Указания для выполнения контрольной работы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Межрегиональный учебный центр переподготовки специалистов
Разработчик: доцент, к.т.н. Храмова Татьяна Викторовна

Перед решением контрольной работы следует полностью выписать её условие. Решения задач располагайте в порядке возрастания номеров, указанных в задании. Решения следует излагать, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения. Необходимые рисунки следует помещать в тексте по ходу решения. Ответы в конце решения задачи следует выделять. При необходимости используйте конспект по теории вероятностей, прилагаемый к курсу. Контрольную работу следует посылать отдельным файлом, помещая в начале титульный лист.

Задание 1. Комбинаторика

Сколько 10-ти буквенных слов можно составить из букв слова

МАТЕМАТИКА ?

Решение. Переставить буквы в слове можно 10! способами (формула числа перестановок из n элементов: $P_n = n!$). При этом в слове несколько одинаковых букв: А - три буквы, М и Т - по две буквы. Если менять местами эти буквы в конкретной расстановке, то слова будут получаться одинаковые. Например в слове МТЕМТИКААА последние три буквы можно поменять местами 3! раз и слово будет одно и то же. Следовательно, общее число слов, составленных перестановкой букв из слова МАТЕМАТИКА будет равно

$$\frac{10!}{3!2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 151200$$

- всего 10!, "копий"из-за буквы А - 3!, "копий"из-за буквы М - 2!, "копий"из-за буквы Е - 2!.

Ответ: 151200.

Задание 2. Основные теоремы

В ящике имеется 500 резисторов: 150 из первой партии и 350 из второй. Найти вероятность того, что наугад выбранный резистор окажется бракованным, если вероятность брака в первой партии 0,06, а во второй – 0,04.

Решение. Используем формулу полной вероятности события.
Событие A - брак резистора, $P(A)$ - вероятность брака резистора;
событие B_1 - резистор из первой партии;
$P(B_1)$ - вероятность того, что резистор из первой партии;
событие B_2 - резистор из второй партии;
$P(B_2)$ - вероятность того, что резистор из второй партии;
событие $A|B_1$ - резистор из первой партии бракованный;
$P(A|B_1)$ - вероятность брака при условии, что это первая партия;
событие $A|B_2$ - резистор из второй партии бракованный;
$P(A|B_2)$ - вероятность брака при условии, что это вторая партия.
Тогда, согласно условию,

$$P(B_1) = \frac{150}{500} = 0.3, \quad P(B_2) = \frac{350}{500} = 0.7;$$

$$P(A|B_1) = 0.06, \quad P(A|B_2) = 0.04;$$

и, по формуле полной вероятности,

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2) = 0.3\cdot 0.06+0.7\cdot 0.04 = 0,046$$

Ответ: $0,046$.

Задание 3. Случайные величины

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной рядом распределения

ξ	-1	3	5	9
p	0.3	0.2	0.4	0.1

Решение. Запишем формулу для вычисления математического ожидания и подставим в неё данные задачи:

$$M(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i = -1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.1 = 3.2.$$

Запишем формулу для вычисления дисперсии и подставим в неё данные задачи:

$$D(\xi) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - M^2(\xi) = (-1)^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 + 5^2 \cdot 0.4 + 9^2 \cdot 0.1 - 3.2^2 =$$

$$= 0.3 + 1.8 + 10 + 8.1 - 10.24 = 9.96.$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{9.96} \approx 3.16$$

Ответ:

$$M(\xi) = 3.2, \quad D(\xi) = 9.96, \quad \sigma(\xi) = \sqrt{9.96}$$

Задание 4. Нормальное распределение С.В.

Случайная величина распределена по нормальным закону с параметрами $a = 84$, $\sigma = 6$. Найдите вероятность того, что случайная величина принимает значения из интервала $[70; 90]$.

Решение. Вероятность попадания нормально распределённой величины в интервал вычисляется по формуле

$$P(k_1 < x < k_2) = \Phi_o(\frac{k_2 - a}{\sigma}) - \Phi_o(\frac{k_1 - a}{\sigma}),$$

где $\Phi_o(x)$- функция Лапласа, её значения можно найти в таблице в конце любого учебника по теории вероятностей.
Согласно условиям задачи, имеем

$$\frac{k_2 - a}{\sigma} = \frac{90 - 84}{6} = 1,$$

в таблице находим значение $\Phi_o(1) = 0.3413$;

$$\frac{k_1 - a}{\sigma} = \frac{70 - 84}{6} = -\frac{16}{6} = -2,667$$

в таблице находим ближайшее значение $\Phi_o(2.7) = 0.4965$; с учётом того, что функция Лапласа нечётная, получаем $\Phi_o(-2.7) = -0.4965$; подставим в формулу:

$$P(70 < x < 90) = \Phi_o(1) - \Phi_o(-\frac{16}{6}) =$$

$$= \Phi_o(1) + \Phi_o(\frac{16}{6}) = 0.3413 + 0.4965 = 0.8378$$

Ответ: 0.8378

Замечание. Таблицы со значениями функции Лапласа есть в конспекте к курсу, например.