

Расчет статически неопределимой балки на прочность и жесткость при плоском изгибе (1-3)

1. Формирование исходных данных: расчетной схемы, таблицы нагрузок.

Исходные данные для расчетной схемы:

$a=-1 \Rightarrow +q$ направлена вверх

$\beta=0 \Rightarrow$ распределенная сила=0

$\mu=1 \Rightarrow M=q l^2$

$\lambda=-1 \Rightarrow F=+q l$ направлена вверх

$l=2\text{ м}$

$[\sigma] = 160\text{ МПа}; E=200\text{ ГПа}$

Реакции в опорах $A \Rightarrow R_A, R_{Ax}, M_A, B \Rightarrow R_B$

2. Решение статически неопределимой балки:

Определяем степень статической неопределимости (СЧН):

$$\text{СЧН} = \text{ЧНР} - \text{ЧУР} = 4 - 3 = 1$$

ЧНР - число неизвестных реакций

ЧУР - число уравнений равновесия

СЧН=1, это означает, что система уравнений равновесия имеет бесконечное количество решений, но только одно будет удовлетворять условиям равенства нулю перемещений в опорах

2.1 Выбор системы координат xv , составление и интегрирование дифференциальных уравнений изогнутой оси

Начало координат для составления ДУ помещаем в заделке (.) А.

Добавляем уравновешенную распределенную силу на 2м участке
Тогда:

$$EI_z v'' = \sum M_{zi} = \left((R_A x + M_A + \frac{qx^2}{2})_{0 \leq x \leq l_1} + M(x - l_1)^0 + R_b(x - l_1) - \frac{q(x - l_1)^2}{2} \right)_{l_1 \leq x \leq l_1 + l_2}$$

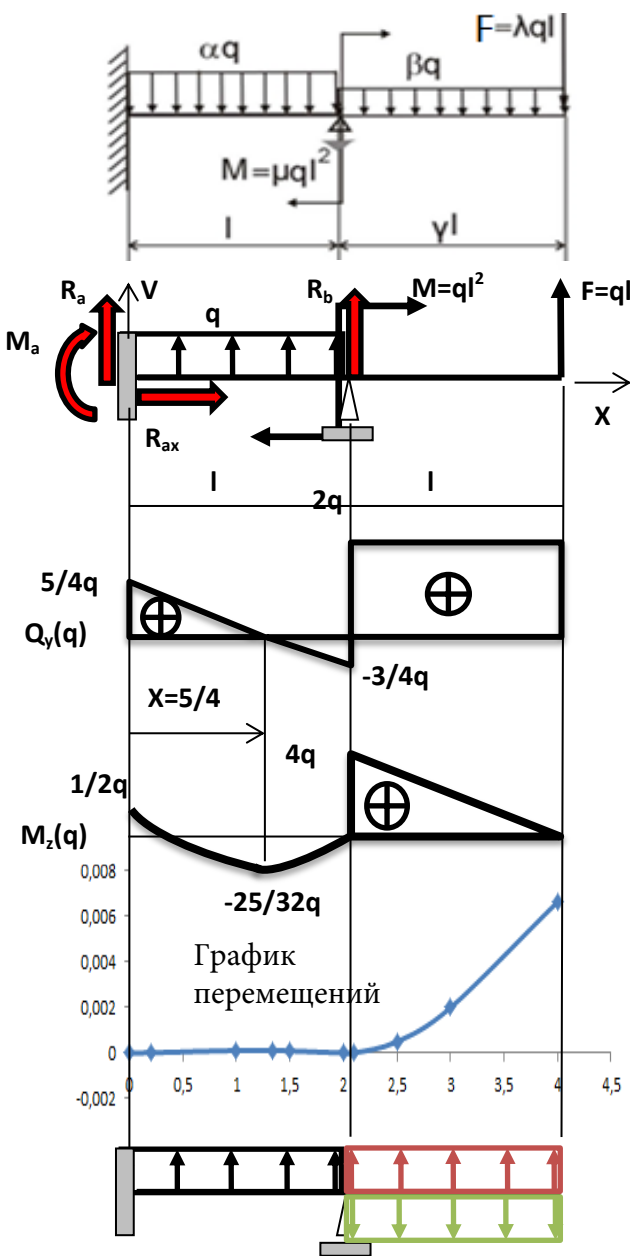


Рис. 1

Подставляем значения нагрузок и длин и интегрируем ДУ

$$EI_z v' = \int dx \sum M_{zi} = \left((C + R_A \frac{x^2}{2} + M_A x + \frac{qx^3}{6})_{0 \leq x \leq 2} + M(x - 2) + \frac{R_b(x - 2)^2}{2} - \frac{q(x - 2)^3}{6} \right)_{2 \leq x \leq 4}$$

$$EI_z v = \int dx \int dx \sum M_{zi} = \left((Cx + D + R_A \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + \frac{qx^4}{24})_{0 \leq x \leq 2} + M \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{R_b(x - 2)^3}{6} - \frac{q(x - 2)^4}{24} \right)_{2 \leq x \leq 4}$$

Условия в опорах (.) A $\rightarrow v_A|_{x=0} = 0 \Rightarrow D = 0, v'_A|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = 0$

(.) B $\rightarrow v_B|_{x=2} = 0 \Rightarrow 0 = (R_A \frac{2^3}{6} + M_A \frac{2^2}{2} + \frac{q2^4}{24})_{0 \leq x \leq 2}$

$$\frac{2}{3} R_A + M_A + \frac{q}{3} = 0 (*)$$

2.2 Составляем уравнение равновесия $\sum m_b = 0$

$$-2R_A - M_A - \frac{q2^2}{2} - M + 2F = 0, \text{ подставляем значения } M \text{ и } F$$

$2R_A + M_A + 2q = 0$, решаем совместно с (*) и получаем

$$R_A = -5/4q; M_A = q/2; R_B = -11/4q, R_{Ax} = 0$$

3. Определение внутренних усилий. Построение эпюр $Q_y(q)$ и $M_z(q)$

Рассматриваем два участка, определяем $Q_y(q)$ и $M_z(q)$ строим эпюры, определяем точку экстремума, определяем $M_{z\min} = -25/32q$

Проверяем эпюры, скачки=нагрузкам в этих точках, $Q>0 \Rightarrow M_z$ -возрастает, $Q<0 \Rightarrow M_z$ -убывает справа налево, выпуклость на эпюре M_z направлена навстречу распределенной силе.

Эпюра моментов на участке между заделкой и опорой должна проходить через 0, в противном случае не выполняется условие с разнонаправленной кривизной изогнутой оси балки на этом участке

4. Определение геометрических характеристики составного сечения:

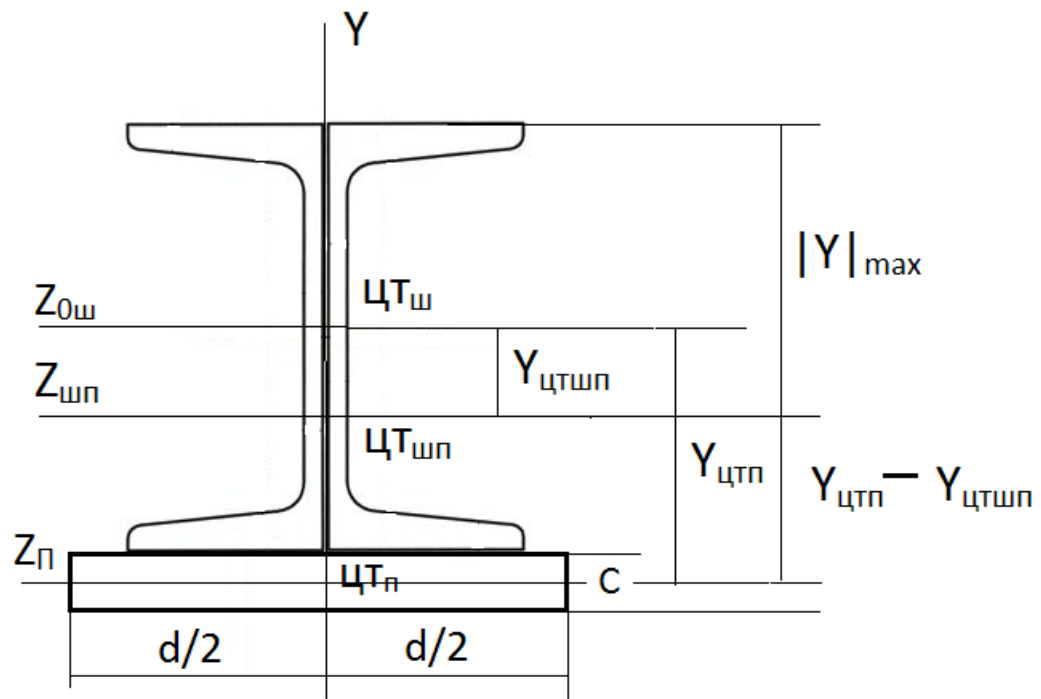


Рис.2

Исходные данные

номер швеллера: $N_{шв}=20$, $I_{z_0}^{ш} = I_x^{гост} = 1520 \text{ см}^4$, $A_{ш} = 23,4 \text{ см}^2$,

Размеры полосы высота полосы $c=2 \text{ см}$, ширина полосы $d=20 \text{ см}$

4.1 Определение положения центра тяжести и проходящей через него главной центральной оси инерции $Z_{шп}$

$$y_{цтшп} = \frac{S_{z_0}^{шп}}{A_{шп}},$$

Где

$y_{цтшп}$ - координата центра тяжести составной фигуры (два швеллера+полоса) относительно начальной оси Z_0 , *выбор* начальной оси Z_0 - прохождение ее через центр тяжести швеллера

$S_{z_0}^{шп} = S_{z_0}^{ш} + S_{z_0}^{п}$ - статический момент составной фигуры относительно начальной оси Z_0 ,

$S_{z_0}^{ш} = 0$ - статический момент швеллеров относительно оси Z_0 -т.к. Z_0 -ось симметрии для швеллеров

$S_{Z_0}^{\Pi} = y_{\text{цтп}} \cdot A_{\Pi} = -11 \cdot 2 \cdot 20 = -440 \text{ см}^3$ – статический момент полосы относительно оси Z_0 ,
 $Y_{\text{цтп}} = -\left(\frac{h_{\text{ш}}^{\text{ГОСТ}}}{2} + \frac{c}{2}\right) = -(10 + 1) = -11 \text{ см}$ – координата центра тяжести полосы относительно оси Z_0 , $A_{\Pi} = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см}^2$ – площадь полосы;

$A_{\text{шп}} = 2 \cdot A_{\text{ш}} + A_{\Pi} = 2 \cdot 23,4 + 40 = 86,8 \text{ см}^2$ – площадь составного сечения, $A_{\text{ш}}$ – площадь швеллера из таблицы ГОСТ, A_{Π} – площадь полосы.

$$y_{\text{цтшп}} = \frac{S_{Z_0}^{\text{шп}}}{A_{\text{шп}}} = \frac{-440}{86,8} = -5,07 \text{ см}$$

Откладываем координату $y_{\text{цтшп}}$ на рис. 2

4.2. Определение осевого момента инерции I_z и осевого момента сопротивления W_z

$$I_z^{\text{шп}} = I_z^{\text{ш}} + I_z^{\Pi}$$

Где $I_z^{\text{шп}}$ – момент инерции составной фигуры (два швеллера + полоса) относительно главной оси $Z_{\text{шп}}$;

$I_z^{\text{ш}} = 2 \cdot (I_{Z_0}^{\text{ш}} + A_{\text{ш}} \cdot y_{\text{цтшп}}^2) = 2(1520 + 23,4(-5,07)^2) = 4243 \text{ см}^4$ – момент инерции швеллеров относительно главной оси $Z_{\text{шп}}$, $I_{Z_0}^{\text{ш}} = I_x^{\text{ГОСТ}}$ – момент инерции швеллера из таблицы ГОСТ,

$A_{\text{ш}}$ – площадь швеллера из таблицы ГОСТ;

$Y_{\text{цтшп}}^2$ – квадрат расстояния между осями $Z_{\text{ош}}$ и $Z_{\text{шп}}$

$I_z^{\Pi} = I_{Z_{\Pi}}^{\Pi} + A_{\Pi} \cdot (y_{\text{цтп}} - y_{\text{цтшп}})^2 = 13,3 + 20 \cdot 2(-11 + 5,07)^2 = 1420 \text{ см}^4$ – момент инерции полосы относительно главной оси $Z_{\text{шп}}$;

$I_{Z_{\Pi}}^{\Pi} = \frac{dc^3}{12} = \frac{20 \cdot 8^3}{12} = 13,3 \text{ см}^4$ – момент инерции полосы относительно собственной главной оси Z_{Π} ;

$A_{\Pi} = dc$ – площадь полосы;

$(y_{\text{цтп}} - y_{\text{цтшп}})^2$ – квадрат расстояния между осями $Z_{\text{шп}}$ и Z_{Π}

$$I_z^{\text{шп}} = I_z^{\text{ш}} + I_z^{\Pi} = 4243 + 1420 = 5563 \text{ см}^4$$

$$W_z = \frac{I_z^{\text{шп}}}{|y|_{\text{max}}} = \frac{5563}{15,07} = 376 \text{ см}^3;$$

$|y|_{\text{max}} = |h_{\text{ш}} + |y_{\text{цтшп}}|| = |10 + 5,07| = 15,07$ – модуль координаты наиболее удаленной точки сечения

5. Определение допускаемой нагрузки q из условия прочности, определение максимального нормального напряжения. Определение коэффициента перегрузки по прочности.

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$\frac{4q}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$q_{\sigma} = \frac{[\sigma] * W_z}{4} = \frac{160 * 10^6 * 376 * 10^{-6}}{4} = 15030 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 15,03 \frac{\text{кН}}{\text{М}}$$

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{4 * 15030}{376 * 10^{-6}} = 159,9 * 10^6 \text{Па}$$

$$K_{\sigma} = \frac{159,9 - 160}{160} * 100 = -0,06\%$$

6. Определение вертикальных перемещений на конце консоли, и в точках 1/2 и 2/3 от заделки, построение графика перемещений в масштабе. Проверка на жесткость.

$$[\nu]_{np} = \frac{l}{750} l_{np}, \text{ где } l_{np} - \text{длина пролета.} \quad [\nu]_{\kappa} = \frac{l}{350} l_{\kappa}, \text{ где } l_{\kappa} - \text{длина консоли.}$$

Определение коэффициента перегрузки по жесткости.

6.1 определение перемещений в пролете

$$x = 0,5l = 1 \in [0; 2]; x = \frac{2}{3}l = 1,33 \in [0; 2] \rightarrow$$

$$v = ((+R_A \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + \frac{qx^4}{24})_{0 \leq x \leq 2}) / EI_z = ((-\frac{5q}{4} \frac{x^3}{6} + \frac{q}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{qx^4}{24})_{0 \leq x \leq 2}) / EI_z$$

$$v(1) = \frac{-\frac{5 * 15030 * 1^3}{4 * 6} + \frac{15030 * 1^2}{2 * 2} + \frac{15030 * 1^4}{24}}{2 * 10^{11} * 5563 * 10^{-8}} = 1,11 * 10^{-4} \text{м}$$

$$v(1,33) = \frac{-\frac{5 * 15030 * 1,33^3}{4 * 6} + \frac{15030 * 1,33^2}{2 * 2} + \frac{15030 * 1,33^4}{24}}{2 * 10^{11} * 5563 * 10^{-8}} = 1,09 * 10^{-4} \text{м}$$

6.2 определение перемещения на конце консоли

$$x = l_1 + l_{12} = 4 \in [2; 4] \rightarrow$$

$$v = (+R_A \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + M \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{R_b(x-2)^3}{6} - \frac{q(x-2)^4}{24})_{2 \leq x \leq 4} / EI_z$$

$$= (-\frac{5q}{4} \frac{x^3}{6} + \frac{q}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + 4q \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{11q(x-2)^3}{4 * 6} - \frac{q(x-2)^4}{24})_{2 \leq x \leq 4} / EI_z$$

$$v(4) = 6,64 * 10^{-3} \text{ м}$$

6.3 Проверка на жесткость

$$[v]_{\text{пролета}} = \frac{l_{\text{пролета}}}{750} = \frac{2}{750} = 2,67 * 10^{-3} \text{ м}$$

$$K_{\text{пипролета}} = \frac{|v|_{\text{мах}} - [v]_{\text{пролета}}}{[v]_{\text{пролета}}} = \frac{1,11 * 10^{-4} - 2,67 * 10^{-3}}{2,67 * 10^{-3}} * 100 = -96\%$$

$$[v]_{\text{консоли}} = \frac{l_{\text{консоли}}}{350} = \frac{2}{350} = 5,71 * 10^{-3}$$

$$K_{\text{пиконсоли}} = \frac{|v|_{\text{к}} - [v]_{\text{консоли}}}{[v]_{\text{консоли}}} = \frac{6,64 * 10^{-3} - 5,71 * 10^{-3}}{5,71 * 10^{-3}} * 100 = +16\%$$

Таким образом условие жесткости для консоли не выполняется и нагрузка д.б. уменьшена на 16%.

$$q_v = \frac{q_{\sigma}}{1,16} = 12960 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Построение графика перемещений:

График строим по таблице перемещений

X (м)	0	1	1,33	2	4
V (м)	0	$1,11 * 10^{-4}$	$1,09 * 10^{-4}$	0	$6,64 * 10^{-3}$

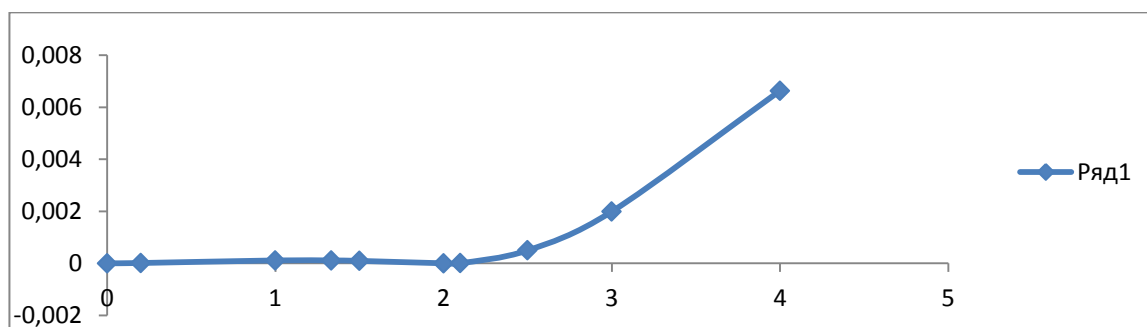


Рис. 3

Сравнивая с эпюрой M_z (рис.1) выделяем участки с выпуклостью направленной вниз ($M_z > 0$), выпуклостью направленной вверх ($M_z < 0$).