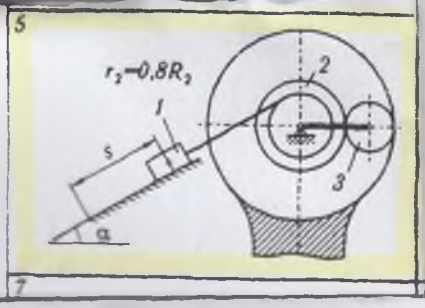
Задание Д.10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 152—154. Учитывая трение скольжения тела *1* (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивление качению тела *3*, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами



нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела *1* в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел *1*, *2*, *3*, *4*; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, $i_{3\xi}$ — радиусы инерции тел *2* и *3* относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; f — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 47. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 — масса груза *1*, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0{,}5m_1$, $m_5 = 20m_1$, $R_2 = R_3 = 12$ см, $r_2 = 0{,}5R_2$, $r_3 = 0{,}75R_3$, $R_5 = 20$ см, $AB = l = 4R_3$, $i_{2\xi} = 8$ см, $i_{3x} = 10$ см, $\alpha = 30°$, $f = 0{,}1$, $\delta = 0{,}2$ см, $s = 0{,}06\pi$ м. Сопротивление качению тела *2* не учитывать. Шатун *4* считать тонким однородным стержнем; каток *5* — однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5 и ползуна B пренебречь. На рис. 155, *а* показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 — скорость груза *1* в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \qquad (1)$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ — сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_i^J = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^E. \qquad (2)$$

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил надо изобразить систему в конечном положении (рис. 155, *б*, *в*).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т. е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза *1*.

Таблица 47

Номер варианта (рис. 152–154)	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3x}	α	β	f	δ, см	s, м	Примечание
	кг				см		см		град					
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	–	–	–	–	–	60	0,10	–	2	
2	m	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	20	30	45	0,22	0,20	2	
3	m	m	$1/10m$	m	–	–	–	–	45	–	0,10	–	2	
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	–	–	–	–	0,30	$0,1\pi$	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
5	m	$2m$	m	–	20	15	18	–	60	–	0,12	–	$0,28\pi$	Массой водила пренебречь
6	m	$3m$	m	–	–	28	–	–	30	45	0,10	0,28	1,5	
7	m	$2m$	$2m$	–	16	25	14	–	30	–	–	0,20	2	
8	m	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	–	30	45	0,15	0,20	1,75	
9	m	$2m$	$9m$	–	–	30	–	20	30	–	0,12	0,25	1,5	
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	–	–	–	–	60	–	0,10	–	3	
11	m	$1/2m$	$1/4m$	–	–	30	–	25	30	45	0,17	0,20	2,5	
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	–	20	–	30	–	0,20	–	2,5	
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	–	30	–	–	0,24	2	
14	m	$1/2m$	$5m$	$4m$	–	25	–	–	–	–	–	0,20	2	Массы каждого из четырех колес одинаковы
15	m	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	–	60	–	–	0,25	1,5	
16	m	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	–	–	–	–	–	–	$0,05\pi$	Массой водила пренебречь
17	m	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	–	15	–	60	–	0,10	–	$0,16\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень

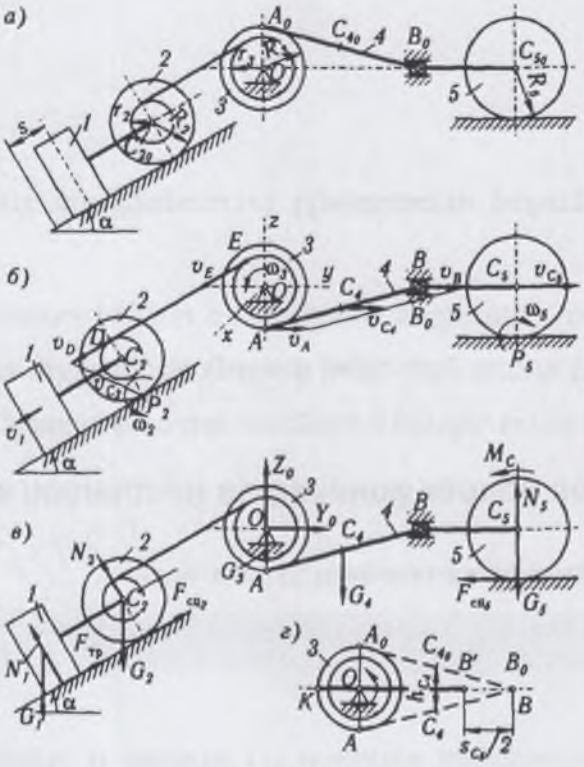


Рис. 155

Скорость центра масс C катка 2 равна скорости груза 1:

$$v_{C2} = v_1. \tag{3}$$

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке P_2,

$$\omega_2 = v_{C2}/(C_2P_2).$$

Учитывая (3), получим

$$\omega_2 = v_1/R_2. \tag{4}$$

Скорость точки D катка 2

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2,$$

т. е.

$$v_D = \frac{v_1}{R_2}(R_2 + r_2).$$

Скорость точки E блока 3 равна скорости точки D катка 2:

$$v_E = v_D. \tag{5}$$

по

$$v_E = \omega_3 r_3.$$

Следовательно,
по (5),

$$\omega_3 r_3 = \frac{v_1}{R_2}(R_2 + r_2).$$

Так как

$$R_2 = 2r_2,$$

то

$$\omega_3 r_3 = 3/2 v_1,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{3}{2}\frac{v_1}{r_3}. \qquad (6)$$

Заменяя в формуле (6)

$$\omega_3 = \frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t},\ v_1 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

получим

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2r_3}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

или

$$\mathrm{d}\varphi_3 = \frac{3}{2r_3}\mathrm{d}s.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2}\frac{s}{r_3}. \qquad (7)$$

Когда груз *1* пройдет путь $s = 0{,}06\pi$ м, блок *3* повернется на угол φ_3:

$$\varphi_3 = \frac{3}{2}\frac{s}{r_3} = \frac{3}{2}\frac{0{,}06\pi}{0{,}09} = \pi.$$

При этом повороте блока *3* на 180° его точка A_0 перейдет в конечное положение A и шатун *4* из начального положения A_0B_0 перейдет в конечное положение AB.

Каток *5* переместится влево при повороте блока *3* на угол $\pi/2$ и вправо при повороте блока еще на $\pi/2$; значит, конечное положение катка *5* совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рис. 155, *б*).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел *1, 2, 3, 4, 5*:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \qquad (8)$$

Кинетическая энергия груза *1*, движущегося поступательно,

$$T_1 = m_1 v_1^2/2. \qquad (9)$$

Кинетическая энергия катка *2*, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi}\omega_2^2}{2}, \tag{10}$$

где $J_{2\xi}$ — момент инерции катка *2* относительно его продольной центральной оси $C_{2\xi}$:

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2. \tag{11}$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) v_1^2. \tag{12}$$

Кинетическая энергия тела *3*, вращающегося вокруг оси Ox,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x}\omega_3^2, \tag{13}$$

где J_{3x} — момент инерции блока *3* относительно оси Ox:

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2. \tag{14}$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3}{2}\frac{v_1}{r_3}\right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2. \tag{15}$$

Кинетическая энергия шатуна *4*, совершающего плоское движение,

$$T_3 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi}\omega_4^2}{2},$$

где v_{C4} — скорость центра масс C_4 шатуна *4*; ω_4 — угловая скорость шатуна *4*; $J_{4\xi}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_{4\xi}$.

Для определения v_{C4} и ω_4 найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна *4*. Так как скорости точек A и B в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна *4* находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна *4*

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2/2, \tag{16}$$

где

$$v_{C4} = v_A. \tag{17}$$

Вращательная скорость точки A тела *3*

$$v_A = \omega_3 R_3, \tag{18}$$

или с учетом (14)

$$v_A = 3/2 R_3 v_1/r_3.$$

Поскольку $r_3 = 3/4R_3$, получим

$$v_A = 2v_1.$$

По (17)

$$v_{C4} = v_A, \qquad v_{C4} = 2v_1. \tag{19}$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид

$$T_4 = 1/2m_4(2v_1)^2 = 2m_4v_1^2. \tag{20}$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$T_5 = m_5v_{C5}^2/2 + J_{5\xi}\omega_5^2/2,$$

где v_{C5} — скорость центра масс C_5 катка 5; $J_{5\xi}$ — момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной продольной оси $C_{5\xi}$, $J_{5\xi} = m_5R_5^2/2$; ω_5 — угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5. Поэтому

$$\omega_5 = v_{C5}/R_5.$$

Следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5R_5^2v_{C5}^2}{2\cdot 2R_5^2} = \frac{3}{4}m_5v_{C5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $v_{C5} = v_B$, но $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Значит, $v_{C5} = 2v_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$T_5 = 3/4m_5(2v_1)^2 = 3m_5v_1^2. \tag{21}$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20), (21):

$$T = m_2v_1^2/2 + m_2(1 + i_{2\xi}^2/R_2^2)v_1^2/2 + 9/8m_3v_1^2i_{3x}^2/r_3^2 + 2m_4v_1^2 + 3m_5v_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1v_1^2[1 + 2(1 + i_{2\xi}^2/R_2^2) + 9/4i_{3x}^2/r_3^2 + 2 + 120]/2,$$

или

$$T = 129m_1v_1^2/2. \tag{22}$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 155, *в*).

Работа силы тяжести $\vec{G}_1$

$$A_{G_1} = G_1h_1 = m_1gs\sin\alpha. \tag{23}$$

Работа силы трения скольжения $\vec{F}_{тр}$

$$A_{F_{тр}} = -F_{тр}s.$$

Так как

$$F_{тр} = fN_1 = fG_1 \cos\alpha,$$

то

$$A_{F_{тр}} = -fm_1gs\cos\alpha. \qquad (24)$$

Работа силы тяжести $\vec{G}_2$

$$A_{G_2} = G_2h_{C2} = m_2gs\sin\alpha. \qquad (25)$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{сц2}$, $\vec{F}_{сц5}$ катков *2* и *5* равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести $\vec{G}_4$

$$A_{G_4} = G_4h_{C4},$$

где h_{C4} — вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна *4* из начального положения в его конечное положение (рис. 155, *г*):

$$h_{C4} = R_3,$$

$$A_{G_4} = m_4gR_3. \qquad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка *5*

$$A_{M_C} = -M_C\varphi_5, \qquad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ — момент пары сил сопротивления качению катка *5*; φ_5 — угол поворота катка *5*.

Так как каток *5* катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C5}/R_5, \qquad (28)$$

где s_{C5} — перемещение центра тяжести C_5 катка *5*.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка *5* влево при повороте тела *3* на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело *3* повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_5 катка *5* равно перемещению ползуна B влево и вправо:

$$s_{C5} = 2(B_0B'). \qquad (29)$$

Определим перемещение B_0B' при повороте тела *3* на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рис. 155, *г*). При этом повороте тела *3* шатун из положения A_0B_0 перейдет в положение KB'. Тогда

$$B_0B' = KB_0 - KB',$$

где

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$

$$KB' = l = 4R_3.$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0{,}88R_3. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1{,}76R_3/R_5. \quad (31)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27)

$$A_{M_C} = -\delta m_5 g \cdot 1{,}76R_3/R_5. \quad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23)—(26) и (32):

$$\sum A_i^E = m_1 gs \sin\alpha - f m_1 gs \cos\alpha + m_2 gs \sin\alpha + m_4 gR_3 - \delta m_5 g \cdot 1{,}76R_3/R_5.$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_i^E = m_1 gs \left(\sin\alpha - f\cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1{,}76R_3}{R_5 s}\right),$$

или

$$\sum A_i^E = 1{,}51 m_1 gs. \quad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения T и $\sum A_i^E$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2/2 = 1{,}51 m_1 gs,$$

откуда

$$v_1 = 0{,}21 \text{ м/с}.$$