

Провести полное исследование функции и построить ее график

$$y = \frac{x}{x^2 + 2}$$

Решение.

1. Область определения функции.

Так как функция дробно-рациональная, то в область ее определения входят те значения переменной, при которых знаменатель не обращается в нуль, то есть $x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -2$. Это выражение справедливо при любом x .

Таким образом, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Четность функции.

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x}{x^2 + 2} = -\frac{x}{x^2 + 2}; \quad y(-x) = -y(x) \Rightarrow \text{функция является нечетной, то есть ее}$$

график симметричен относительно начала координат.

3. Интервалы монотонности и экстремумы функции.

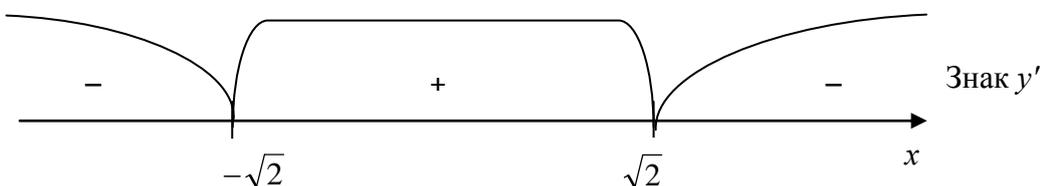
Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2 + 2} \right)' = \frac{x' \cdot (x^2 + 2) - (x^2 + 2)' \cdot x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 + 2) - (2x + 0) \cdot x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x^2 + 2 - 2x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2}$$

Найдем критические точки функции, то есть внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует:

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = 0, \\ (x^2 + 2)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2, \\ x^2 + 2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ x^2 \neq -2, \end{cases} \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ x - \text{любое}, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$$

y' не существует, если $(x^2 + 2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$. Но это уравнение не имеет решений. Таким образом, функция имеет две критические точки $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. Разобьем область определения функции критическими точками на промежутки и определим знак производной в каждом из них:



Так как на промежутках $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$ производная $y' < 0$, то функция убывает на каждом из этих промежутков.

Так как на промежутке $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ производная $y' > 0$, то функция возрастает на этом промежутке.

Так как при переходе через точку $x = -\sqrt{2}$ производная поменяла знак с «-» на «+», то эта точка является точкой минимума функции.

$$y(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{(-\sqrt{2})^2 + 2} = \frac{-\sqrt{2}}{2+2} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \text{функция имеет минимум в точке } A\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Так как при переходе через точку $x = \sqrt{2}$ производная поменяла знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума функции.

$$y(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \text{функция имеет максимум в точке } B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

4. Интервалы выпуклости графика функции и точки перегиба.

Найдем вторую производную данной функции:

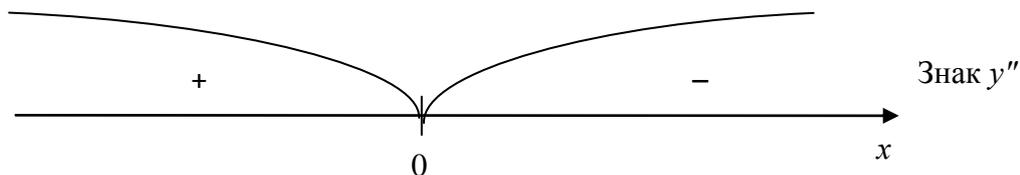
$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} \right)' = \frac{(2-x^2)' \cdot (x^2+2)^2 - ((x^2+2)^2)' \cdot (2-x^2)}{(x^2+2)^4} = \\ &= \frac{(0-2x) \cdot (x^2+2)^2 - 2(x^2+2)(2x+0) \cdot (2-x^2)}{(x^2+2)^4} = \frac{-2x(x^2+2)^2 - 4x(x^2+2)(2-x^2)}{(x^2+2)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2+2)((x^2+2)+(2-x^2))}{(x^2+2)^4} = \frac{-2x(x^2+2+2-x^2)}{(x^2+2)^3} = \frac{-8x}{(x^2+2)^3} \end{aligned}$$

Найдем критические точки второго порядка, то есть точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует:

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{-8x}{(x^2+2)^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = 0, \\ (x^2+2)^3 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 + 2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 \neq -2, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x - \text{любое}, \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

y'' не существует, если $(x^2+2)^3 = 0 \Rightarrow x^2+2=0$, но это уравнение не имеет корней.

Таким образом данная функция имеет одну критическую точку второго порядка $x=0$. Разобьем область определения функции критической точкой на промежутки и определим знак второй производной в каждом из них:



Так как на промежутке $(-\infty; 0)$ вторая производная $y'' > 0$, то на этом промежутке график функции вогнутый.

Так как на промежутке $(0; +\infty)$ вторая производная $y'' < 0$, то на этом промежутке график функции выпуклый.

При переходе через точку $x=0$ вторая производная поменяла знак, эта точка входит в область определения заданной функции. Поэтому график функции имеет точку перегиба $x=0$.

$$y(0) = \frac{0}{0^2 + 2} = 0 \Rightarrow \text{функция имеет перегиб в точке } O(0; 0).$$

5. Асимптоты графика функции.

Функция не имеет точек разрыва, а значит график функции не имеет вертикальных асимптот

Найдем уравнение наклонной асимптоты графика заданной функции в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(x^2 + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 2} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{по правилу} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Таким образом, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

6. График функции имеет вид:

