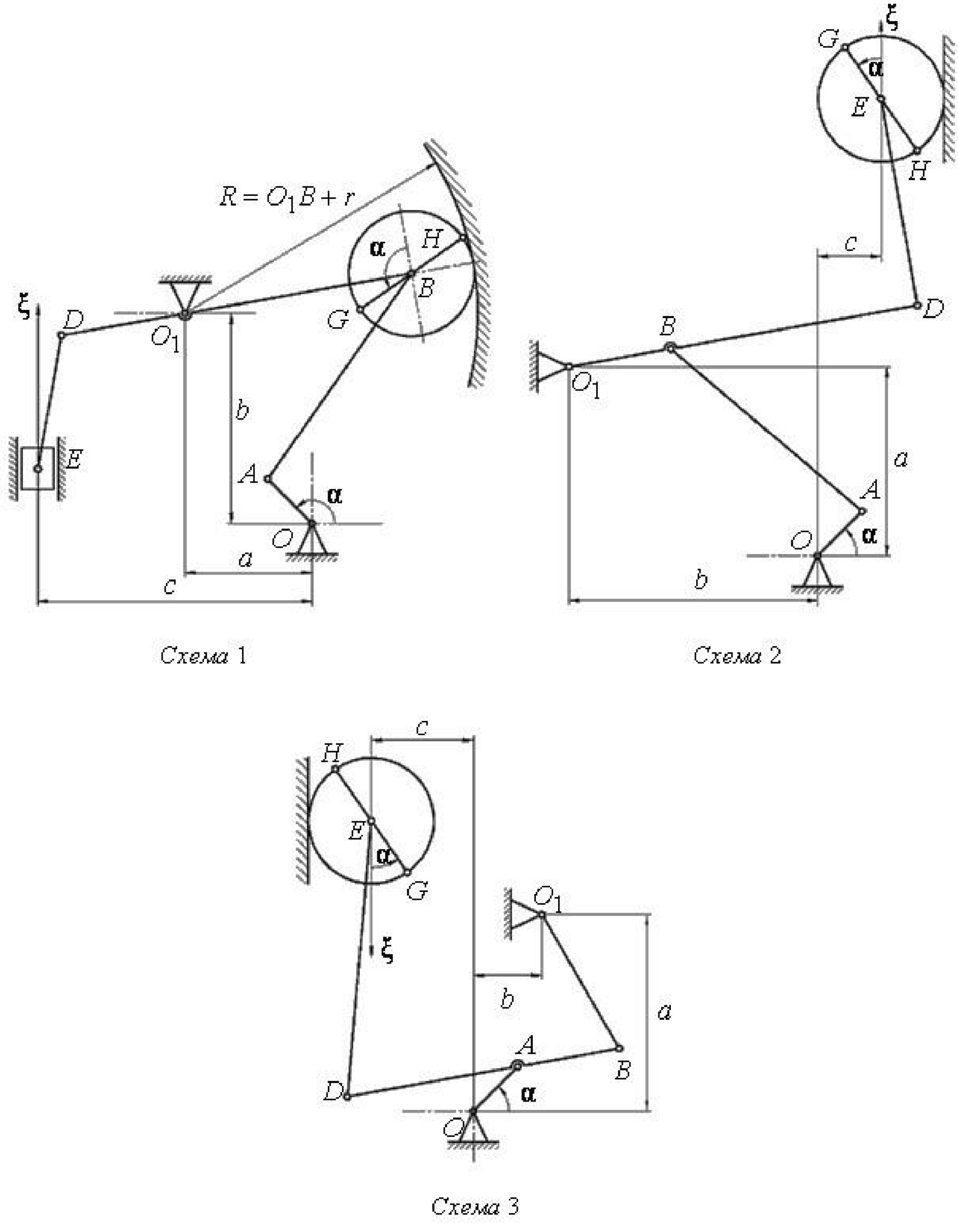
2.1. Условие задачи

В шарнирном четырехзвенном плоском механизме $OABO_1DE$ (рис. 2.8) ведущее звено OA равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O. Звено O_1B имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1. Точка E движется прямолинейно по вертикали вдоль оси ξ. Каток радиуса r движется без скольжения по неподвижной поверхности.

Номер схемы механизма, размеры звеньев, угловая скорость ведущего звена ω_{OA} и его положение для каждого из вариантов приведены в табл. 2.1. Для выданного варианта задания необходимо в указанном положении механизма найти линейные скорости точек A, B, D, E и диаметрально противоположных точек G, H обода катка, линейное ускорение точки B, а также угловые скорости всех звеньев и угловые ускорения звеньев AB и O_1B.

2.2. Порядок решения задачи

1. Определить линейную скорость точки A.
2. Определить направление векторов линейных скоростей точек B, D, E.
3. Найти мгновенные центры скоростей P_{AB}, P_{DE}, P_{GH} звеньев AB, DE и GH. После чего, оценив их приблизительное местоположение относительно механизма, выбрать масштаб длин таким образом, чтобы все мгновенные центры скоростей располагались в пределах чертежа.
4. Начертить в выбранном масштабе схему механизма, указав на ней мгновенные центры скоростей P_{AB}, P_{DE} и P_{GH}.
5. Определить и показать на схеме векторы линейных скоростей всех указанных ранее точек. Масштаб линейных скоростей может отличаться от масштаба длин.
6. Применив способ мгновенного центра скоростей, определить и показать на схеме векторы угловых скоростей всех звеньев механизма.



R = O1B + r
ξ
D
O1
α
H
B
G
b
E
A
O
a
c
Схема 1
G
ξ
α
E
H
c
D
B
O1
a
A
O
b
Схема 2
c
H
E
α
G
O1
ξ
b
a
A
B
D
O
Схема 3

Рис. 2.8

Таблица 2.1

Номер		Размер, м								α, …°	ω_{OA}, c^{-1}	r, м
варианта	схемы	OA	AB	O_1B	BD	DE	a	b	c			
1	1	3,0	10,0	14,0	18,5	18,5	8,5	18,5	13,5	180	50	3,0
2	2	4,0	17,5	8,0	4,0	18,0	20,5	5,0	5,0	255	30	6,0
3	3	4,0	7,5	9,0	10,0	14,0	11,0	4,5	7,0	60	40	4,0
4	1	5,5	13,0	11,5	18,0	13,5	14,0	11,5	9,5	75	20	4,5
5	2	4,5	18,0	8,0	5,5	17,0	13,0	5,0	6,5	150	50	6,0
6	3	3,5	5,5	9,0	8,0	20,5	15,5	3,5	7,0	120	30	3,5
7	1	5,0	15,0	15,5	22,5	11,0	8,5	12,5	9,0	120	10	4,5
8	2	3,0	15,0	10,0	8,0	13,5	19,5	5,0	5,5	210	20	4,0
9	3	3,5	3,5	13,5	8,0	11,0	8,0	2,5	6,0	240	10	5,5
10	1	5,0	19,5	9,5	16,0	10,5	8,0	12,5	12,0	0	20	3,5
11	2	5,0	18,5	9,5	5,0	17,5	18,5	5,5	7,0	120	30	4,5
12	3	5,0	6,0	14,5	12,5	12,5	13,0	2,5	5,5	240	50	3,5
13	1	4,5	12,0	15,5	24,0	12,0	15,0	16,5	21,0	210	50	5,5
14	2	5,5	15,5	8,5	5,0	19,5	14,0	4,0	5,0	300	50	6,0
15	3	5,0	7,5	16,5	12,0	16,0	11,5	2,5	5,0	330	50	6,0
16	1	6,0	19,5	8,0	12,0	10,0	14,5	18,0	17,5	90	10	5,0
17	2	5,5	17,0	9,0	7,0	18,5	16,5	6,0	4,5	210	50	5,0
18	3	5,0	7,5	17,5	10,0	10,0	11,5	5,0	5,5	135	50	4,0
19	1	3,0	13,5	13,0	20,0	8,5	6,5	17,5	12,0	195	30	4,0
20	2	4,5	14,0	10,0	6,0	19,0	15,5	5,0	5,5	195	50	3,5
21	3	3,0	7,0	14,5	9,5	17,5	15,5	2,0	6,5	75	20	4,5
22	1	4,0	12,5	8,5	25,0	17,5	9,5	12,5	17,0	240	40	4,0
23	2	6,0	20,0	9,5	5,0	20,0	16,0	6,0	4,5	150	30	3,0
24	3	5,0	7,5	9,5	13,5	18,5	13,0	2,0	5,0	75	50	5,0
25	1	5,5	19,0	10,0	16,5	10,0	14,0	19,5	14,0	150	50	6,0
26	2	3,5	19,5	8,0	4,0	22,5	16,5	5,0	7,0	120	30	5,5
27	3	5,0	6,0	15,5	13,0	10,5	13,0	2,5	6,5	225	30	3,5
28	1	4,5	7,5	14,5	18,0	18,5	9,5	15,5	12,5	180	40	3,0
29	2	6,0	14,5	9,5	7,0	12,0	18,5	5,5	6,0	195	40	3,5
30	3	4,5	4,0	11,5	14,5	16,5	16,0	5,0	6,5	105	50	5,0

7. Проверить корректность определения линейной скорости $\vec{v}_B$ точки B, применяя графические способы полюса и проекций.
8. Определить линейное ускорение точки A и, используя способ полюса, найти линейное ускорение точки B.
9. Показать на схеме в выбранном масштабе линейное ускорение $\vec{a}_A$ и линейное ускорение $\vec{a}_B$ с его составляющими. Указать масштаб ускорений.
10. Определить и показать на схеме векторы угловых ускорений $\vec{\varepsilon}_{O_1B}$ и $\vec{\varepsilon}_{AB}$ звеньев O_1B и AB.
11. Проверить корректность определения линейного ускорения $\vec{a}_B$ построением многоугольника ускорений.

2.3. Пример решения задачи

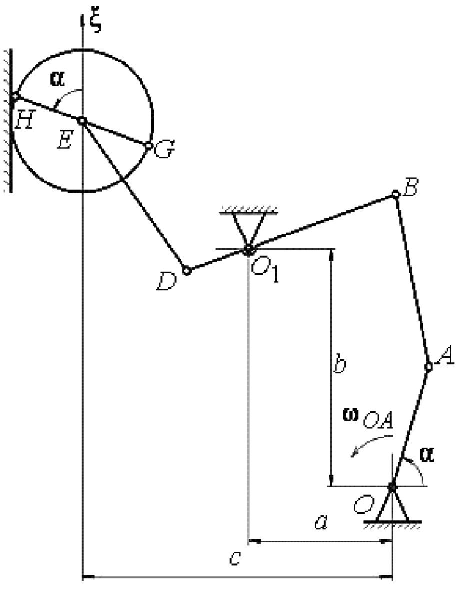


Рис. 2.9

Условие задачи. В шарнирном плоском механизме $OABO_1DE$ (рис. 2.9) ведущее звено OA вращается с постоянной скоростью ω_{OA} вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O. Звено O_1B имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1. Точка E движется прямолинейно по вертикали вдоль оси ξ. Каток радиуса r движется без скольжения по неподвижной поверхности.

Данные для решения задачи приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер		Размер, м								α, …°	ω_{OA}, c^{-1}	r, м
варианта	схемы	OA	AB	O_1B	BD	DE	a	b	c			
31	4	5,3	7,4	6,6	9,4	7,8	6,1	10,0	13,0	75	15	3,0

Решение.

1. Определим линейную скорость точки A:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{OA} \times \overrightarrow{OA}. \tag{2.1}$$

Из (2.1) и того, что $\vec{\omega}_A \perp \overrightarrow{OA}$, следует:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA \sin 90^\circ = 15 \cdot 5{,}3 \cdot 1 = 79{,}5 \text{ м/с}.$$

Поскольку звено OA вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O, вектор линейной скорости точки A будет направлен в сторону вращения перпендикулярно звену OA (рис. 2.10).

2. Определим направления векторов линейных скоростей точек B, D, E.

Звено BD имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1, следовательно, для векторов линейных скоростей точек B и D выполняется условие $\vec{v}_B, \vec{v}_D \perp \overrightarrow{BD}, \vec{v}_B \uparrow\downarrow \vec{v}_D$.

Звено DE совершает плоское движение, при этом точка E движется прямолинейно по вертикали вниз.

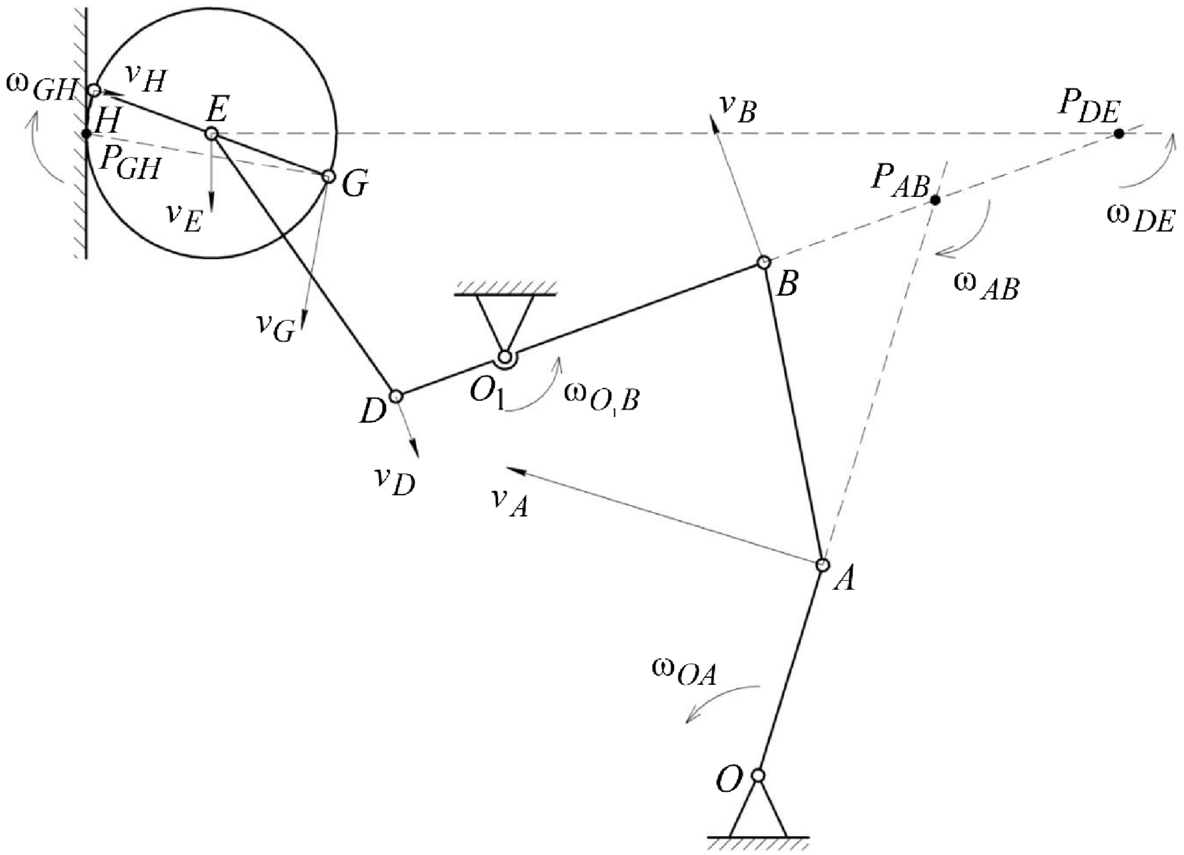


Рис. 2.10

3. Определим положения мгновенных центров скоростей P_{AB}, P_{DE}, P_{GH}.

Для звена AB, совершающего плоское движение, известен вектор $\vec{v}_A$ линейной скорости точки A и линия вектора линейной скорости точки B. Положение мгновенного центра скоростей P_{AB} звена AB определяется точкой пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к направлениям линейных скоростей этих точек (см. рис. 2.10).

Для звена DE, совершающего плоское движение, известны линии векторов линейных скоростей точек D и E. Положение мгновенного центра скоростей P_{DE} звена DE определяется точкой пересечения перпендикуляров, проведенных из точек D и E к направлениям линейных скоростей этих точек (см. рис. 2.10).

Звено GH принадлежит катку, вместе с которым совершает плоское движение. При этом мгновенный центр скоростей P_{GH} звена GH будет находиться в точке соприкосновения катка с поверхностью, по которой он движется (см. рис. 2.10). Определив положение мгновенного центра скоростей P_{GH}, покажем линии векторов линейных скоростей точек G и H перпендикулярно к соответствующим мгновенным радиусам-векторам $P_{GH}G$ и $P_{GH}H$ в сторону движения катка (см. рис. 2.10).

4. Определим векторы линейных скоростей всех указанных ранее точек.

Звено AB вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P_{AB} с угловой скоростью $\vec{\omega}_{AB}$.

Тогда, используя формулу Эйлера, получим

$$\begin{cases} v_A = \omega_{AB} \cdot P_{AB}A; \\ v_B = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $P_{AB}A$ и $P_{AB}B$ – мгновенные радиусы-векторы точек A и B.

В результате графических построений получим следующие значения мгновенных радиусов-векторов:

$$P_{AB}A = 9{,}16 \text{ м};$$
$$P_{AB}B = 4{,}37 \text{ м}.$$

Как видно из (2.2), линейные скорости точек A и B пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{P_{AB}A}{P_{AB}B}. \tag{2.3}$$

Таким образом, линейную скорость точки B определим как

$$v_B = v_A \frac{P_{AB}B}{P_{AB}A} = 79{,}5 \cdot \frac{4{,}37}{9{,}16} = 37{,}93 \text{ м/с}.$$

Звено BD имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1, следовательно, для линейных скоростей точек B и D получим:

$$\begin{cases} v_B = \omega_{O_1B} \cdot O_1B; \\ v_D = \omega_{O_1B} \cdot (BD - O_1B), \end{cases} \tag{2.4}$$

где ω_{O_1B} – угловая скорость звена BD.

Аналогично отношению (2.3) из выражения (2.4) получим:

$$\frac{v_B}{v_D} = \frac{O_1B}{BD - O_1B},$$

откуда, зная линейную скорость точки B, определим линейную скорость точки D:

$$v_D = v_B \frac{BD - O_1B}{O_1B} = 37{,}93 \cdot \frac{9{,}4 - 6{,}6}{6{,}6} = 16{,}09 \text{ м/с}.$$

Звено DE вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P_{DE} с угловой скоростью $\vec{\omega}_{DE}$.

Тогда, используя формулу Эйлера, получим:

$$\begin{cases} v_D = \omega_{DE} \cdot P_{DE}D; \\ v_E = \omega_{DE} \cdot P_{DE}E, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $P_{AB}D$ и $P_{AB}E$ – мгновенные радиусы-векторы точек D и E.

В результате графических построений получены следующие значения мгновенных радиусов-векторов:

$$P_{DE}D = 18{,}45 \text{ м};$$
$$P_{DE}E = 21{,}76 \text{ м}.$$

Аналогично отношению (2.3), из (2.5) получим:

$$\frac{v_D}{v_E} = \frac{P_{DE}D}{P_{DE}E},$$

откуда, зная линейную скорость точки D, определим линейную скорость точки E:

$$v_E = v_D \frac{P_{DE}E}{P_{DE}D} = 16{,}09 \cdot \frac{21{,}76}{18{,}45} = 18{,}98 \text{ м/с}.$$

Звено GH вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P_{GH} с угловой скоростью $\vec{\omega}_{GH}$.

Тогда, используя формулу Эйлера и учитывая, что точка E также принадлежит звену GH, получим:

$$\begin{cases} v_E = \omega_{GH} \cdot P_{GH}E; \\ v_G = \omega_{GH} \cdot P_{GH}G; \\ v_H = \omega_{GH} \cdot P_{GH}H, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $P_{GH}E = r$, $P_{GH}G$ и $P_{GH}H$ – мгновенные радиусы-векторы точек E, G и H.

В результате графических построений получены следующие значения мгновенных радиусов-векторов:

$$P_{GH}G = 5{,}91 \text{ м};$$

$$P_{GH}H = 1{,}05 \text{ м}.$$

Аналогично отношению (2.3), из выражения (2.6) получим:

$$\frac{v_E}{v_G} = \frac{r}{P_{GH}G};$$

$$\frac{v_E}{v_H} = \frac{r}{P_{GH}H},$$

откуда, зная линейную скорость точки E, определим линейные скорости точек G и H:

$$v_G = v_E \frac{P_{GH}G}{r} = 18{,}98 \cdot \frac{5{,}91}{3} = 37{,}39 \text{ м/с};$$

$$v_H = v_E \frac{P_{GH}H}{r} = 18{,}98 \cdot \frac{1{,}05}{3} = 6{,}64 \text{ м/с}.$$

Покажем на схеме все найденные ранее векторы линейных скоростей (см. рис. 2.10). Масштаб линейных скоростей может отличаться от масштаба длин.

5. Применив способ мгновенного центра скоростей, определим и условно покажем на схеме векторы угловых скоростей всех звеньев механизма.

Угловую скорость ω_{AB} звена AB определим по любой из формул (2.2):

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{v_B}{P_{AB}B} = \frac{79{,}5}{9{,}16} = \frac{37{,}93}{4{,}37} = 8{,}68 \text{ с}^{-1}.$$

Определим направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}_{AB}$ звена AB как направление кратчайшего поворота вектора линейной скорости какой-либо точки, принадлежащей соответствующему звену, к его мгновенному центру скоростей. На схеме (см. рис. 2.10) видно, что кратчайший поворот к мгновенному центру скоростей P_{AB} векторов линейных скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ осуществляется по ходу часовой стрелки. Следовательно, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{AB}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»).

Угловую скорость ω_{O_1B} звена BD определим по любой из формул выражения (2.4):

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{v_D}{BD - O_1B} = \frac{37{,}93}{6{,}6} = \frac{16{,}09}{9{,}4 - 6{,}6} = 5{,}75 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку звено BD вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O_1, то направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}_{O_1B}$ определим по правилу «правой руки». На схеме (см. рис. 2.10) видно, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{O_1B}$ направлен от плоскости рисунка («на нас»).

Угловую скорость ω_{DE} звена DE определим по любой из формул выражения (2.5):

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{P_{DE}D} = \frac{v_E}{P_{DE}E} = \frac{16{,}09}{18{,}45} = \frac{18{,}98}{21{,}76} = 0{,}87 \text{ с}^{-1}.$$

На схеме (см. рис. 2.10) видно, что кратчайший поворот к мгновенному центру скоростей P_{DE} векторов линейных скоростей $\vec{v}_D$ и $\vec{v}_E$ осуществляется против хода часовой стрелки. Следовательно, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{DE}$ направлен от плоскости рисунка («на нас»).

Угловую скорость ω_{GH} звена GH определим по любой из формул выражения (2.6):

$$\omega_{GH} = \frac{v_E}{r} = \frac{v_G}{P_{GH}G} = \frac{v_H}{P_{GH}H} = \frac{18{,}98}{3} = \frac{37{,}39}{5{,}91} = \frac{6{,}64}{1{,}05} = 6{,}33 \text{ с}^{-1}.$$

На схеме (см. рис. 2.10) видно, что кратчайший поворот к мгновенному центру скоростей P_{GH} векторов линейных скоростей $\vec{v}_E$, $\vec{v}_G$ и $\vec{v}_H$ осуществляется по ходу часовой стрелки. Следовательно, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{GH}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»).

Покажем на схеме все найденные ранее векторы угловых скоростей. На схеме направление вектора угловой скорости показывается дуговой стрелкой вокруг соответствующего мгновенного центра скоростей или оси вращения (см. рис. 2.10).

6. Проверим корректность определения линейной скорости $\vec{v}_B$ точки B, применив графические способы.

Определим линейную скорость точки B способом полюса.

Для определения линейной скорости точки B звена AB за полюс выбираем точку A, так как для нее известны величина и направление линейной скорости, найденные по (2.1). Тогда линейная скорость точки B определяется выражением

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B[A]}, \tag{2.7}$$

где $\vec{v}_{B[A]}$ – линейная скорость точки B при ее вращении относительно полюса A, следовательно, $\vec{v}_{B[A]} \perp \vec{\omega}_{AB}, \overrightarrow{AB}$.

В (2.7) известны величина и направление вектора $\vec{v}_A$; линия вектора $\vec{v}_B$; линия вектора $\vec{v}_{B[A]}$.

Построим треугольник векторов (2.7). Из произвольной точки O_2 (рис. 2.11, *а*) в выбранном масштабе построим вектор $\vec{v}_A$ и прямую, параллельную линии вектора $\vec{v}_B$. Чтобы определить вершину треугольника, из конца вектора $\vec{v}_A$ проведем прямую, параллельную линии вектора $\vec{v}_{B[A]}$. Точка пересечения этой линии с линией вектора $\vec{v}_B$ определит вершину треугольника и, следовательно, конец вектора $\vec{v}_B$.

Из полученных графических построений, пользуясь масштабом, найдем:

$$v_B = 38{,}67 \text{ м/с}.$$

Применив теорему о проекциях линейных скоростей, определим линейную скорость точки B, проецируя векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ на звено AB:

$$v_A \cdot \cos\gamma_1 = v_B \cdot \cos\gamma_2 .$$

Углы γ_1 и γ_2 определим из схемы механизма (см. рис. 2.11, *б*). Получим $\gamma_1 = 62^\circ$; $\gamma_2 = 9^\circ$. Тогда $v_B = v_A \cdot \dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2} = 79{,}5 \cdot \dfrac{0{,}4695}{0{,}9877} = 37{,}79$ м/с.

Сравнив полученные двумя графическими способами значения линейных скоростей $\vec{v}_B$, убеждаемся, что относительная погрешность не превышает допустимой – 5 % (способ полюса – 1,95 %, способ проекций – 0,37 %).

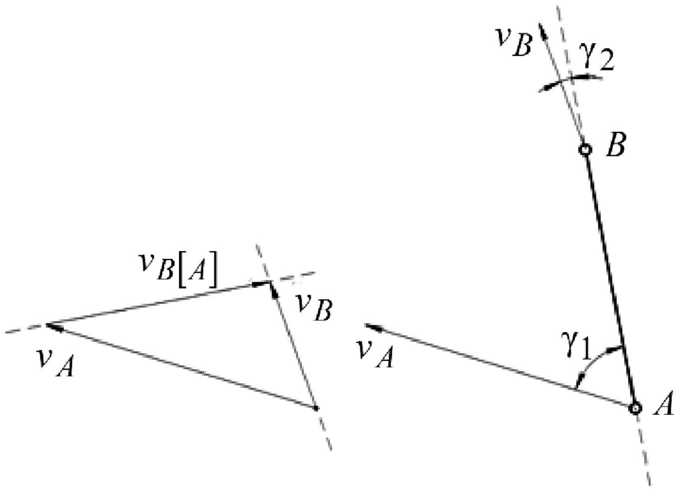


Рис. 2.11

Полученные результаты приведем в виде таблицы (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Способ определения	Линейная скорость, м/с						Угловая скорость, $с^{-1}$			
	v_A	v_B	v_D	v_E	v_G	v_H	ω_{AB}	ω_{O_1B}	ω_{DE}	ω_{GH}
Аналитический	79,5	37,93	16,09	18,98	37,39	6,64	8,68	5,75	0,87	6,33
Графический	—	38,67 37,79	—	—	—	—	—	—	—	—

7. Определим линейное ускорение точки B.

Линейное ускорение $\vec{a}_B$ точки B определяется выражением

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B[A]}, \tag{2.8}$$

где $\vec{a}_A = \vec{a}_{A\,\text{вр}} + \vec{a}_{A\,\text{ц}}$ – линейное ускорение точки A звена OA, которая принята за полюс; $\vec{a}_{B[A]}$ – линейное ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг оси, проходящей через полюс A. Вектор $\vec{a}_{B[A]}$ представим в виде

$$\vec{a}_{B[A]} = \vec{a}_{B[A]\,\text{вр}} + \vec{a}_{B[A]\,\text{ц}}, \tag{2.9}$$

где $\vec{a}_{B[A]\,\text{вр}}$ – вращательная составляющая линейного ускорения $\vec{a}_{B[A]}$; $\vec{a}_{B[A]\,\text{ц}}$ – центростремительная составляющая линейного ускорения $\vec{a}_{B[A]}$.

Получим:

$$a_{B[A]\,\text{вр}} = \varepsilon_{AB} \cdot AB; \tag{2.10}$$

$$a_{B[A]\,\text{ц}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB. \tag{2.11}$$

Однако, поскольку точка B принадлежит звену BD, вращающемуся вокруг оси, проходящей через точку O_1, то линейное ускорение точки B слагается из вращательного ускорения $\vec{a}_{B\,\text{вр}}$ и центростремительного ускорения $\vec{a}_{B\,\text{ц}}$, т. е.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B\,\text{вр}} + \vec{a}_{B\,\text{ц}}.$$

При этом

$$a_{B\,\text{вр}} = \varepsilon_{O_1B} \cdot O_1B; \tag{2.12}$$

$$a_{B\,\text{ц}} = \omega_{O_1B}^2 \cdot O_1B. \tag{2.13}$$

Уравнение (2.8) с учетом (2.9) – (2.13) представим в виде

$$\vec{a}_{B\,\text{вр}} + \vec{a}_{B\,\text{ц}} = \vec{a}_{A\,\text{вр}} + \vec{a}_{A\,\text{ц}} + \vec{a}_{B[A]\,\text{вр}} + \vec{a}_{B[A]\,\text{ц}}. \tag{2.14}$$

По полученным ранее кинематическим величинам определим модули линейных ускорений в выражении (2.14):

$$a_{A\,\text{ц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 15^2 \cdot 5{,}3 = 1192{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A\,\text{вр}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0,$$

так как $\omega_{OA} = \text{const}$ (движение звена OA равномерное);

$$a_{B\,\text{ц}} = \omega_{O_1B}^2 \cdot O_1B = 5{,}75^2 \cdot 6{,}6 = 218{,}21 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B[A]\,\text{ц}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 8{,}68^2 \cdot 7{,}4 = 557{,}53 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{A\,\text{ц}}$ направлен от точки A к точке O. Вектор $\vec{a}_{B\,\text{ц}}$ направлен от точки B к точке O_1. Вектор $\vec{a}_{B[A]\,\text{ц}}$ направлен от точки B к точке A.

Векторы $\vec{a}_{B\,\text{вр}}$ и $\vec{a}_{B[A]\,\text{вр}}$ известны только по линиям действия. Определим их величины аналитическим способом.

Проведем перпендикулярно к звену AB координатную ось Bx и перпендикулярно к неизвестному вектору $\vec{a}_{B[A]\,\text{вр}}$ координатную ось By (рис. 2.12). Неизвестные векторы $\vec{a}_{B\,\text{вр}}$ и $\vec{a}_{B[A]\,\text{вр}}$ направляем по линиям их действия условно. Спроецировав обе части уравнения (2.14) на оси Bx и By, получим

$$\begin{cases} Bx\!: -a_{B\,\text{вр}} \sin\varphi_1 - a_B^{\text{ц}} \cos\varphi_1 = -a_{A\,\text{ц}} \sin\varphi_3 - a_{B[A]\,\text{вр}}; \\ By\!: a_{B\,\text{вр}} \cos\varphi_1 - a_{B\,\text{ц}} \cos\varphi_2 = -a_{A\,\text{ц}} \cos\varphi_3 - a_{B[A]\,\text{ц}}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Необходимые для вычислений углы φ_1, φ_2 и φ_3 определяем по рис. 2.12: $\varphi_1 = 9^\circ$, $\varphi_2 = 81^\circ$ и $\varphi_3 = 28^\circ$.

Из второго уравнения системы (2.15) выразим $a_{B\,\text{вр}}$ и, подставив определенные ранее величины, получим его значение:

$$a_{B\,\text{вр}} = \frac{a_{B\,\text{ц}} \cos\varphi_2 - a_{A\,\text{ц}} \cos\varphi_3 - a_{B[A]\,\text{ц}}}{\cos\varphi_1} =$$

$$= \frac{218{,}21 \cdot 0{,}156 - 1192{,}5 \cdot 0{,}883 - 557{,}53}{0{,}988} = -1595{,}61 \text{ м/с}^2.$$

Полученный знак «–» указывает, что направление вектора $\vec{a}_{B\,\text{вр}}$ было выбрано неправильно, следовательно, при построении данного вектора необходимо изменить его первоначальное направление на противоположное.

Определим модуль линейного ускорения точки B:

$$a_B = \sqrt{\left(a_{B\,\text{вр}}\right)^2 + \left(a_{B\,\text{ц}}\right)^2} = \sqrt{(-1595{,}61)^2 + (218{,}21)^2} = 1610{,}46 \text{ м/с}^2.$$

8. Определим угловые ускорения звеньев AB и O_1B.

Из формулы (2.12) получим:

$$\varepsilon_{O_1B} = \frac{a_{B\,\text{вр}}}{O_1B} = \frac{1595{,}61}{6{,}6} = 241{,}76 \text{ с}^{-2}.$$

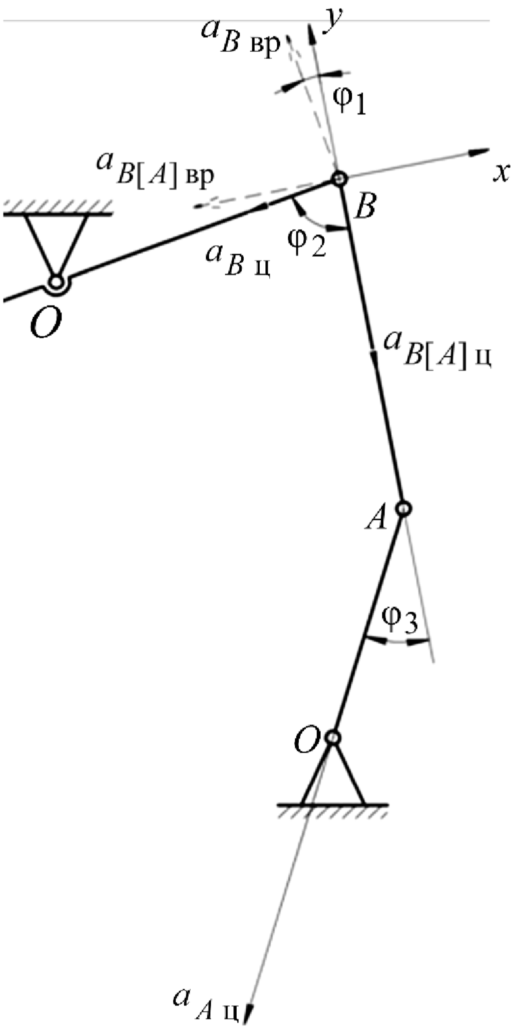


Рис. 2.12

Поскольку $\vec{v}_B \uparrow\downarrow \vec{a}_{B\,вр}$, вращение точки B замедленное, следовательно, $\vec{\omega}_{AB} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}_{AB}$. Ранее определено, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{O_1B}$ направлен от плоскости рисунка («на нас»), следовательно, вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}_{O_1B}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»).

Для определения углового ускорения $\vec{\varepsilon}_{AB}$ звена AB по (2.10) необходимо сначала найти линейное ускорение $a_{B[A]вр}$. Из первого уравнения системы (2.15) получим:

$$a_{B[A]\,вр} = a_{B\,вр} \sin\varphi_1 + a_{B\,ц} \cos\varphi_1 -$$

$$- a_{A\,ц} \sin\varphi_3 = (-1595{,}61) \cdot 0{,}156 +$$

$$+ 218{,}21 \cdot 0{,}988 - 1192{,}5 \cdot 0{,}469 =$$

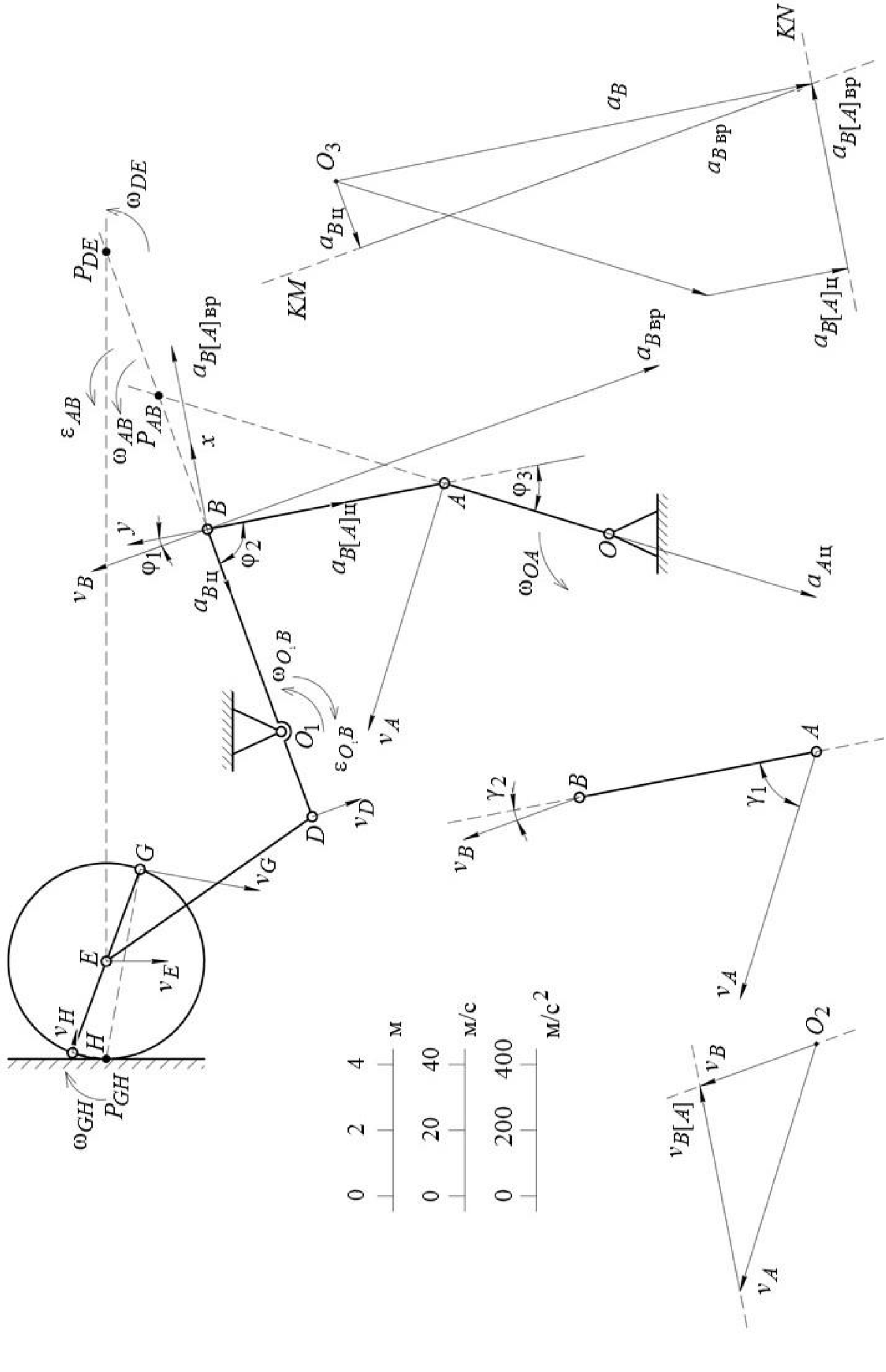
$$= -592{,}61 \text{ м/с}^2.$$

Полученный знак «–» указывает, что направление вектора $\vec{a}_{B[A]\,вр}$ было выбрано неправильно, следовательно, при построении данного вектора необходимо изменить его первоначальное направление на противоположное.

Из (2.10) получим:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{B[A]\,вр}}{AB} = \frac{592{,}61}{7{,}4} = 80{,}08 \text{ с}^{-2}.$$

Если $\vec{v}_{B[A]} \uparrow\uparrow \vec{a}_{B[A]\,вр}$, вращение точки B вокруг полюса A ускоренное, то $\vec{\omega}_{AB} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}_{AB}$. Ранее определено, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{AB}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»), следовательно, вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}_{AB}$ также направлен в плоскость рисунка («от нас»).



O
A
B
O_1
D
G
E
H
P_{GH}
P_{AB}
P_{DE}
O_2
O_3
KM
KN
v_A
v_B
v_D
v_E
v_G
v_H
$v_{B[A]}$
ω_{OA}
ω_{O_1B}
ε_{O_1B}
ω_{AB}
ε_{AB}
ω_{DE}
ω_{GH}
$a_{A\text{ц}}$
$a_{B\text{ц}}$
$a_{B\text{вр}}$
a_B
$a_{B[A]\text{ц}}$
$a_{B[A]\text{вр}}$
φ_1
φ_2
φ_3
γ_1
γ_2
x
y
0 2 4 м
0 20 40 м/с
0 200 400 м/с^2

Рис. 2.13

На схеме направление вектора углового ускорения показывается дуговой стрелкой вокруг соответствующего мгновенного центра скоростей или вокруг оси вращения (рис. 2.13).

9. Проверим корректность определения линейного ускорения $\vec{a}_B$ точки B, применив графический способ. Для этого представим векторное равенство (2.14) графически (см. рис. 2.13):

а) из произвольной точки O_3 отложим вектор линейного ускорения $\vec{a}_{A\,\text{ц}}$ полюса A;

б) из конца вектора $\vec{a}_{A\,\text{ц}}$ отложим вектор $\vec{a}_{B[A]\,\text{ц}}$;

в) из конца вектора $\vec{a}_{B[A]\,\text{ц}}$ проведем прямую KN, параллельную линии вектора $\vec{a}_{B[A]\,\text{вр}}$;

г) из точки O_3 отложим вектор $\vec{a}_{B\,\text{ц}}$;

д) из конца вектора $\vec{a}_{B\,\text{ц}}$ проведем прямую KM, параллельную линии вектора $\vec{a}_{B\,\text{вр}}$;

е) точка пересечения прямых KN и KM позволит определить величины и направления векторов $\vec{a}_{B\,\text{вр}}$, $\vec{a}_{B[A]\,\text{вр}}$ и $\vec{a}_B$. Измерив их на схеме (см. рис. 2.13), получим:

$$a_B = 1615{,}29 \text{ м/с}^2;\ a_{B\,\text{вр}} = 1605{,}18 \text{ м/с}^2;\ a_{B[A]\,\text{вр}} = 590{,}24 \text{ м/с}^2.$$

Сравнив полученные графическим способом значения линейных ускорений, убеждаемся, что относительная погрешность не превышает допустимой – 5 % (a_B – 0,3 %; $a_{B\,\text{вр}}$ – 0,6 % и $a_{B[A]\,\text{вр}}$ – 0,4 %).

Полученные результаты приведем в виде таблицы (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Способ определения	Линейное ускорение точек, м/с^2						Угловое ускорение звеньев, с$^{-2}$	
	a_A	$a_{B\,\text{ц}}$	$a_{B\,\text{вр}}$	a_B	$a_{B[A]\,\text{ц}}$	$a_{B[A]\,\text{вр}}$	ε_{O_1B}	ε_{AB}
Аналитический	1192,5	218,21	1595,61	1610,46	557,53	592,61	241,76	80,08
Графический	—	—	1605,18	1615,29	—	590,24		