Указания для выполнения

Контрольной работы

«Кратные интегралы, ряды, дифференциальные уравнения, функции комплексной переменной»

по дисциплине **«Высшая математика-2»**,

Межрегиональный учебный центр переподготовки специалистов
Разработчик: доцент, к.т.н. Храмова Татьяна Викторовна

Перед решением контрольной работы следует полностью выписать её условие. Решения задач располагайте в порядке возрастания номеров, указанных в задании.

Решения следует излагать, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения. Необходимые рисунки следует помещать в тексте по ходу решения. Ответы в конце решения задачи следует выделять. При необходимости используйте конспект по высшей математике, прилагаемый к курсу.

Контрольную работу следует посылать отдельным файлом, помещая в начале титульный лист.

Оглавление

Задание 1. Кратные интегралы

Теоретический материал к разделу 6, п. 6.5. (см. Конспект лекций)

Однородная пластина имеет форму четырехугольника, указаны координаты вершин (Рисунок 1). С помощью двойного интеграла вычислить координаты центра масс пластины.

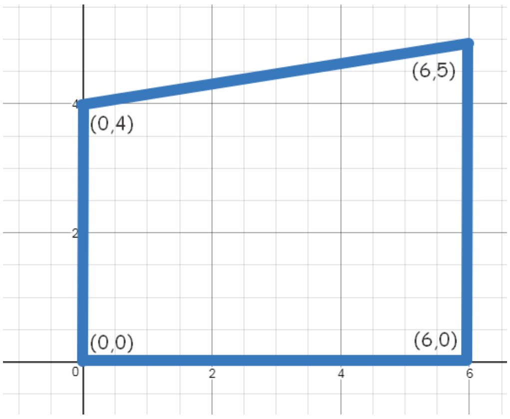

Рисунок 1 – Пластина

Решение. Координаты центра масс вычисляются по формуле

$$x_c = \frac{\iint_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint_D \mu(x,y)dxdy},\ \ y_c = \frac{\iint_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint_D \mu(x,y)dxdy}.$$

Так как пластина однородная, то плотность $\mu = const$, и

$$x_c = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}, y_c = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Составим уравнение прямой, ограничивающей область сверху. Для этого достаточно знать две точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ через которые она проходит:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

И, какая удача, мы их как раз отчётливо видим на рисунке 1, слева: (0,4) и (6,5). Следовательно, уравнение прямой:

$$\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 4}{5 - 4}, \qquad \frac{x}{6} = \frac{y - 4}{1}, \ \ y = \frac{x}{6} + 4.$$

Вычислим площадь пластины (это интеграл, который фигурирует в знаменателе):

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{x}{6}+4} dy = \int\limits_0^6 \left(y|_0^{\frac{x}{6}+4} \right) dx =$$

$$\int\limits_0^6 \left(\frac{x}{6} + 4\right) dx = \left(\frac{x^2}{12} + 4x\right)_0^6 = \frac{36}{12} + 24 = 27.$$

Вычислим интегралы, которые фигурируют в числителях:

$$1)\ \iint_D x\,dxdy = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{x}{6}+4} x\,dy = \int_0^6 \left(xy\Big|_0^{\frac{x}{6}+4} \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{x^2}{6} + 4x \right) dx = \left(\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{2} \right)_0^6 = 12 + 72 = 84.$$

Вычислим первую координату: $x_c = \frac{84}{27} = 3\frac{1}{9}$ (Рисунок 2, слева).

$$2)\ \iint_D y\,dxdy = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{x}{6}+4} y\,dy = \int_0^6 \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{x}{6}+4} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(\frac{x}{6}+4\right)^2 dx =$$

$$= \frac{6}{2}\int_0^6 \left(\frac{x}{6}+4\right)^2 d\left(\frac{x}{6}+4\right) = 3 \cdot \frac{\left(\frac{x}{6}+4\right)^3}{3}\Bigg|_0^6 = \left(\frac{6}{6}+4\right)^3 - \left(\frac{0}{6}+4\right)^3 = 125 - 64 = 61.$$

Вычислим вторую координату: $y_c = \frac{61}{27} = 2\frac{7}{27}$ (Рисунок 2, справа).

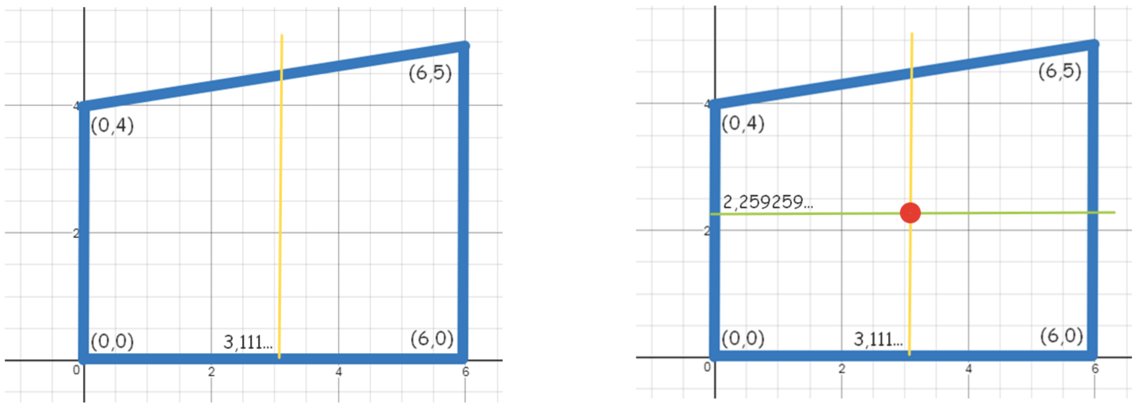

Рисунок 2 – Пластина с указанным центром масс

Ответ: $\left(3\frac{1}{9}, 2\frac{7}{27}\right)$.

Задание 2. Дифференциальные уравнения

Теоретический материал к разделу 7, п. 7.2 (см. Конспект лекций)

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' + 2xy - 4x = 0,$$

удовлетворяющего данному начальному условию $y(4) = 1$.

Решение. Определим тип уравнения. Данное уравнение является линейным $y' + p(x)y = q(x)$, следовательно, для его решения можно воспользоваться заменой $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ (метод Бернулли):

$$y' + 2xy = 4x,$$
$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot u \cdot v = 4x,$$
$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + 2x \cdot v\right) = 4x,$$

Найдём $v(x)$, приравнивая выражение в скобках к нулю:

$$v' + 2x \cdot v = 0,$$
$$\frac{dv}{dx} = -2x \cdot v,$$
$$\frac{dv}{v} = -2x\,dx,$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2x\,dx,$$
$$\ln|v| = -x^2 + C,$$
$$|v| = e^{-x^2 + C}, \qquad |v| = e^{-x^2} \cdot e^C,$$

Выражение e^C — некоторая константа, принимающая только положительные значения. С учетом того, что в левой части равенства выражение находится под модулем, общий интеграл (общее решение) уравнения $v' + 2x \cdot v = 0$ можно записать в виде

$$v(x) = Ce^{-x^2}, \quad C - const.$$

Для того чтобы найти второй сомножитель $u(x)$, выберем некоторое частное решение $\tilde{v}(x) = \tilde{C}e^{-x^2}$ уравнения $v' + 2x \cdot v = 0$ и подставим его в уравнение $u' \cdot v + u \cdot \left(v' + 2x \cdot v\right) = 4x$ (выражение в скобках при этом гарантированно равно 0). Разумно выбрать самое «компактное» $\tilde{v}(x) = e^{-x^2}$:

$$u' \cdot \tilde{v} + u \cdot \left(\tilde{v}' + 2x \cdot \tilde{v}\right) = 4x$$
$$u' \cdot e^{-x^2} = 4x,$$
$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-x^2} = 4x,$$
$$du = 4xe^{x^2}\,dx,$$
$$\int du = \int 4xe^{x^2}\,dx,$$
$$u = 2\int e^{x^2}\,dx^2,$$
$$u = 2e^{x^2} + C, C - const.$$

Теперь, когда найдены оба сомножителя, можно записать общее решение уравнения $y'+2xy-4x=0$:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)=\left(2e^{x^2}+C\right)\cdot e^{-x^2}=2+Ce^{-x^2}, \quad C-const.$$

Чтобы найти частное решение, соответствующее начальным условиям, надо подставить в общее решение начальные значения $y(4)=1$ и определить соответствующую им константу:

$$y(4)=2+Ce^{-4^2}=1, \qquad C=-e^{16}.$$

Итак, частное решение $\tilde{y}(x)=2+e^{16}e^{-x^2}=2+e^{16-x^2}$.

Ответ: $\tilde{y}(x)=2+e^{16-x^2}$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$x^2y'+xy=4x^2,$$

удовлетворяющего данному начальному условию $y(3)=2$.

Решение. Данное уравнение является однородным, т.е. приводится к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, следовательно, для его решения можно воспользоваться заменой $y(x)=u(x)\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$:

$$x^2y'+xy=4x^2,$$

$$y'+\frac{y}{x}=4, \text{ (} x=0 \text{ — особое решение),}$$

$$u'\cdot x+u+u=4, \quad u'\cdot x=4-2u, \qquad \frac{du}{dx}\cdot x=4-2u,$$

$$\frac{du}{4-2u}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{du}{4-2u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2}\ln|4-2u|=\ln|x|+C, \quad C-const,$$

$$\ln Cx^2(4-2u)=0, \quad C-const,$$

$$Cx^2(4-2u)=1, \quad C-const,$$

$$Cx^2\left(4-2\frac{y}{x}\right)=1, \quad C-const,$$

$x(4x-2y)=C$ — общий интеграл, $y=2x+\frac{C}{x}$ — общее решение.

Найдём частное решение: $y(3)=2\cdot 3+\frac{C}{3}=2 \quad \Rightarrow \quad C=-12$, $\tilde{y}=2x-\frac{12}{x}$.

Ответ: $\tilde{y}=2x-\frac{12}{x}$.

Задание 3. Степенные ряды

Теоретический материал к разделу 8, п. 8.3. (см. Конспект лекций)

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{5^n}.$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость используя радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n(x-5)^n}{5^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n|x-5|^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\,|x-5|}{5}=\frac{|x-5|}{5}.$$

По радикальному признаку, знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n(x-5)^n}{5^n}\right|$ сходится, если $\frac{|x-5|}{5}<1$. Решим это неравенство:

$$|x-5|<5,\quad -5<x-5<5,\qquad 0<x<10.$$

Следовательно, интервал $(0;10)$ является областью *абсолютной* сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{5^n}$.

Исследуем сходимость в граничных точках интервала.

При $x=0$, степенной ряд преобразуется в числовой знакочередующийся:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(0-5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n5^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n,$$

который расходится (общий член ряда не стремится к 0).

При $x=10$, степенной ряд преобразуется в числовой знакоположительный:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(10-5)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n5^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n,$$

для которого также не выполняется необходимое условие сходимости.

Ответ: при $x\in(0;10)$ ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n 3^n}{n!}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость используя признак Даламбера. По признаку Даламбера, знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x+2)^n 3^n}{n!}\right|$

сходится, если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}3^{n+1}}{(n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{n!}{(x+2)^n 3^n}\right|<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}3^{n+1}}{(n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{n!}{(x+2)^n 3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x+2|}{n+1}=3|x+2|\cdot 0=0,\ 0<1.$$

Ряд сходится абсолютно при всех значениях x.

Ответ: при $x\in\mathbb{R}$ ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+1}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость используя радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^2+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^2+1}}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}}=|x|.$$

По радикальному признаку, знакоположительный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n^2+1}$ сходится, если $|x|<1$, т.е. $-1<x<1$.

Следовательно, интервал $(-1;1)$ является областью абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+1}$.

Исследуем сходимость в граничных точках интервала.

При $x=-1$ степенной ряд преобразуется в числовой знакоположительный:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},$$

который сходится по предельному признаку сравнения:

$\frac{1}{n^2+1}\sim\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - обобщённый гармонический ряд, $\alpha=2$.

При $x=1$ степенной ряд преобразуется в числовой знакочередующийся:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1},$$

который сходится абсолютно по предельному признаку сравнения:

$\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - обобщённый гармонический ряд, $\alpha = 2$.

Ответ: при $x \in [-1;1]$ ряд сходится абсолютно.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+2}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость используя радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n+2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+2}} = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+2}} = |x|\cdot$$

По радикальному признаку, знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n+2}$ сходится, если $|x|<1$, т.е. $-1<x<1$.

Следовательно, интервал $(-1;1)$ является областью абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+2}$.

Исследуем сходимость в граничных точках интервала.

При $x = -1$ степенной ряд преобразуется в числовой знакоположительный:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2},$$

который расходится по предельному признаку сравнения:

$$\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - гармонический ряд.}$$

При $x = 1$ степенной ряд преобразуется в числовой знакочередующийся:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2},$$

который сходится условно по признаку Лейбница (члены ряда убывают, общий член ряда стремится к 0).

Ответ: область сходимости ряда $x \in (-1;1]$, причём при $x = 1$ ряд сходится условно.

Пример 5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n+1} x^n$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость используя признак Даламбера. По признаку Даламбера, знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{n!}{n+1} x^n \right|$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n+2} \right| \cdot \left| \dfrac{n+1}{n!\, x^n} \right| < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n+2} \right| \cdot \left| \frac{n+1}{n!\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, |x|^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n!\, |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} = \infty.$$

Ряд расходится при всех значениях x, кроме 0: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n+1} 0^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

Ответ: при $x = 0$ ряд сходится, причём абсолютно.

Задание 4. Приближенные вычисления с помощью разложения функции в ряд

Теоретический материал к разделу 8, п. 8.4. (см. Конспект лекций)

Вычислить с точностью до 0,001 значение определённого интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд.

Пример 1. Вычислить значение $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ точностью до 0,01

используя разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора.

Решение. Зная разложение в ряд Маклорена экспоненты

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + .. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

запишем разложение e^{-x^2} :

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \ldots$$

Так как сходящийся степенной ряд можно почленно интегрировать, то

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) dx =$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1 + \frac{x^9}{24\cdot 9}\Big|_0^1 - \ldots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \underbrace{\frac{1}{216}}_{\text{меньше } 0{,}01} - \ldots$$

Пятое слагаемое меньше заданной точности, следовательно остаток знакочередующегося ряда $a_5 - a_6 + a_7 \ldots$ не превышает 0,01:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = 0,74.$$

Ответ. 0,74.

Пример 2. Вычислить значение $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\sin(\sqrt[3]{x})\,dx$ точностью до 0,001 используя разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора.

Решение. Зная разложение в ряд Маклорена синуса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

запишем разложение $\sin(\sqrt[3]{x})$:

$$\sin\sqrt[3]{x} = x^{1/3} - \frac{\left(x^{1/3}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x^{1/3}\right)^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(x^{1/3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\sin\sqrt[3]{x} = x^{1/3} - \frac{x}{3!} + \frac{x^{5/3}}{5!} - \frac{x^{7/3}}{7!} \ldots.$$

Тогда

$$\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x} = x^{2/3}\left(x^{1/3} - \frac{x}{3!} + \frac{x^{5/3}}{5!} - \frac{x^{7/3}}{7!} \ldots\right),$$

$$\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x} = x^{1/3+2/3} - \frac{x^{1+2/3}}{3!} + \frac{x^{5/3+2/3}}{5!} - \frac{x^{7/3+2/3}}{7!} \ldots,$$

$$\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x} = x - \frac{x^{5/3}}{3!} + \frac{x^{7/3}}{5!} - \frac{x^{9/3}}{7!} + \frac{x^{11/3}}{9!} \ldots.$$

Так как сходящийся степенной ряд можно почленно интегрировать, то

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x^{5/3}}{3!} + \frac{x^{7/3}}{5!} - \frac{x^{9/3}}{7!} + \frac{x^{11/3}}{9!} \ldots\right)dx =$$

$$=\int_0^1\left(x-\frac{x^{5/3}}{3!}+\frac{x^{7/3}}{5!}-\frac{x^{9/3}}{7!}+\frac{x^{11/3}}{9!}\ldots\right)dx=$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\left.\frac{3x^{8/3}}{3!8}\right|_0^1+\left.\frac{3x^{10/3}}{5!10}\right|_0^1-\left.\frac{3x^{12/3}}{7!12}\right|_0^1+\left.\frac{3x^{14/3}}{9!14}\right|_0^1\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{400}-\frac{1}{5040\cdot 4}+\ldots$$

Четвёртое слагаемое меньше заданной точности 0,001, следовательно остаток знакочередующегося ряда $a_4-a_5+a_6\ldots$ не превышает 0,001:

$$\int_0^1\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{400}=0,44.$$

Ответ. 0,44.

Задание 5. Линии и области в комплексной плоскости

Теоретический материал к разделу 9, п.9.1. (см. Конспект лекций)

По заданным условиям, построить область в комплексной плоскости.

$$\begin{cases}-1\le \operatorname{Re} z\le 5,\\ |\operatorname{Im} z|\le 2\\ |z+1+2i|\ge 1\\ 0\le \arg z\le \dfrac{7\pi}{4}\end{cases}$$

Решение.

По определению, $z=x+iy$, $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$. Следовательно, условия принимают вид

$$\begin{cases}-1\le x\le 5,\\ |y|\le 2\\ |x+iy+1+2i|\ge 1\\ 0\le \varphi\le \dfrac{7\pi}{4}\end{cases}$$

Рассмотрим каждое условие, поочерёдно добавляя к уже имеющимся:

$-1\le x\le 5$ - вертикальная полоса (Рисунок 3, слева);

$|y|\le 2$, $-2\le y\le 2$ - горизонтальная полоса (Рисунок 3, справа).

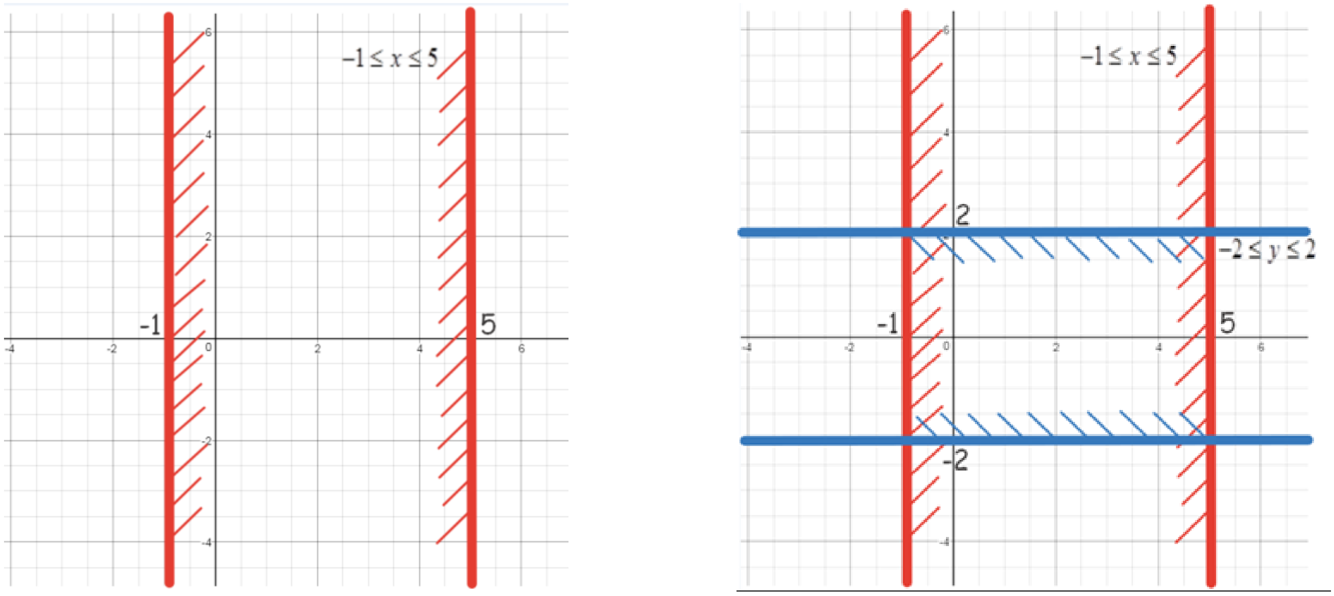

Рисунок 3 – Точки, удовлетворяющие 1-му и 2-му условиям

В пересечении получаем прямоугольник (Рисунок 4).

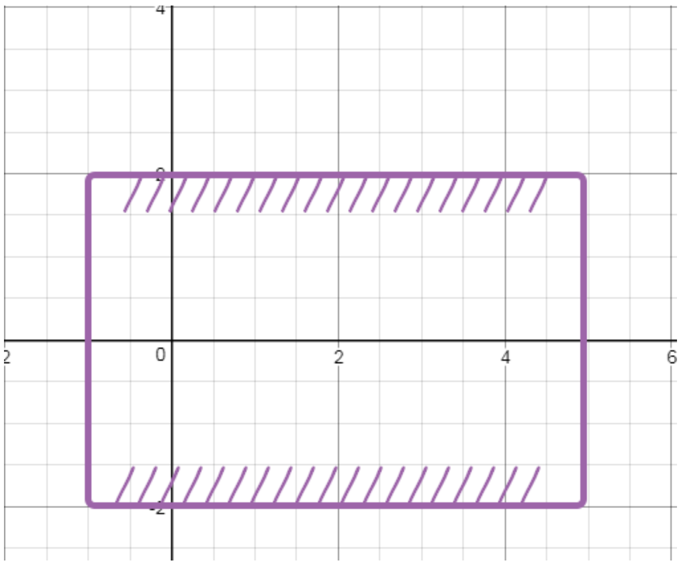

Рисунок 4 – Точки, удовлетворяющие 1-му и 2-му условиям одновременно

Вычислим $|x+iy+1+2i|\geq 1$:

$$|x+iy+1+2i|=|(x+1)+i(y+2)|=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\;;$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\geq 1,$$

$(x+1)^2+(y+2)^2\geq 1$ - внешность круга радиуса 1 с центром в точке (-1,-2).
Построим эту область на фоне прямоугольника и найдём пересечение (Рисунок 5):

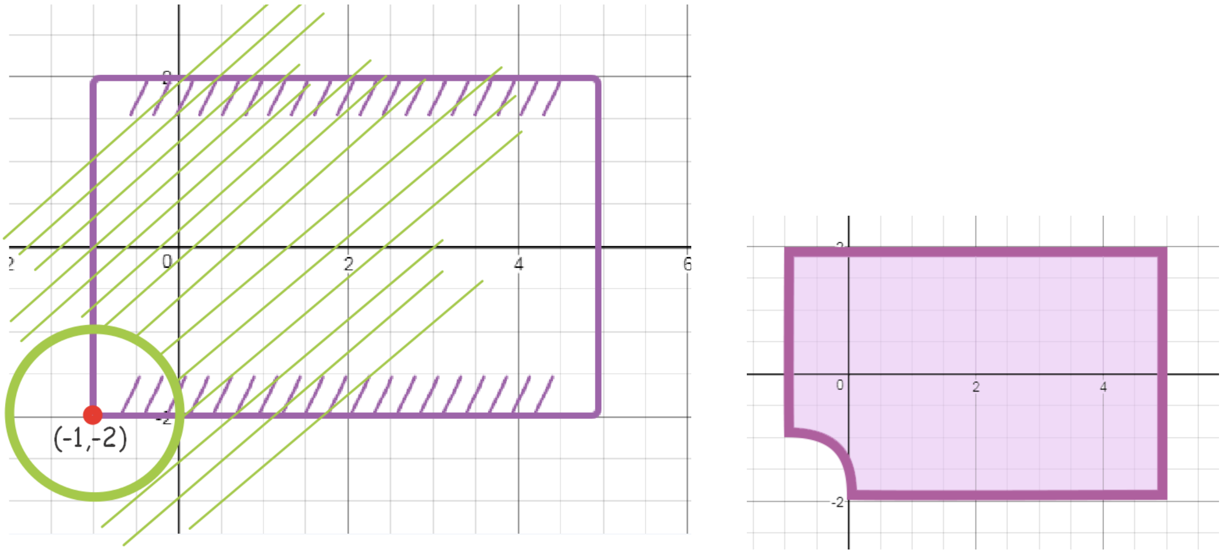

Рисунок 5 – Точки, удовлетворяющие 3-му условию

Самое последнее условие: $0 \le \varphi \le \frac{7\pi}{4}$ – на аргумент комплексного числа. Оно означает, что число лежит на луче в указанном секторе (Рисунок 6) :

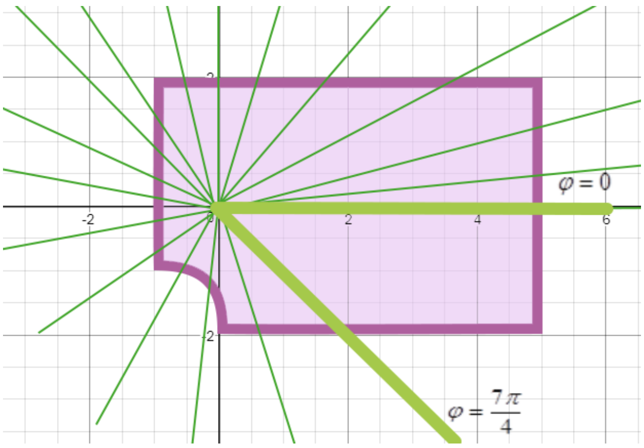

Рисунок 6 – Точки, удовлетворяющие 4-му условию, на фоне остальных

Ответ: совмещая все условия, получим область, изображенную на рисунке 7.

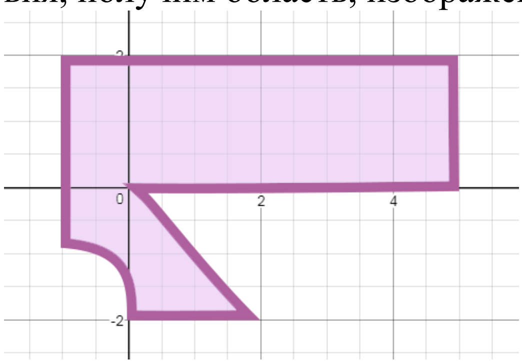

Рисунок 7 – Точки, удовлетворяющие всем условиям

Задание 6. Функции комплексного переменного

Теоретический материал к разделу 9, п.9.2. (см. Конспект лекций)

Вычислить значение функции комплексного переменного, результат представить в алгебраической форме.

Пример 1. Вычислить значение $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{17}$.

Решение. Запишем число в показательной форме, а затем выполним операцию возведения в степень. Для этого изобразим число точкой на плоскости и найдем модуль и аргумент (Рисунок 8).

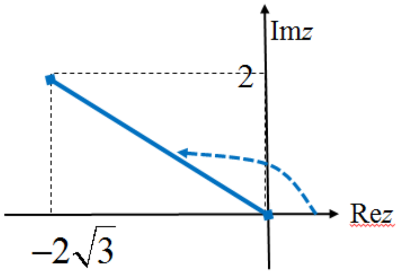

Рисунок 8 – Иллюстрация комплексного числа из примера 1

$$z=-2\sqrt{3}+2i, \quad \arg(z)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{2\sqrt{3}}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6},$$

$$|z|=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4;$$

$$z=-2\sqrt{3}+2i=4e^{\frac{5\pi}{6}},$$

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{17}=\left(4e^{\frac{5\pi}{6}}\right)^{17}=4^{17}e^{\frac{85\pi}{6}}.$$

Казалось бы, всё, но нет. Полученное выражение не является показательной формой записи комплексного числа, так как аргумент должен быть в пределах $\left(-\pi;\pi\right]$ или $\left[0;2\pi\right)$:

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{17}=\left(4e^{\frac{5\pi}{6}}\right)^{17}=4^{17}e^{\frac{85\pi}{6}}=4^{17}e^{14\pi+\frac{\pi}{6}}=4^{17}\underbrace{e^{14\pi}}_{1}e^{\frac{\pi}{6}}=4^{17}e^{\frac{\pi}{6}}.$$

Вычислив экспоненту, можно перевести число в алгебраическую форму:

$$\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{17}=4^{17}e^{\frac{\pi}{6}}=4^{17}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2^{34}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2^{33}\sqrt{3}+2^{33}i.$$

Ответ: $\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^{17}=4^{17}e^{\frac{\pi}{6}}=2^{33}\sqrt{3}+2^{33}i.$

Пример 2. Вычислить значение $\dfrac{i^7+(1-i)^{18}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}$.

Решение. Комплексные числа $z_1=i,\ z_2=1-i$ изобразим (Рисунок 9) запишем в показательной форме и выполним операцию возведения в степень:

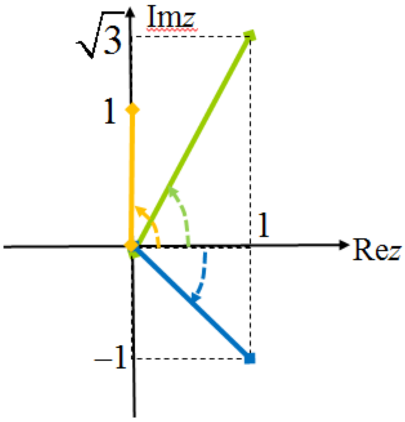

Рисунок 9 – Иллюстрация комплексного числа из примера 2

$$z_1=i,\ \arg(z_1)=\frac{\pi}{2},\ |z_1|=1;$$

$$i=e^{\frac{\pi}{2}},\ i^7=\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)^7=e^{\frac{7\pi}{2}}=e^{4\pi-\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i;$$

$$z_2=1-i,\ \arg(z_2)=\operatorname{arctg}\frac{-1}{1}=-\frac{\pi}{4},\ |z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2};$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}},\ (1-i)^{18}=\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)^{18}=2^9e^{-\frac{9\pi}{2}}=512e^{-4\pi-\frac{\pi}{2}}=$$

$$=512e^{-\frac{\pi}{2}}=512\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-512i.$$

Выполним сложение в числителе: $i^7+(1-i)^{18}=-i-512i=-513i$.

Запишем в показательной форме $z_3=1+\sqrt{3}i$ и выполним возведение в степень:

$$z_3=1+\sqrt{3}i,\ \arg(z_3)=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{6},\ |z_3|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2;$$

$$z_3=1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{6}},\ \left(1+\sqrt{3}i\right)^5=\left(2e^{\frac{\pi}{6}}\right)^5=32e^{\frac{5\pi}{6}}.$$

Выполним деление:

$$\frac{i^7+(1-i)^{18}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}=\frac{-513i}{32e^{\frac{5\pi}{6}}}=\frac{-513e^{\frac{\pi}{2}}}{32e^{\frac{5\pi}{6}}}=-\frac{513}{32}e^{\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}}=-\frac{513}{32}e^{\frac{\pi}{3}}.$$

Полученное выражение не является формой записи комплексного числа, следовательно, преобразуем его до алгебраической:

$$-\frac{513}{32}e^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{513}{32}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{513}{32}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{513}{64}-\frac{513\sqrt{3}}{64}i$$

или показательной:

$$-\frac{513}{32}e^{\frac{\pi}{3}}=e^{-\pi}\cdot\frac{513}{32}\cdot e^{\frac{\pi}{3}}=\frac{513}{32}\cdot e^{\frac{\pi}{3}-\pi}=\frac{513}{32}\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}}.$$

Ответ: $\frac{i^7+(1-i)^{18}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}=-\frac{513}{64}-\frac{513\sqrt{3}}{64}i=\frac{513}{32}\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}}$.

Замечание. Представлены показательная и алгебраическая формы записи.

Пример 3. Вычислить значение $\mathrm{Ln}(1-3i)$.

Решение. Логарифм комплексного числа вычисляется по формуле

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k).$$

Найдём модуль и аргумент аргумента логарифма:

$$z=1-3i,\ \left|1-3i\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10},\quad \arg(1-3i)=-\mathrm{arctg}\,3.$$

$$\mathrm{Ln}(1-3i)=\ln\sqrt{10}+i(-\mathrm{arctg}\,3+2\pi k)$$

Ответ: $\mathrm{Ln}(1-3i)=\ln\sqrt{10}+i(-\mathrm{arctg}\,3+2\pi k)$.

Пример 4. Вычислить значение $\sin(1-3i)$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса разности (см. шпаргалку с формулами, которая всегда должна быть под рукой ещё со школы!).

$$\sin(1-3i)=\sin1\cos(3i)-\cos1\sin(3i)$$

Воспользуемся связью тригонометрических функций с гиперболическими:

$$\sin iz=i\,\mathrm{sh}\,z=i\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \cos iz=\mathrm{ch}\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

и получим $\sin(1-3i)=\sin1\,\mathrm{ch}\,3-i\cos1\,\mathrm{sh}3$.

Ответ: $\sin(1-3i)=\sin1\,\mathrm{ch}\,3-i\cos1\,\mathrm{sh}3$.

Пример 5. Вычислить значение $\mathrm{Arcsin}(7i)$.

Решение. $\operatorname{Arcsin}(z) = -i\,\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$

$z = 7i$, $z^2 = -49$, $1 - z^2 = 1 - (-49) = 50$,

$\sqrt{1 - z^2} = \sqrt{50} = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$ - вы ведь помните, что корней несколько?

$iz + \sqrt{1 - z^2} = -7 \pm 5\sqrt{2}$,

Рассмотрим случаи:

$$\operatorname{Ln}\left(-7 + 5\sqrt{2}\right) = \left[\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7 > 0, \\ |5\sqrt{2} - 7| = 5\sqrt{2} - 7 \\ \arg(5\sqrt{2} - 7) = 0 \end{array}\right] = \ln(5\sqrt{2} - 7) + i2\pi k,$$

$$\operatorname{Ln}\left(-7 - 5\sqrt{2}\right) = \left[\begin{array}{l} -7 - 5\sqrt{2} < 0, \\ |-7 - 5\sqrt{2}| = 7 + 5\sqrt{2} \\ \arg(-7 - 5\sqrt{2}) = \pi \end{array}\right] = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + i\pi(2m + 1), \quad k, m \in Z.$$

$$\operatorname{Arcsin}(7i) = \begin{cases} i\left(\ln(5\sqrt{2} - 7) + 2\pi k i\right) \\ i\left(\ln(5\sqrt{2} + 7) + (2m + 1)\pi i\right) \end{cases} = \begin{cases} -2\pi k + i\ln(5\sqrt{2} - 7) \\ -(2m + 1)\pi + i\ln(5\sqrt{2} + 7) \end{cases}$$

Ответ: $-2\pi k + i\ln(5\sqrt{2} - 7), \quad -(2m + 1)\pi + i\ln(5\sqrt{2} + 7),\ k, m \in Z$.