Оглавление

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

III семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1. Найти общее решение уравнения
$$y'' + ay' + by = f(x),$$
используя характеристическое уравнение и метод вариации произвольных постоянных.

№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	0	-1	$\dfrac{e^x}{e^x-1}$	16	0	-1	$\dfrac{1}{e^x+1}$
2	-2	1	$\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\ln x$	17	-2	1	$e^x x\ln x$
3	-5	6	$\dfrac{e^{3x}}{e^x+2}$	18	5	6	$\dfrac{1}{e^{3x}-e^{4x}}$
4	0	1	$\dfrac{1}{\sin 2x}$	19	0	4	$\dfrac{1}{\sin 4x}$
5	-1	0	$\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$	20	1	0	$\dfrac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}}$
6	-2	2	$\dfrac{e^x}{\sin^2 x}$	21	-2	5	$e^x \operatorname{tg} 2x$
7	0	-4	$\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$	22	0	-4	$\dfrac{1}{e^{2x}-1}$
8	2	1	$\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}$	23	2	1	$\dfrac{x\ln(1-x)}{e^x}$
9	-7	12	$\dfrac{e^{4x}}{e^x-3}$	24	7	12	$\dfrac{1}{e^{4x}+2e^{5x}}$
10	0	9	$\dfrac{1}{\cos^3 3x}$	25	0	16	$\operatorname{tg}^2 4x$
11	-2	0	$e^{2x}\sqrt{1-e^{4x}}$	26	2	0	$\sqrt{e^{4x}+1}$
12	2	2	$\dfrac{1}{e^x\cos^2 x}$	27	2	5	$\dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{e^x}$
13	0	-9	$\dfrac{e^{3x}}{2-e^{3x}}$	28	0	-9	$\dfrac{1}{2e^{3x}+1}$

Продолжение задачи 1							
№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
14	-6	9	$e^{3x}\ln(x^2+1)$	29	6	9	$\dfrac{\ln(x^2-2)}{e^{3x}}$
15	-4	13	$\dfrac{e^{2x}}{\cos^2 3x}$	30	4	13	$\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{e^{2x}}$

Задача 2. $L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$.
1) Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения $L(y) = 0$. Зная это, найти общее решение уравнения $L(y) = 0$.
2) Найти общее решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ с заданной правой частью $f(x)$, предположив, что одно из частных решений уравнения $L(y) = f(x)$ является многочленом.

№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
1	x^2	$-4x$	6	x^2	$2x^4$
2	x^2	x	-1	x	$3x^2-1$
3	x^2+1	$-2x$	2	x	$2x^3+6x$
4	$x-1$	$-x$	1	x	x^3-3x
5	x^2	$-x$	1	x	$4x^3-x^2$
6	x	2	x	$(\sin x)/x$	x^3
7	x	2	$-x$	e^x/x	x^3+2x
8	x^4	0	-1	$xe^{1/x}$	$2x^4-x^2$
9	x^4	$2x^3$	-1	$e^{1/x}$	$6x^4-x^2$
10	x^2	$-2x$	2	x	$3x^4-1$
11	x^2	$-x$	-3	x^3	x^2-1
12	x^2	0	-2	x^2	$2x^3-x$

Продолжение задачи 2					
№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
13	x^2	x	-4	$1/x^2$	$5x^3+3x$
14	x^2	$4x$	2	$1/x$	$3x^2-2x$
15	x^4	0	1	$x\sin(1/x)$	$6x^5+x^3$
16	x^2	$-4x$	6	x^3	$2x^4+2x$
17	x^2	x	-1	$1/x$	$-3x^2-1$
18	x^2+1	$-2x$	2	x^2-1	$6x^4+12x^2$
19	$x-1$	$-x$	1	e^x	x^2-2x
20	x^2	$-x$	1	$x\ln x$	x^2+1
21	x	2	x	$(\cos x)/x$	x^2+2
22	x	2	$-x$	e^{-x}/x	x^2-2
23	x^4	0	-1	$xe^{-1/x}$	$6x^5-x^3$
24	x^4	$2x^3$	-1	$e^{-1/x}$	$12x^5-x^3$
25	x^2	$-2x$	2	x^2	x^3
26	x^2	$-x$	-3	$1/x$	$3x^2+4x$
27	x^2	0	-2	$1/x$	$5x^4-x$
28	x^2	x	-4	x^2	$5x^3-4$
29	x^2	$4x$	2	$1/x^2$	x^2+2x
30	x^2	$-6x$	12	x^3	$6x^5$

Задача 3. Решить задачу Коши

$$y''+ay'+by=f(x),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

а) с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши

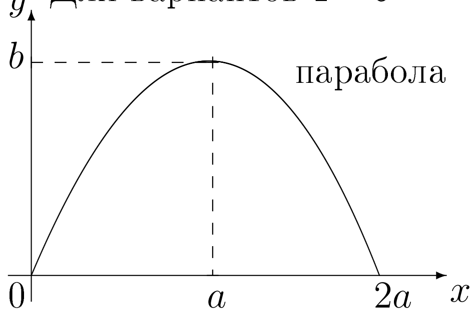
$$z''+az'+bz=1,\ z(0)=0,\ z'(0)=0.$$

б) методом неопределенных коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части).

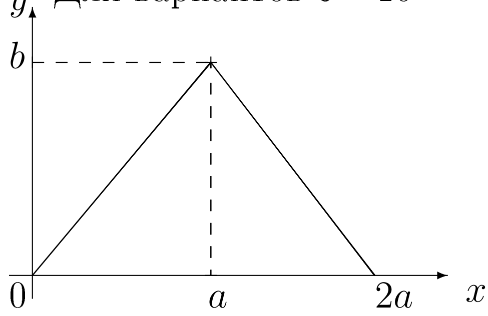
№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	-3	2	e^x	11	-1	-2	e^{-x}	21	-7	10	e^x
2	3	-4	x^2+1	12	0	-4	$\cos x$	22	1	-6	x^2+2x
3	3	2	e^{3x}	13	0	-1	x^2+x	23	0	-9	e^{3x}
4	0	-1	$\cos x$	14	1	0	x^2-1	24	1	-2	e^{2x}
5	3	0	xe^x	15	6	-7	e^{-4x}	25	-1	-2	x^2+1
6	0	-9	e^{-3x}	16	-2	1	e^x	26	-1	-30	e^{-x}
7	-1	0	e^{2x}	17	-2	-3	e^{2x}	27	0	1	$\sin x$
8	2	-3	$x+1$	18	-5	6	e^{-x}	28	0	-4	e^{2x}
9	0	-1	xe^x	19	-3	-4	e^{3x}	29	1	-2	$x+1$
10	3	-4	$\sin x$	20	0	-9	x^2	30	4	0	e^{4x}

Задача 4. Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$. На рисунках указан вид его графика на одном периоде.

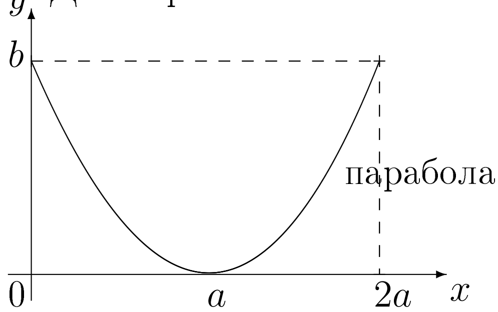
Для вариантов 1 – 5



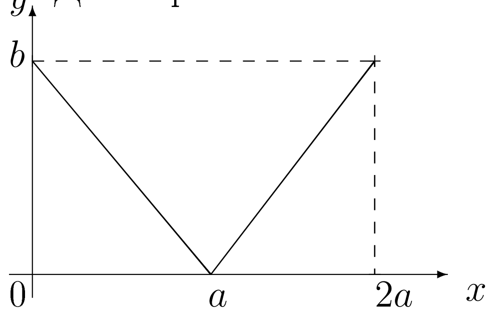
Для вариантов 6 – 10

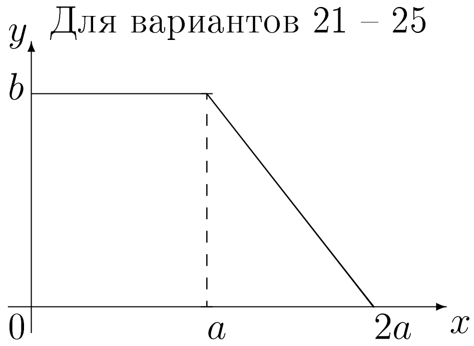


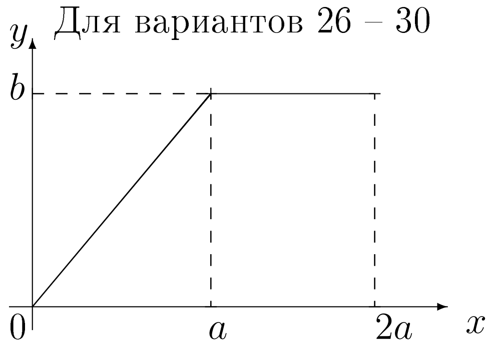
Для вариантов 11 – 15



Для вариантов 16 – 20







Выбор чисел a и b:

номера вариантов	a	b
$1, 6, 11, 16, 21, 26$	1	2
$2, 7, 12, 17, 22, 27$	1	1
$3, 8, 13, 18, 23, 28$	2	1
$4, 9, 14, 19, 24, 29$	2	2
$5, 10, 15, 20, 25, 30$	2	3

Задача 5. Операторным методом найти решение задачи Коши

$$y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = (Ax + B)e^{\gamma x},\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'.$$

Для четных вариантов $A = 1,\ B = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 1$;
для нечетных вариантов $A = 0,\ B = 1,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0$.

№	α	β	γ	№	α	β	γ	№	α	β	γ
1	2	1	−1	11	1	1	2	21	1	2	−1
2	−2	2	1	12	−2	1	1	22	1	3	−2
3	1	4	−3	13	1	4	2	23	−1	1	3
4	−1	1	−1	14	−1	2	1	24	−1	1	−2
5	−1	3	2	15	−1	3	3	25	−1	4	−2
6	2	1	−1	16	2	1	−2	26	2	1	1
7	2	2	−3	17	2	2	2	27	2	3	−1
8	1	1	1	18	1	1	−2	28	−1	1	2
9	−2	1	−1	19	−2	2	−1	29	−2	1	2
10	2	2	−1	20	−2	3	1	30	1	1	−1

Задача 6. Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy.$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ следующими методами:
а) сведением к уравнению второго порядка;
б) операторным методом.
в)* Операторным методом найти матричную экспоненту e^{At} и с помощью нее решить для этой системы задачу Коши.
г) Определить характер фазового портрета точки покоя для линейной системы. Найти собственные значения и собственные векторы, нарисовать эскиз фазового портрета.

№	a	b	c	d	x_0	y_0	№	a	b	c	d	x_0	y_0
1	1	4	1	1	1	1	2	3	2	-2	-1	1	-1
3	2	4	-1	-3	-1	1	4	3	-1	4	-2	-1	-1
5	2	5	-1	-2	1	2	6	2	5	-1	-2	-1	-2
7	3	-2	5	-3	1	-2	8	-2	2	-4	2	1	3
9	1	-1	5	-1	-1	2	10	1	2	3	-4	2	-1
11	1	2	-1	4	1	1	12	2	-2	-2	2	1	-1
13	1	-1	5	-3	-1	1	14	1	-5	2	-1	-1	-1
15	2	5	1	-2	1	2	16	3	-5	1	-3	2	1
17	2	-2	4	-2	1	-2	18	2	3	-2	-5	3	1
19	-2	-3	2	5	2	-1	20	1	1	-1	1	1	1
21	-1	1	-2	-3	1	-1	22	2	3	4	-2	-1	1
23	3	-5	5	-3	1	2	24	1	2	2	1	2	1
25	-1	1	4	-1	1	-2	26	1	-1	2	3	-1	2
27	4	5	-4	-4	1	1	28	4	3	3	-4	1	-1
29	2	3	3	2	1	3	30	2	-1	3	-2	-1	1

Задача 7*. (выполняется по усмотрению преподавателя группы)
Найти все точки покоя системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-a)(y-b) \\ \dot{y} = x^2 + cxy + y^2 + dx + ey + f. \end{cases}$$

Линеаризовать систему в окрестности той точки покоя $(x_0; y_0)$, в которой максимальна сумма $x_0 + y_0$. Определить характер фазового портрета для этой точки покоя, исследовать ее на устойчивость.

№	a	b	c	d	e	f	№	a	b	c	d	e	f
1	2	1	-2	-5	2	3	16	-2	-1	4	4	3	-2
2	1	3	2	-8	-5	3	17	-4	-3	2	5	3	-2
3	1	3	-7	-2	10	3	18	8	-3	-1	-8	7	-2
4	1	1	3	-6	-2	3	19	-5	-2	-3	7	-14	-2
5	2	-2	-2	-4	4	3	20	4	-4	-3	-5	11	-2
6	4	-2	-3	-6	8	3	21	2	2	-4	3	2	-2
7	5	-3	5	-6	-26	3	22	-4	-5	3	4	13	-2
8	2	-2	-2	-7	4	6	23	-4	-1	2	2	3	-2
9	4	-2	-1	-6	4	7	24	-7	1	6	7	41	-2
10	-4	-2	1	5	1	0	25	6	3	-3	-7	16	-2
11	-3	-2	-4	3	-13	-2	26	-9	2	4	9	35	-2
12	3	4	5	-10	-15	20	27	-2	1	-4	3	-11	-2
13	2	-1	5	2	-9	-10	28	-5	-3	5	6	22	5
14	5	-4	-1	-6	5	4	29	-2	1	-3	6	-7	6
15	-3	-3	4	7	11	10	30	-4	2	4	7	14	4

Пример решения задачи 7.

Найти все точки покоя системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-6)(y+2) \\ \dot{y} = x^2 - 8xy + y^2 - 3x + 42y - 10. \end{cases}$$

Линеаризовать систему в окрестности той точки покоя $(x_0; y_0)$, в которой максимальна сумма $x_0 + y_0$. Определить характер фазового портрета для этой точки покоя, исследовать ее на устойчивость.

Точки покоя — это те точки, где $\dot{x} = \dot{y} = 0$, поэтому решаем систему

$$\begin{cases} (x-6)(y+2) = 0; \\ x^2 - 8xy + y^2 - 3x + 42y - 10 = 0. \end{cases}$$

При $x = 6$ получаем $y = 2$ и $y = 4$, а при $y = -2$ получаем $x = 5$ и $x = -18$. Таким образом, система имеет 4 решения:

$$(6,2), (6,4), (5,-2), (-18,-2).$$

Сумма $x_0 + y_0$ максимальна в точке $(6,4)$.

Исследуем поведение решения в окрестности этой особой точки. Для этого сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = 6 + \tilde{x} \\ y = 4 + \tilde{y}. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{x}(4 + \tilde{y} + 2) \\ \dot{\tilde{y}} = (6 + \tilde{x})^2 - 8(6 + \tilde{x})(4 + \tilde{y}) + (4 + \tilde{y})^2 - 3(6 + \tilde{x}) + 42(4 + \tilde{y}) - 10. \end{cases}$$

Будем считать $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ малыми добавками и после раскрытия скобок отбросим члены вида $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}\tilde{y}$, $\tilde{y}^2$, то есть все члены выше первого порядка малости. Получим линейную однородную систему:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 6\tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} = -23\tilde{x} + 2\tilde{y}. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы системы равны 6 и 2, то есть оба вещественны и положительны. Поэтому данная особая точка представляет собой неустойчивый узел.

Задача 8* (выполняется по усмотрению преподавателя группы)

Найти свертку двух оригиналов (сигналов), изобразить геометрически полученную функцию (оригинал). Найти изображение полученного оригинала двумя способами:

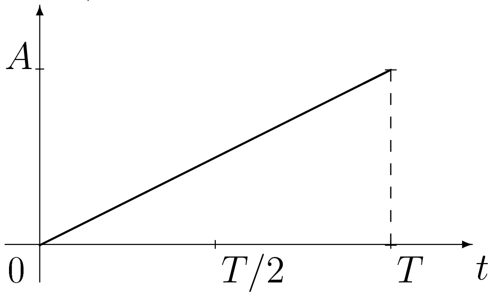
1)непосредственно, вычисляя изображение как интеграл,

2)используя теорему об изображении свертки.

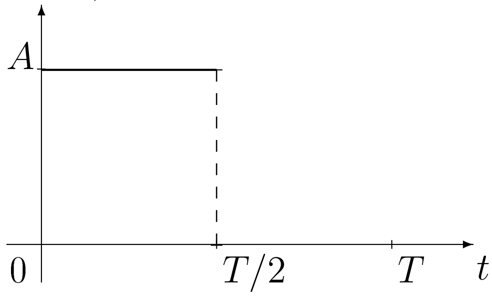
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
сигналы	*а,а*	*а,б*	*а,в*	*а,г*	*а,д*	*а,е*	*а,ж*	*б,в*	*б,г*	*б,д*
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
сигналы	*б,е*	*б,ж*	*в,в*	*в,г*	*в,д*	*в,е*	*в,ж*	*г,г*	*г,д*	*г,е*
N	21	22	23	24	25	26	27	28		
сигналы	*г,ж*	*д,д*	*д,е*	*д,ж*	*е,е*	*е,ж*	*ж,ж*	*б,б*		

Типы сигналов

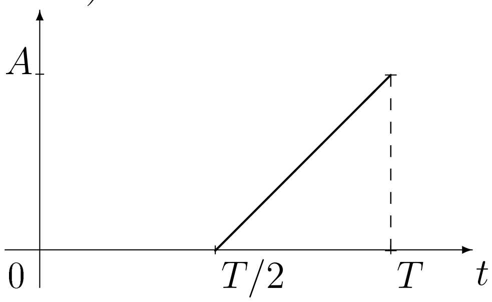
а)



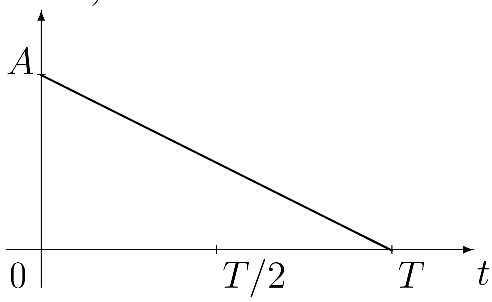
б)



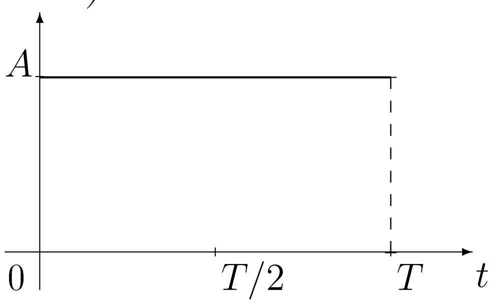
в)



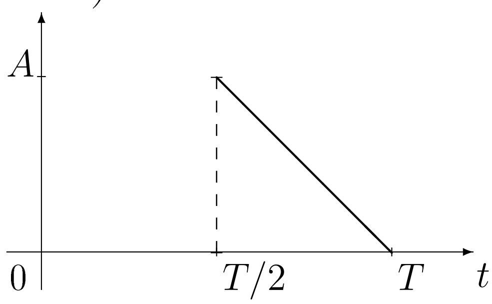
г)



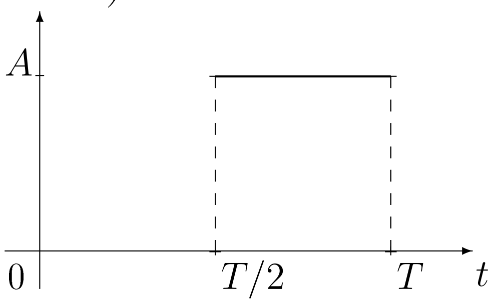
д)



е)



ж)



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. **Дифференциальное уравнение (ДУ) 1-го порядка.** Основные понятия: порядок обыкновенного ДУ, решение ДУ и интегральная кривая, задача Коши. Задача интегрирования как частный случай ДУ 1-го порядка. Физические задачи, приводящие к ДУ 1-го порядка: закон остывания тела, закон радиоактивности.

2. **Геометрический смысл ДУ 1-го порядка.** Геометрический смысл ДУ $y' = f(x, y)$. Поле направлений. Задача Коши и ее геометрический смысл. Метод изоклин. ДУ однопараметрического семейства кривых, задача об ортогональных траекториях.

3. **Методы интегрирования ДУ 1-го порядка.** ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ. Линейные ДУ и уравнения Бернулли.

4. **Метод ломаных Эйлера и метод Рунге-Кутта.** Алгоритм метода ломаных Эйлера для приближенного решения задачи Коши. Оценка погрешности. Модифицированный метод Эйлера и оценка его погрешности. Понятие о методе Рунге-Кутта.

5. **Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка.** Формулировка теоремы, ее геометрический смысл. Локальный характер теоремы (привести пример). Условие существования и единственности решения линейного ДУ 1-го порядка. Особые точки и особые решения (привести пример).

6. **Метод последовательных приближений.** Сведение задачи Коши для ДУ 1-го порядка к интегральному уравнению. Решение интегрального уравнения методом последовательных приближений (без обоснования сходимости). Теорема существования и единственности решения интегрального уравнения. Следствие для задачи Коши.

7. **ДУ высших порядков.** Обыкновенное ДУ n-го порядка, задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без док.), ее геометрический смысл для ДУ 2-го порядка. Способы понижения порядка ДУ: а) если уравнение не содержит неизвестной функции; б) если уравнение не содержит независимой переменной; в) выделение интегрируемой комбинации.

8. **Принцип суперпозиции для линейных ДУ.** Пространства непрерывных и дифференцируемых комплексных функций вещественн-

ного аргумента. Линейный дифференциальный оператор n-го порядка. Принцип суперпозиции для линейного ДУ. Существование и единственность решения задачи Коши для линейного ДУ (без док.).

9. **Определитель Вронского и его свойства.** Линейная зависимость и независимость системы функций. Понятие фундаментальной системы решений (ФСР). Критерий линейной независимости решений линейного однородного ДУ. Формула Остроградского-Лиувилля. Нахождение ФСР при одном известном решении линейного однородного ДУ 2-го порядка.

10. **Структура общего решения линейного однородного ДУ n-го порядка.** Понятие ФСР линейного однородного ДУ. Критерий фундаментальности. Теорема о структуре общего решения.

11. **Структура общего решения линейного неоднородного ДУ n-го порядка.** Теорема о структуре общего решения. Нахождение частного решения методом вариации постоянных (Лагранжа).

12. **Свойства комплексной экспоненты $e^{\lambda t}$, $\lambda = \alpha + i\beta$.** Определение комплексной экспоненты, ее модуль и аргумент. Формулы умножения и дифференцирования, формулы Эйлера. Линейная независимость системы экспонент. Нахождение общего решения линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.

13. **Построение общего решения линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами.** Случай кратных корней характеристического уравнения. Выделение вещественных решений.

14. **Решение линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами в случае, когда правая часть есть квазимногочлен.** Сведение к этому случаю ДУ с правой частью
$$f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t).$$

15. **Свойства оригиналов.** Определение оригинала, его показатель роста. Умножение и сложение оригиналов. Примеры (комплексная экспонента, единичный оригинал, периодические оригиналы).

16. **Оригиналы и изображения.** Понятие интеграла от комплексной функции вещественного аргумента, его основные свойства. Изображение оригинала. Теорема существования изображения, его поведение на бесконечности. Изображение экспоненты и единичного оригинала.

17. **Свойства преобразования Лапласа.** Линейность, дифференцирование изображения; формулы смещения, запаздывания, подобия;

дифференцирование оригинала, изображение периодического оригинала. Таблица оригиналов и их изображений.

18. **Операторный метод.** Обращение преобразования Лапласа в случае правильной рациональной дроби. Общая схема операторного метода для решения ДУ и систем ДУ. Понятие об операторном методе расчета электрических цепей. Закон Ома в операторной форме. Формулы расчета электрических сопротивлений.

19. **Теорема о свертке и формула Дюамеля.** Определение свертки, ее свойства (коммутативность, ассоциативность). Теорема о свертке (дать вывод формулы). Формула Дюамеля и ее применение при решении линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами.

20. **Линейные системы ДУ.** Матричная функция вещественного аргумента, ее дифференцирование. Вектор-функция. Векторно-матричная запись линейной системы ДУ. Задача Коши, теорема существования и единственности.

21. **Структура общего решения линейной системы ДУ.** Линейная зависимость и независимость вектор-функций. ФСР линейной однородной системы ДУ. Критерий фундаментальности (без доказательства). Теоремы о структуре общего решения линейной однородной и неоднородной системы ДУ.

22. **Методы решения линейных систем ДУ с постоянными коэффициентами.** Метод сведения к ДУ n-го порядка (на примере систем 2-го порядка). Метод построения ФСР с помощью собственных векторов матрицы системы. Операторный метод (привести пример).

23. **Матричная экспонента.** Определение матричной экспоненты. Теорема о столбцах матричной экспоненты. Запись общего решения и решения задачи Коши для линейной однородной системы ДУ с помощью матричной экспоненты. Ее нахождение операторным методом.

24. **Классификация стационарных точек однородной системы двух линейных ДУ с постоянными коэффициентами.** Случай вещественных различных корней характеристического уравнения. Случай кратного корня. Случай комплексных корней.

25. **Символический метод решения линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами.** Случай, когда правая часть $f(t) = e^{\lambda t}$ или $f(t) = P_m(t)e^{\lambda t}$, $\lambda = \alpha + i\beta$. Сведение к этому

случаю ДУ с правой частью
$f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$.

Вопросы к экзамену могут быть уточнены и дополнены лектором.