

Задачи для подготовки к контрольной работе № 3
«Метод моментов» (4 балла)

1. Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 0,6$ и $\lambda_2 = 1$ найти оценку параметра p .

Таблица частот

интервалы	0-0,6	0,6-1,2	1,2-1,8	1,8-2,4	2,4-3	3-3,6	3,6-4,2	4,2-4,8	4,8-5,4	5,4-6,0
частоты	174	108	72	46	30	22	15	12	7	5

2. Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1-p}{a}, & x \in (0; a) \\ p\lambda e^{-\lambda x}, & x \in (a; +\infty) \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $\lambda = 0,3$ и $a = 4$ найти оценку параметра p . Таблица частот

интервалы	0-0,8	0,8-1,6	1,6-2,4	2,4-3,2	3,2-4	4-4,8	4,8-5,6	5,6-6,4	6,4-7,2	7,2-8,0
частоты	142	136	150	149	150	14	12	10	8	7

3. Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 1$ найти оценку параметра p .

Таблица частот

интервалы	0-0,8	0,8-1,6	1,6-2,4	2,4-3,2	3,2-4,0	4,0-4,8	4,8-5,6	5,6-6,4	6,4-7,2	7,2-8,0
частоты	218	117	84	49	28	13	9	5	5	2

4. Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 0,2$ и $\lambda_2 = 0,5$ найти оценку параметра p . Таблица частот

интервалы	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
частоты	299	128	53	26	12	7	6	5	5	2

5. Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{a} + \frac{1-p}{b}, & x \in (0; a) \\ \frac{1-p}{b}, & x \in (a; b) \\ 0, & x \notin (0; b) \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $a = 7$ и $b = 10$ найти оценку параметра p . Таблица частот

интервалы	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
частоты	72	109	90	78	80	94	99	50	69	59

6. Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1-p}{a}, & x \in (0; a) \\ p\lambda e^{-\lambda x}, & x \in (a; +\infty) \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $\lambda = 0,3$ и $a = 4$ найти оценку параметра p . Таблица частот

интервалы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4	4-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8.0
частоты	142	136	150	149	150	14	12	10	8	7

7. Методом моментов найдите оценку неизвестного параметра θ , если плотность распределения с.в. X имеет вид

$$p(x, \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$

и по наблюдениям получены следующие данные: 4,4; 3,5; 3,2; -3,4; 3,5; 4; 4,1; 4,4; -3,8; 3,6.

Метод максимального правдоподобия (4 балла)

1. Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) . Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

интервалы	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8
частоты	97	321	293	184	68	29	8

2. Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) . Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

интервалы	0.0-1.2	1.2-2.4	2.4-3.6	3.6-4.8	4.8-6.0	6.0-7.2	7.2-8.4	8.4-9.6	9.6-10.8	10.8-12.0
частоты	23	178	169	66	37	19	2	4	1	1

Свойства оценок неизвестных параметров (4 балла)

1. Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с неизвестным параметром. При помощи метода максимального правдоподобия (ММП) найти оценку неизвестного параметра распределения, проверить полученную оценку на несмещённость, найти дисперсию оценки:

- 1) Гамма распределение $Gamma(\gamma = 1, \lambda)$. При помощи ММП найти оценку параметра $\frac{1}{\lambda}$
- 2) Нормальное распределение $Norm(m, \sigma = 4)$. При помощи ММП найти оценку параметра m
- 3) Экспоненциальное распределение. При помощи ММП найти оценку математического ожидания
- 4) Пуассоновское распределение. При помощи ММП найти оценку дисперсии
- 5) Экспоненциальное распределение. При помощи ММП найти оценку среднего квадратичного отклонения