1. Частица случайно блуждает по узлам кубической кристаллической решетки, совершая каждый раз с одинаковой вероятностью скачок длиною а в положительном или отрицательном направлении по одной из трех координатных осей. Определите среднеквадратичное удаление точки от начального положения за N шагов.

2. В урне имеется pN белых и (1-p)N черных шаров. Из урны вынимают по одному шару, которые возвращаются в урну. Найдите вероятность того, что белый шар впервые будет обнаружен при (k+1) опыте. Найдите среднее число неудачных опытов и флуктуацию. При вычислении средних считать, что k может принимать значения от нуля до очень больших чисел.

3. Частица свободно движется внутри сосуда объема V. Найдите вероятность того, что при случайных наблюдениях частица в (r+1)-ый раз будет обнаружена в ячейке объема v_1 = p V при (k+r+1)-вом эксперименте, где r - задано (r = 1,2,3...), а k - случайно, причем оно может принимать значения от нуля до бесконечности. Считать, что первые (r) удачные наблюдения случайным образом перемешаны с k неудачными. Для данного распределения, называемого обобщенным распределением геометрической прогрессии, найдите среднее число неудачных опытов и его флуктуацию.

4. Точка совершает случайные блуждания вдоль прямой, перемещаясь с одинаковой вероятностью вперед или назад на шаг длины а. Определите среднее и среднее квадратичное удаление точки от начального положения за N шагов.

5. Точка движется в плоскости (x, y) так, что все направления движения равновероятны. Найдите плотность вероятности того, что точка движется в направлении, которое составляет случайный угол θ с заданным направлением Ox. Используя полученное распределение, найдите плотность вероятности того, что частица, имеющая скорость v, движется вдоль оси Ox со случайным значением составляющей v_x. Вычислите среднее значение составляющей $\overline{v_x}$ и ее модуля $\overline{|v_x|}$.

6. Величина y связана с совокупностью независимых случайных величин x_1, x_2, …, x_n соотношением $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Найдите плотность вероятности случайного значения величины, считая, что все величины x_i распределены по экспоненциальному закону с одинаковыми средними значениями $\overline{x}$ = a. Все случайные x_i принимают только положительные значения.

7. Для обобщенного гамма-распределения $f(x) = A \exp[-\alpha x^n]\, x^r$ рассчитайте нормировочный множитель, а также наивероятнейшее, среднее и среднеквадратичное значение случайной величины, принимающей значения в интервале (0 до ∞).

8. Плотностъ вероятности нахождения электрона на расстоянии r от ядра атома водорода выражается гамма-распределением

f (x) = C $r^2 \exp(-r/a)$. Рассчитайте наивероятнейшее, среднее и среднеквадратичное удаление электрона от ядра, а также среднее значение потенциальной энергии электрона. Получите распределение вероятностей для случайных значений потенциальной энергии электрона и рассчитайте с его помощью наивероятнейшее и среднее значение потенциальной энергии.

9. Найдите вероятность того, что частица массы m, совершающая в однородном поле силы тяжести вертикальные прыжки над идеально упругой плитой, в случайный момент времени t находится на высоте (z, z+dz). Вычислите среднее значение $\overline{z}$ и флуктуацию D_z. Найдите среднее значение кинетической и потенциальной энергии частицы. Максимальная высота подъема частицы над плитой равна H.

10. Электроны, пройдя круглую щель, рассеиваются и падают на экран, образуя круглое пятно с распределением вероятностей

$dW(r,\varphi) = A[1+\cos(\pi r/a)]\, dr\, d\varphi$, где $0 \le r \le a$

Найдите среднее и среднеквадратичное удаление точек падения электронов от центра экрана.

11. Электроны, пройдя круглую щель, рассеиваются и падают на экран, образуя круглое пятно с распределением вероятностей

$dW(r,\varphi) = A[1+\cos(\pi r/a)]\, dr\, d\varphi$, где $0 \le r \le a$

Найдите вероятность того, что точка падения электрона находится в интервале: а) $0 \le r \le a/2$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; б) $0 \le r \le a$; $0 \le \varphi \le \pi/4$.

12. Частица может находиться на любых расстояниях от центра O, причем вероятность локализации ее внутри элементарного параллелепипеда выражается формулой $dW=A \exp[-\alpha(x^2+y^2+z^2)]\, dxdydz$. Рассчитайте и постройте графики:

плотности вероятности $\rho(r)$ того, что частица находится внутри шарового слоя радиуса r толщиной dr,

13. Частица может находиться на любых расстояниях от центра O, причем вероятность локализации ее внутри элементарного параллелепипеда выражается формулой $dW=A \exp[-\alpha(x^2+y^2+z^2)]\, dxdydz$. Рассчитайте и постройте графики:

плотности вероятности g(x) того, что частица находится внутри плоского слоя толщиной dx, удаленного от центра на расстояние x. Найдите наивероятнейшее r_{max} и x_{max}, объясните их различие.

14. Составьте уравнения Гамильтона, найдите интеграл энергии, и определите уравнение фазовой траектории и закон движения для линейного гармонического осциллятора. Определите объем фазового пространства,

выразив его как функцию энергии. Начальная координата x_o, начальный импульс p_o.

15. Напишите гамильтониан, составьте и проинтегрируйте уравнения Гамильтона и найдите уравнение фазовой траектории для малых колебаний математического маятника. Вычислите фазовый объем для интервала энергий (0, E), если длина маятника L, масса - m. Начальные условия — (x_o, p_o).

16. Двухатомная молекула с массами атомов m_1 и m_2, расстояние между которыми равно a, вращается вокруг своего центра масс, обладая энергией E. Составьте для данного движения гамильтониан и найдите объем фазового пространства для интервала энергий (0, E). В качестве обобщенных координат возьмите азимутальный φ и полярный θ углы сферической системы координат.

17. Убедитесь, что фазовый объем, занимаемый ансамблем заряженных частиц, движущихся в однородном электрическом поле вдоль линий напряженности, не изменяется во времени. В начальный момент ансамбль занимает в фазовом пространстве объем в форме прямоугольника.

18. Вычислите число квантовых состояний и определите объем фазового пространства на одно квантовое состояние ротатора при больших значениях квантового числа. Закон квантования энергии ротатора $E_n = \frac{\hbar^2}{2I}(n+1)n$, кратность вырождения уровней энергии $g_n = 2n+1$.

19. Для линейного осциллятора частоты ω рассчитайте фазовый объем для интервала энергии (0, E) и определите объем фазовой ячейки, приходящейся на одно квантовое состояние в квазиклассическом приближении. Закон квантования считать известным: $E_n = \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$.

20. В квазиклассическом приближении вычислите объем фазовой ячейки на одно квантовое состояние системы N независимых трехмерных осцилляторов частоты ω. Для этого предварительно найдите фазовый объем и число состояний для интервала энергий (0, E). При подсчете числа состояний учтите кратность вырождения.

21. В квазиклассическом приближении вычислите объем фазовой ячейки на одно квантовое состояние системы N квазинезависимых осцилляторов с несоизмеримыми частотами. Для этого предварительно найдите фазовый объем и число состояний для интервала энергий (0, E).

22. Рассчитать число фазовых ячеек в фазовом пространстве одной частицы в интервале энергий (E, E+dE), движущейся в объеме V.

23. Вычислите объем фазовой ячейки на одно квантовое состояние частицы, движущейся в трехмерном потенциальном ящике длиной L. Энергия такой частицы квантуется описывается соотношением: $E_{nx} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^{\ 2} + n_y^{\ 2} + n_z^{\ 2}\right)$.

24. Для трехмерного изотропного осциллятора частоты ω рассчитайте фазовый объем для интервала энергий (0, E), вычислите число квантовых состояний для этого интервала энергий и найдите объем фазовой ячейки на одного квантовое состояние. Энергия осциллятора принимает значения $E_{nx,ny,nz} = \frac{3}{2}\hbar\omega + (n_x + n_y + n_z)\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega + m\hbar\omega$, где $m = n_x + n_y + n_z$.

25. Для двумерного изотропного осциллятора частоты ω рассчитайте фазовый объем для интервала энергией (0, E), вычислите число квантовых состояний для того же интервала энергий и определите объем фазовой ячейки на одно квантовое состояние в квазиклассическом приближении. Закон квантования энергии такого осциллятора считать известным

$E_{nx,ny} = \left(\frac{\hbar\omega}{2} + n_x\hbar\omega\right) + \left(\frac{\hbar\omega}{2} + n_н\hbar\omega\right) = \hbar\omega + m\hbar\omega$, где $m = n_x + n_y$.

26. Покажите, что фазовый объем ансамбля математических маятников, совершающих малые колебания, не изменяется во времени. В начальный момент ансамбль занимает объем в форме треугольника с координатами вершин (φ_1, φ_2, φ_3, $p_{\varphi1}$, $p_{\varphi2}$, $p_{\varphi3}$).