ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**§ 1.Понятие функции двух переменных. Область определения. График. Линии уровня**

|  |
| --- |
| Если каждой паре значений независимых переменных (*х*,*у*), взятых из некоторой области изменения *D*, по некоторому закону ставится в соответствие определенное значение третьей переменной *z*, то *z* называется ***функцией двух переменных*** *х* и *у*: *z = f* (*x,y*) |

Переменные *х* и *у* называются ***аргументами функции z****.* Область *D –* ***область определения функции*** **z***.* Поскольку каждой паре чисел (*х,у*) на плоскости *Оху* можно поставить в соответствие точку *М* (*х,у*), то функцию двух переменных понимают ***как функцию точки*** на плоскости Оху из области *D*.

Определение. *δ*- окрестностью точки M0 (х0,у0) называется внутренняя часть круга радиуса δ. с центром в точке M0 **<*δ.*

Следует различать внутренние и граничные точки области *D.* ***Внутренняя точка области D*** имеет окрестность, состоящую из точек данного множества. ***Граничная точка области D*** имеет окрестность, состоящую из точек данного множества и из внешних точек.

Совокупность всех граничных точек множества D называется его ***границей***.

Область *D* называется***замкнутой* ()**, если содержит все свои граничные точки*.* В качестве примера замкнутой области можно привести замкнутый круг: .Область *D* называется***открытой****,* если все ее точки являются внутренними,например, как в открытом круге: .

Область предполагается ***связной***, когда всякие две точки М1∈*D*и М2∈*D* можно соединить непрерывной линией, не выходящей за пределы области *D*.

Открытая область является аналогом интервала (*а,b*) на прямой. Замкнутая область  - аналог отрезка [*a,b*].

Область определения функции  находится из условия , и является замкнутым кругом: . Областью определения функции  будет выступать открытый круг: .

Геометрическим образом функции двух переменных z = *f* (*x,у*) является поверхность в трехмерных координатах, каждая точка которой имеет аппликату, вычисляемую по формуле z = *f* (*x,у*). Например, верхняя полусфера будет описываться функцией: 

Часто вместо поверхности используют другой способ графического представления функции двух переменных – ***линии уровня***. ***Линией уровня функции*** называется множество точек плоскости *хОу,* в которых функцияz = *f* (*х,у*) сохраняет постоянное значение *h*:  *f* (*х,у*)=*h.* Линии уровня соответствую геодезическим линиям в картографии.

**§ 2.Предел и непрерывность функции нескольких переменных**

|  |
| --- |
| Число *А* называется пределом функции двух переменных *f* (*х*, *у*) при *х*→ *х*0, *у*→ *у*0  ( или при *М*→*М*0), если для любого сколь угодно малого положительного ε >0 найдется такая *δ*- окрестность около *М*0 , что для всех точек этой δ-окрестности будет выполняться неравенство |

В этом случае пишут:

, или .

Предел *А* не зависит от способа (направления) приближения точки *М* к точке *М*0. При вычислении предела функции двух переменных вычисляем предел функции *f* (*х, у*) по всем возможным прямым, проходящим через точку *М*0 (при *М→М*0), и если все эти пределы равны числу *А*, то.

Пример 1. Найти .

Пусть *М* *→ М*0  по прямой *y=kx.* Тогда0.

Значение предела не зависит от *k* , т.е. от направления прямой, поэтому *А=*0.

Пример 2. Найти .

(*y=kx*)=

Для разных прямых (различные *k* ) получаем различные значения предела. Значит в точке *О*(0,0) функция не имеет предела.

Функция *f*(*х*,*у*) называется***бесконечно малой****,* если *.*

Функция *f* (*х*,*у*) называется***непрерывной в точке М*0(*х*0*,у*0)***,*если точка *М*0 принадлежит области определения функции и если

.

Для выполнения условия непрерывности в точке необходимо, чтобы:

1) функция *f (х,у)* была определена в точке *М*0(*х*0*,у*0)*;*

2) существовал предел ;

3) *f* (*М*0) = *А.*

Функция *f* (*х*, *у* )называется ***непрерывной в области*** *,* если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точка *М*1(*х*1,*у*1) называется *точкой разрыва функции f(х,у),* если функция определена в окрестности этой точки, но в самой точке М1 не выполнено хотя бы одно из указанных условий непрерывности.

Пример 3. . *М*0(0*,*0) –точка разрыва (предел не существует). Заметим, что по каждому из аргументов в отдельности данная функция непрерывна. Например, пусть *М → М*0  по оси *Ох* (*у=*0). Тогда *z*= 0 и . Аналогично по оси *Оу* (*х=*0): .

Таким образом, непрерывность функции *f*(*х,у*)по совокупности аргументов не сводится к непрерывности по каждому аргументу в отдельности.

Пример 4. . , *у = х –* линия разрыва в плоскости аргументов.

Все свойства, установленные для непрерывных функций одной переменной, остаются в силе для непрерывных функций нескольких переменных:

1.Все элементарные функции нескольких переменных непрерывны в области определения.

2. Если функция *f* (*М*) непрерывна в замкнутой области, то она ограничена в ней ( достигает наибольшего и наименьшего значения ).

3. Непрерывная в  функция, непрерывно переходя от одного своего значения к другому, необходимо проходит через каждое промежуточное значение.

**§ 3. Частные производные и частные дифференциалы первого порядка**

Пусть функция *z=f*(*х,у*) определена и непрерывна в точке *М*0(*х*0,*у*0) и ее некоторой окрестности. Рассмотрим перемещение из точки *М*0(*х*0,*у*0) в точку *М*0(*х*0+Δ*x*,*у*0). Оно происходит при фиксированном *у* = *у*0. Приращение функции *z =f* (*х, у*) при фиксированном значении *у*=*у*0называется ***частным приращением по переменной х***

.

Если существует предел , то этот предел называется ***частной производной******функции******z******по******переменной******х*** в точке *М*0 (*х*0, *у*0) и обозначается =.

По аналогии при перемещении из точки *М*0(*х*0,*у*0) в точку *М*2(*х*0, *у*0 +Δ*у*) получим частное приращение функции *z* по переменной *y*: .

Предел отношения  при Δ*у*→0, если он существует, называется ***частной производной функции z по переменной*** ***у***:  =.

Частное отношение  имеет физический смысл средней скорости изменения функции *z* по аргументу *х* на горизонтальном отрезке *М*0*М*1, а отношение  дает среднюю скорость изменения функции *z* по аргументу *у* на вертикальном отрезке отрезке *М*0*М*2.

Частная производная  соответствуют мгновенной скорости изменения функции *z* в точке *М*0(*х*0,*у*0) в направлении координатной оси *Ох*. Частная производная  соответствуют мгновенной скорости изменения функции *z* в точке *М*0(*х*0,*у*0) в направлении координатной оси *Оу*.

При вычислении частных производных сохраняют силу правила и формулы дифференцирования, доказанные для функции одной переменной. Однако, частная производная функции *z=f* (*х,у*) по переменной *х* находится при фиксированном *у =const*. Частная производная функции *z=f* (*х,у*) по переменной *y* находится при фиксированном *x =const*.

Пример 5. .

 = , = .

Пример 6. . Найти и в точке *М*(1,-1). , .

Таким образом, в точке *М*0 данная функция возрастает в направлении оси*Ох* и убывает в направлении оси *Оу.*

Геометрический смысл частной производной  = , тангенс угла наклона касательной к линии пересечения поверхности *z=f* (*х,у*) и плоскости *у* = *у*0. Касательная как и линия *z=f* (*х,у*о) тоже лежит в плоскости *у* = *у*0. Геометрический смысл частной производной  = , тангенс угла наклона касательной к линии пересечения поверхности *z=f* (*х,у*) и плоскости *x* = *x*0. Касательная как и линия *z=f* (*х*o*,у*) тоже лежит в плоскости *x* = *x*0.

Частные производные для функций большего числа переменных определяются аналогично. Например, для *U= f*(*x,y,z*)

=;

= ; =.

Частные дифференциалы функции *z*=*f(х,у)*   и  определяются как главные части соответствующих частных приращений  и .

Замечание. Для функции одной переменной *у =* *f*(*x*) существование производной *f′*(*x*0) гарантирует непрерывность функции *f*(*x*) в точке *х =х*0. Для функции нескольких переменных из существования частных производных по всем переменным в точке *М*0 не следует непрерывность функции *U= f*(*М*) в этой точке.

Пример 7: *z =f* (*х, у*) =.

С одной стороны  - не существует, т.е. точка (0,0) является точкой разрыва для функции. С другой стороны, =, =. Нахождение частных производных в точках непрерывности приводит к результату:  и . Таким образом,  и  существуют везде.

***Задание РГЗ.*** Вычислить частные производные  и  для трех функций в каждом варианте.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № варианта |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |
| 10 |  |  |  |
| 11 |  |  |  |
| 12 |  |  |  |
| 13 |  |  |  |
| 14 |  |  |  |
| 15 |  |  |  |
| 16 |  |  |  |
| 17 |  |  |  |
| 18 |  |  |  |
| 19 |  |  |  |
| 20 |  |  |  |
| 21 |  |  |  |
| 22 |  |  |  |
| 23 |  |  |  |
| 24 |  |  |  |
| 25 |  |  |  |