Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рис. 73—75, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Таблица 25

Номер варианта (рис. 73–75)	Размеры, см				ω_{OA},	ω_I,	ε_{OA},	v_A,	a_A,
	OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с^2	см/с	см/с^2
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	–	50	–	–	–	–	–	50	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	1	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	–	–	20	10	–	–	–	40	20
9	–	–	45	30	–	–	–	20	10
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	–	–	30	15	–	–	–	10	0
12	–	–	30	20	–	–	–	20	20
13	25	–	55	40	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–
15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	55	20	–	–	2	–	5	–	–
17	–	30	–	10	–	–	–	80	50
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	–	–	20	6	–	–	–	10	15
21	30	–	60	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	–	–	60	20	–	–	–	5	10
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	–	10	2	1,2	0	–	–
27	–	15	–	5	–	–	–	60	30
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	12	–	35	15	4	–	6	–	–
30	40	–	–	20	5	–	10	–	–

Примечание. ω_{OA} и ε_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_I — угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A — скорость и ускорение точки A. Качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 76); исходные данные (табл. 26).

Таблица 26

Размеры, см			ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение. 1. *Определение скоростей точек и угловой скорости звена* (рис. 77). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Рис. 76

Расстояния AP_{AB}, BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB}:

$$AP_{AB} = 52{,}0 \text{ см}; \qquad BP_{AB} = 30{,}0 \text{ см}; \qquad CP_{AB} = 36{,}1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15{,}0$ см/с; $\omega_{AB} = 0{,}29$ рад/с; $v_B = 8{,}7$ см/с; $v_C = 10{,}5$ см/с.

Вектор $\vec{v}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB.

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A.

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис. 77,

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

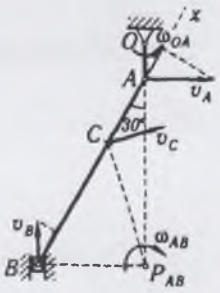

Рис. 77

Отсюда

$$v_B = 8{,}7 \text{ см}.$$

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. *Определение ускорений точек и углового ускорения звена* (рис. 78). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{в}} + \vec{a}_A^{\text{ц}}; \quad a_A^{\text{в}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^{\text{ц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\text{в}} + \vec{a}_{AB}^{\text{ц}},$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\text{в}} + \vec{a}_A^{\text{ц}} + \vec{a}_{AB}^{\text{в}} + \vec{a}_{AB}^{\text{ц}}. \qquad (1)$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a^{ц}_{AB} = \omega^2_{AB} \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a^{в}_{A}=20{,}0 \text{ см/с}^2;\ a^{ц}_{A}=22{,}5 \text{ см/с}^2;\ a^{ц}_{AB}=5{,}0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{ц}_{A}$ направлен от A к O. Вектор $\vec{a}^{в}_{A}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}^{ц}_{A}$ и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).

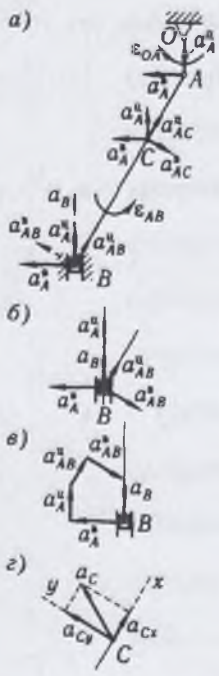

Рис. 78

Вектор $\vec{a}^{ц}_{AB}$ направлен от B к A. Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\vec{a}^{в}_{AB}$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ — по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}^{в}_{AB}$ — перпендикулярно AB.

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, *а*). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y, как показано на рис. 78, *г*, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a^{в}_{A} \cos 60^\circ + a^{ц}_{AB} \cos 30^\circ + a^{ц}_{AB}; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a^{в}_{A} \cos 30^\circ + a^{ц}_{A} \cos 60^\circ + a^{в}_{AB}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис. 78, *а*.

Из уравнения (3) получаем

$$a^{в}_{AB} = -20{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\vec{a}^{в}_{AB}$ противоположно показанному на рис. 78, *а*.

Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, *б*.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь $a^{в}_{AB}$ — алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = |a^{в}_{AB}|/AB.$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0{,}34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения $\vec{a}^{в}_{AB}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB}. Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить $\vec{a}_B$ и $\vec{a}^{в}_{AB}$ можно и графически — построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы $\vec{a}^{в}_A$, $\vec{a}^{ц}_A$ и $\vec{a}^{ц}_{AB}$ (рис. 78, *в*). Через конец вектора $\vec{a}^{ц}_{AB}$ проведем прямую, параллельную вращательному ускорению $\vec{a}^{в}_{AB}$, т. е. перпендикулярно $\vec{a}_B$, до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение $\vec{a}_B$.

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и $a^{в}_{AB}$ могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{в}_A + \vec{a}^{ц}_A + \vec{a}^{в}_{AC} + \vec{a}^{ц}_{AC}.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a^{в}_{AC} = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a^{ц}_{AC} = \omega^2_{AB} \cdot AC,$$

или

$$a^{в}_{AC} = 6{,}8 \text{ см/с}^2; \quad a^{ц}_{AC} = 1{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{в}_{AC}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}^{ц}_{AC}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 78, *а*):

$$a_{Cx} = a^{ц}_{AC} + a^{ц}_A \cos 30° - a^{в}_A \cos 60°,$$

$$a_{Cy} = a^{ц}_A \cos 60° + a^{в}_A \cos 30° - a^{в}_{AC},$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

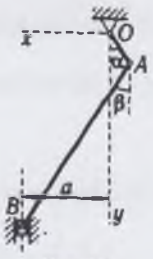

Рис. 79

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11{,}2$ см/с^2; $a_{Cy} = 21{,}8$ см/с^2; $a_C = 24{,}5$ см/с^2 (рис. 78, *г*).

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом.

На рис. 79 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \tag{4}$$

($\vec{r}_B$ — радиус-вектор точки B, проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const}. \tag{5}$$

Проецируя (4) на ось x, с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin\alpha + AB \cdot \sin\beta = a. \tag{6}$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos\alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos\beta \cdot \omega_{AB} = 0. \tag{7}$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos\alpha / (AB \cdot \cos\beta). \tag{8}$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin\alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos\alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin\beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos\beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \operatorname{tg}\beta + OA(\varepsilon_{OA} \cos\alpha - \omega_{OA}^2 \sin\alpha)/(AB \cdot \cos\beta). \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ε_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0°$, $\beta = 30°$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «−» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α. В данном случае $\omega_{OA} = 1{,}5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = -2{,}0$ рад/с^2. Смысл знаков ω_{AB} и ε_{AB} определяется направлением отсчета угла β.

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y, получаем

$$y_B = OA \cdot \cos\alpha + AB \cdot \cos\beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin\alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin\beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos\alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin\alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos\beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin\beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ на оси x и y.