Задание. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = 2y + 4x + 1$$

на отрезке $[0; 0{,}5]$ с начальным условием $y(0) = 1$

1) методом Эйлера
2) методом Эйлера-Коши,

   разбив отрезок $[0; 0{,}5]$ на 5 частей.

На оценку «удовлетворительно» достаточно выполнить первую часть задания, на оценки «хорошо» и «отлично» обе части задания.

Вычисления можно выполнять на калькуляторе или использовать Excel.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(a) = y_0$. Нужно найти решение этого уравнения $y(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Приближенные методы решения дифференциального уравнения состоят в последовательном вычислении приближенных значений функции $y(x)$ в точках, полученных дроблением отрезка $[a; b]$ на n равных частей.

В процессе вычислений используются следующие формулы:

$h = (b - a)/n$ – длина промежутка дробления;

$x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, …, $x_n = x_{n-1} + h = b$ – значения аргументов, для которых вычисляется значение решения.

1) В методе Эйлера приближенные значения $y(x)$ в точках x_i вычисляются по формулам:

   $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$,

   $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$,

   $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$, …

   $y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$

2) В методе Эйлера-Коши приближенные значения $y(x)$ в точках x_i вычисляются по формулам:

   $y_1 = y_0 + h/2 \cdot \left(k_1^{(0)} + k_2^{(0)}\right)$, где $k_1^{(0)} = f(x_0; y_0)$, $k_2^{(0)} = f\left(x_1; y_0 + h \cdot k_1^{(0)}\right)$;

   $y_2 = y_1 + h/2 \cdot \left(k_1^{(1)} + k_2^{(1)}\right)$, где $k_1^{(1)} = f(x_1; y_1)$, $k_2^{(1)} = f\left(x_2; y_1 + h \cdot k_1^{(1)}\right)$;

   $y_3 = y_2 + h/2 \cdot \left(k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)$, где $k_1^{(2)} = f(x_2; y_2)$, $k_2^{(2)} = f\left(x_3; y_2 + h \cdot k_1^{(2)}\right)$; …

   $y_n = y_{n-1} + h/2 \cdot \left(k_1^{(n-1)} + k_2^{(n-1)}\right)$,

   где $k_1^{(n-1)} = f(x_{n-1}; y_{n-1})$, $k_2^{(n-1)} = f\left(x_n; y_{n-1} + h \cdot k_1^{(n-1)}\right)$

Замечание. При вычислении значения функции $f(x;y)$ в выражение для функции вместо x подставляем значение первого аргумента, а вместо y значение второго. Например,

$$f(0{,}2;0{,}5) = 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}2 + 1;$$

$$f(a;b+c) = 2\cdot(b+c) + 4\cdot a + 1.$$

Пример выполненного задания

Для рассматриваемого уравнения $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x;y) = 2y + 4x + 1$ –правая часть исходного дифференциального уравнения.

Длина промежутка дробления $h = \frac{0{,}5-0}{5} = 0{,}1$.

1) По формулам метода Эйлера:

$x_1 = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$ $\qquad$ $y_1 = 1 + 0{,}1\cdot(2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1) = 1 + 0{,}3 = 1{,}3.$

Выражение в скобках – это значение функции $f(x;y)$ для соответствующих значений аргументов: $2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1 = f(0;1)$.

Аналогично

$x_2 = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$ $\qquad$ $y_2 = 1{,}3 + 0{,}1\cdot(2\cdot 1{,}3 + 4\cdot 0{,}1 + 1) = 1{,}3 + 0{,}4 = 1{,}7.$

$x_3 = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$ $\qquad$ $y_3 = 1{,}7 + 0{,}1\cdot(2\cdot 1{,}7 + 4\cdot 0{,}2 + 1) = 1{,}7 + 0{,}52 = 2{,}22.$

$x_4 = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$ $\qquad$ $y_4 = 2{,}22 + 0{,}1\cdot(2\cdot 2{,}22 + 4\cdot 0{,}3 + 1) \approx 2{,}88.$

$x_5 = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$ $\qquad$ $y_5 = 2{,}88 + 0{,}1\cdot(2\cdot 2{,}88 + 4\cdot 0{,}4 + 1) \approx 3{,}72.$

Результаты вычислений можно оформит в виде таблицы

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	1,3
2	0,2	1,7
3	0,3	2,22
4	0,4	2,88
5	0,5	3,72

2) По формулам метода Эйлера-Коши

$x_1 = 0{,}1$

$k_1^{(0)} = 2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1 = 3$, $k_2^{(0)} = 2\cdot(1 + 0{,}1\cdot 3) + 4 * 0{,}1 + 1 = 4$

$$y_1 = 1 + 0{,}1/2\cdot(3+4) = 1 + 0{,}35 = 1{,}35.$$

$x_2 = 0{,}2$

$k_1^{(1)} = 2 \cdot 1{,}35 + 4 \cdot 0{,}1 + 1 = 4{,}1,\ k_2^{(1)} = 2 \cdot (1{,}35 + 0{,}1 \cdot 4{,}1) + 4 * 0{,}2 + 1 = 5{,}32$

$y_2 = 1{,}35 + 0{,}1/2 \cdot (4{,}1 + 5{,}32\ ) = 1{,}35 + 0{,}471 \approx 1{,}82.$

$x_3 = 0{,}3$

$k_1^{(2)} = 2 \cdot 1{,}82 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 = 5{,}44,\ k_2^{(2)} = 2 \cdot (1{,}82 + 0{,}1 \cdot 5{,}44) + 4 * 0{,}3 + 1 \approx 6{,}93$

$y_3 = 1{,}82 + 0{,}1/2 \cdot (5{,}44 + 6{,}93\ ) = 1{,}82 + 0{,}6185 \approx 2{,}44.$

$x_4 = 0{,}4$

$k_1^{(3)} = 2 \cdot 2{,}44 + 4 \cdot 0{,}3 + 1 = 7{,}08,\ k_2^{(2)} = 2 \cdot (2{,}44 + 0{,}1 \cdot 7{,}08) + 4 * 0{,}4 + 1 \approx 8{,}9$

$y_3 = 2{,}44 + 0{,}1/2 \cdot (7{,}08 + 8{,}9\ ) = 2{,}44 + 0{,}799 \approx 3{,}24.$

$x_4 = 0{,}5$

$k_1^{(3)} = 2 \cdot 3{,}24 + 4 \cdot 0{,}4 + 1 = 9{,}08,\ k_2^{(2)} = 2 \cdot (3{,}24 + 0{,}1 \cdot 9{,}08) + 4 * 0{,}5 + 1 \approx 11{,}3$

$y_3 = 3{,}24 + 0{,}1/2 \cdot (9{,}08 + 11{,}3\ ) = 3{,}24 + 1{,}019 \approx 4{,}26.$

Результаты вычислений можно оформит в виде таблицы

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,1	1,35
2	0,2	1,82
3	0,3	2,44
4	0,4	3,24
5	0,5	4,26