Лекция 4. Математический анализ на многообразии

4.1. Производная по направлению

Пусть в окрестности некоторой точки P многообразия M задана функция $f(x^1, x^2, ..., x^n)$. Ее изменения вдоль координатных линий описываются частными производными по соответствующим координатам

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, ..., n. \tag{4.1}$$

Производная в направлении произвольного вектора $\bar{u}$ описывается следующим образом. Образуем 1-форму, называемую 1-формой градиента:

$$\tilde{\mathrm{d}}f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\tilde{\theta}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, ..., n. \tag{4.2}$$

В евклидовом пространстве в декартовой системе координат компоненты этой 1-формы будут совпадать с компонентами вектора градиента.

Значения этой 1-формы на базисных векторах как раз равны частным производным (4.1):

$$\tilde{\mathrm{d}}f(\bar{e}_\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\tilde{\theta}^\beta(\bar{e}_\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\delta^\beta_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, ..., n.$$

Вычислим значение 1-формы градиента на произвольном векторе $\bar{u}$, учитывая, что $\partial/\partial x^\alpha = \bar{e}_\alpha()$:

$$\tilde{\mathrm{d}}f(\bar{u}) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\tilde{\theta}^\alpha(\bar{u}) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}u^\alpha = u^\alpha \bar{e}_\alpha(f) = \bar{u}(f). \tag{4.3}$$

Выражение (4.3) носит название производной функции f в направлении вектора $\bar{u}$. Эта производная равна результату действия на функцию f вектора $\bar{u}$ как дифференциального оператора.

4.2. Связность на многообразии. Ковариантная производная

Математические операции сложения, вычитания тензоров и умножение их на число определено в каждой отдельной точке многообразия.

Но для того, чтобы определить производную вектора, необходимо вычислить разность значений этого вектора двух точках: данной точке и в бесконечно близкой точке. Эта связь между данными в двух бесконечно близких касательных пространствах осуществляется специальным математическим свойством многообразия, называемым связностью.

Связность определяет правило «параллельного переноса» векторов, осуществляемого вдоль кривых на многообразии. Связность определяет то, какие векторы в соседних касательных пространствах будут равны друг другу при переносе вектора из одного касательного пространства в другое.

Рассмотрим кривую $l(\lambda)$, заданную своим параметром λ и определяемую в каждой точке касательным вектором $\bar{u}$. Пусть вдоль кривой задано произвольное векторное поле $\bar{W}$ (см. Рис. 4.1).

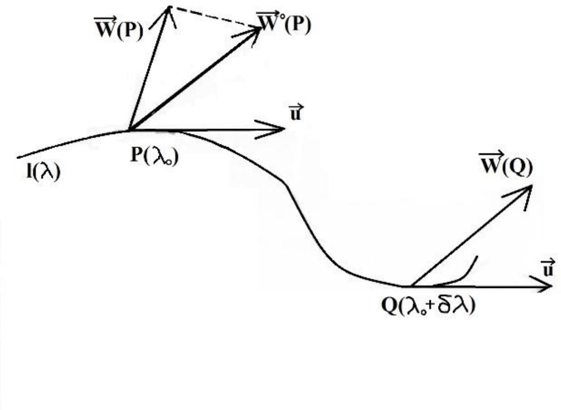

Рис. 4.1.

Перенесем параллельно $\bar W$ из точки Q, соответствующей параметру $\lambda_0 + \delta\lambda$ в точку P, соответствующей параметру λ_0. Результат – вектор $\bar W^*_{\lambda_0+\delta\lambda}(\lambda_0)$ в точке P, равный вектору $\bar W(\lambda_0 + \delta\lambda)$ в точке Q.

Найдем разность двух векторов в точке P:

$$\bar W^* - \bar W = \bar W^*_{\lambda_0+\delta\lambda}(\lambda_0) - \bar W(\lambda_0).$$

Ковариантной производной $\nabla_{\bar u}\bar W$ от вектора $\bar W$ по направлению вектора $\bar u$ называется предел:

$$\nabla_{\bar u}\bar W = \lim_{\delta\lambda\to 0}\frac{\bar W^*_{\lambda_0+\delta\lambda}(\lambda_0) - \bar W(\lambda_0)}{\delta\lambda}. \qquad (4.4)$$

Ковариантная производная обладает следующими свойствами:

1. $\nabla_{\bar u} f = \lim_{\delta\lambda\to 0}\frac{f(\lambda_0+\delta\lambda) - f(\lambda_0)}{\delta\lambda} = \frac{df}{d\lambda} = \bar u(f).$

2. $\nabla_{\bar u}(f\bar W) = (\nabla_{\bar u} f)\bar W + f\nabla_{\bar u}\bar W.$

3. $\nabla_{\bar u}(\bar A\otimes\bar B) = (\nabla_{\bar u}\bar A)\otimes\bar B + \bar A\otimes\nabla_{\bar u}\bar B$, где $\bar A$ и $\bar B \in T_p{}^{(*)}$

4. $\nabla_{\bar u}\langle\tilde\omega, \bar{\mathrm{v}}\rangle = \langle\nabla_{\bar u}\tilde\omega, \bar{\mathrm{v}}\rangle + \langle\tilde\omega, \nabla_{\bar u}\bar{\mathrm{v}}\rangle$, где $\bar{\mathrm{v}} \in T_p$ и $\tilde\omega \in T_p{}^*$.

Свойства 2, 3 и 4 отражают различные реализации правила Лейбница, являющего характерным свойством операции дифференцирования любого типа.

5. $\nabla_{f\bar u}\bar W = f\nabla_{\bar u}\bar W.$

6. $\nabla_{\bar{u}}(\bar{W}_1 + \bar{W}_2) = \nabla_{\bar{u}}\bar{W}_1 + \nabla_{\bar{u}}\bar{W}_2$.

7. $\nabla_{\bar{u}+\bar{v}}\bar{W} = \nabla_{\bar{u}}\bar{W} + \nabla_{\bar{v}}\bar{W}$.

Ковариантная производная позволяет получать результаты дифференцирования, независимые от выбора системы координат.

4.3. Вычисление ковариантной производной вектора

Пусть $\{\vec{e}_\alpha\}$ координатный базис. Тогда, учитывая предыдущие свойства, в выражении ковариантной производной разложим векторы по базису:

$$\nabla_{\bar{u}}\bar{W} = \nabla_{u^\alpha \bar{e}_\alpha}(W^\beta \bar{e}_\beta) = u^\alpha \nabla_{\bar{e}_\alpha}(W^\beta \bar{e}_\beta) =$$

$$= u^\alpha(\nabla_{\bar{e}_\alpha} W^\beta \cdot \bar{e}_\beta + W^\beta \nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta).$$

Далее, имеем: $\nabla_{\bar{e}_\alpha} W^\beta = \bar{e}_\alpha(W^\beta) = \dfrac{\partial W}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha W^\beta$. Выражение $\nabla_{\bar{e}_\alpha} \bar{e}_\beta = \bar{e}_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$ есть вектор, который мы разложили по базису. Компоненты разложения $\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$ называются коэффициентами связности. Они задаются в каждой точке многообразия. Далее, имеем

$$\nabla_{\bar{u}}\bar{W} = u^\alpha \left(\frac{\partial W^\beta}{\partial x^\alpha} \bar{e}_\beta + W^\beta \bar{e}_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \right) =$$

$$= u^\alpha \left(\frac{\partial W^\gamma}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} W^\beta \right) \bar{e}_\gamma .$$

Коэффициентами связности $\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}$ характеризуют в каждой точке многообразия правило параллельного переноса. Индексы α, β, γ несут в себе информацию:

1. Последний нижний индекс α о кривой, вдоль которой происходит дифференцирование;
2. Первый нижний индекс β о дифференцируемом объекте;
3. Верхний индекс γ о результате дифференцирования.

Окончательная запись ковариантной производной вектора в компонентной форме имеет вид

$$\nabla_{\vec{u}}\vec{W} = W^{\gamma};_{\alpha}\vec{e}_{\gamma}, \quad W^{\gamma};_{\alpha} = u^{\alpha}\left(\frac{\partial W^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}W^{\beta}\right). \quad (4.5)$$

Введем понятие геодезической линии (или просто геодезической). Пусть в пространстве заданы ковариантное дифференцирование (связность) и произвольная кривая $x^{\alpha}(\lambda), \ \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2, \ \alpha = 1, 2, \ldots, n$.

Говорят, что векторное поле $\bar{u}$ является параллельным вдоль этой кривой, если ковариантная производная поля $\bar{u}$ в точках кривой по направлению вектора скорости кривой равна нулю. Линия $x^{\alpha}(\lambda)$ называется геодезической, если ее вектор скорости $u^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\lambda$ параллелен вдоль нее самой: $\nabla_{\bar{u}}\bar{u} = 0$. В координатах имеем:

$$\nabla_{\bar{u}}\bar{u} = u^{\alpha}u^{\gamma}{}_{;\alpha}\bar{e}_{\gamma} = 0, \quad u^{\alpha}\left(\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}u^{\beta}\right) = 0. \quad (4.6)$$

4.4. Вычисление ковариантных производных 1-формы и тензора

В выражении ковариантной производной 1-формы разложим входящие в нее величины по базисам:

$$\nabla_{\bar{u}}\tilde{\omega} = \nabla_{u^\alpha \bar{e}_\alpha}(\omega_\beta \tilde{\theta}^\beta) = u^\alpha \left(\nabla_{\bar{e}_\alpha}\omega_\beta \cdot \tilde{\theta}^\beta + \omega_\beta \nabla_{\bar{e}_\alpha}\tilde{\theta}^\beta\right). \quad (4.7)$$

Имеем $\nabla_{\bar{e}_\alpha}\omega_\beta = \bar{e}_\alpha(\omega_\beta) = \partial\omega_\beta / \partial x^\alpha$.

Если определение ковариантной производной 1-формы написать по аналогии с определением ковариантной производной вектора (4.4), то убедимся, что ковариантная производная 1-формы есть 1-форма.

Разложим 1-форму $\nabla_{\bar{e}_\alpha}\tilde{\theta}^\beta$ по базису 1-форм: $\nabla_{\bar{e}_\alpha}\tilde{\theta}^\beta = \tilde{\theta}^\gamma \breve{\Gamma}^\beta{}_{\gamma\alpha}$, где компоненты $\breve{\Gamma}^\beta{}_{\gamma\alpha}$ - подлежащая определению числовая матрица, что будет произведено на практических занятиях. Ответ: $\breve{\Gamma}^\beta{}_{\gamma\alpha} = -\Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha}$. Подставляя найденные выражения в (4.7), ковариантную производную 1-формы в компонентном виде запишем следующим образом:

$$\nabla_{\bar{u}}\tilde{\omega} = u^\alpha \omega_{\beta\,;\,\alpha}\tilde{\theta}^\beta, \qquad \omega_{\beta\,;\,\alpha} = \frac{\partial\omega_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}\omega_\gamma. \quad (4.8)$$

Компонентные выражения ковариантных производных тензоров образуются по правилу: на каждый индекс приходится один экземпляр коэффициентов связности, причем верхний индекс дифференцируется по формуле (4.6), а на нижний индекс по формуле (4.8).

Практическое задание:

1. Доказать, что $\breve{\Gamma}^{\beta}{}_{\gamma\alpha} = -\Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}$. Для этого воспользоваться свойством 4 в п. 4.2, вычислить левую и правую части этого равенства, подставив в левую часть выражение для свертки в компонентах, а в правую часть формулы (4.6) и (4.8) для ковариантных производных вектора и 1-формы.
2. На основании формул (4.6) и (4.8) написать компонентные выражения для ковариантных производных метрического тензора и тензора ранга 3 типа (1,2), то есть написать выражения для $g_{\alpha\beta;\gamma}$ и $T^{\gamma}{}_{\alpha\beta;\gamma}$.