

**Контрольные задания по теоретической механике  
для студентов заочной формы обучения**

## 1. Статика

1 Ст2-1 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q (кН/м)	M (кН*м)
2	3	4	0	0	10	6	2	3

1 Ст2-2 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q (кН/м)	M (кН*м)
2	3	4	0	30	10	6	2	1

1 Ст2-3 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
3	3	4	60	30	10	6	2	1

1 Ст2-4 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
2	3	4	45	0	10	6	2	1

1 Ст2-5 FFP

1. Найти опорные реакции в А и В и реакции в скользящей заделке С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
2	3	4	45	0	10	6	2	1

1 Ст2-6 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в D и С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
4	3	3	30	0	10	6	2	4

1 Ст2-7 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в D и С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
3	3	2	90	0	40	20	3	15

1 Ст2-8 FFP

1. Найти опорные реакции в опоре А и реакции в шарнирах В,С, D.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
2	3	4	90	30	10	6	2	50

1 Ст2-9 FFP

1. Найти опорные реакции в опорах А и В и реакции в шарнире С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q(кН/м)	M(кН*м)
6	3	4	30	0	10	6	2	50

1 Ст2-10 FFP

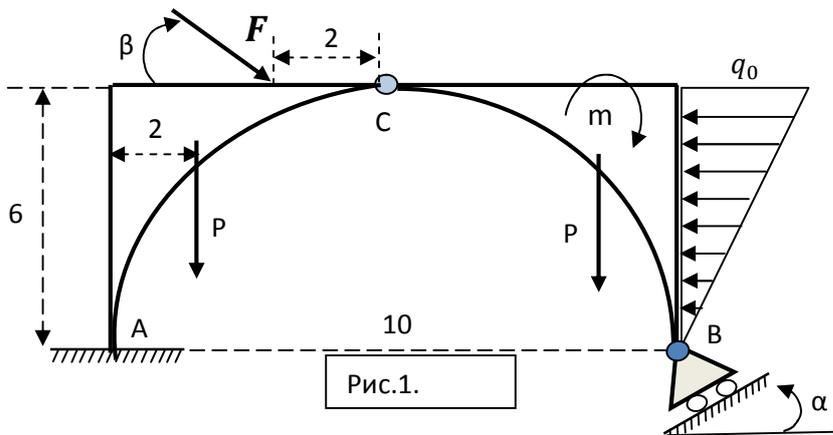
1. Найти реакции в опорах А, В и реакции в скользящей заделке С.

a (м)	b(м)	d(м)	$\alpha$	$\beta$	P (кН)	F (кН)	q (кН/м)	M (кН*м)
3	2	3	30	-30	10	12	2	3

Определить опорные реакции и реакции в соединении.  
Для решения задачи необходимо прочитать главу 2 курса лекций.

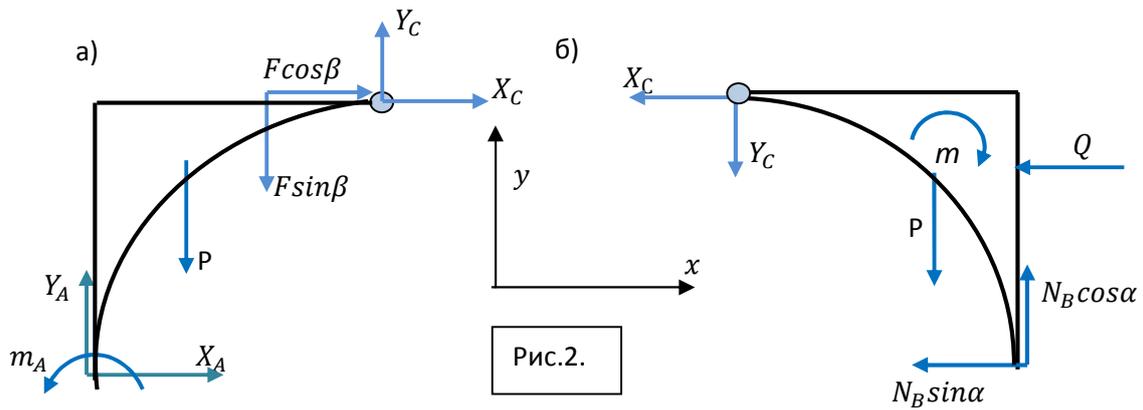
### Пример задания по статике.

Мост состоит из двух частей, соединенных шарниром С (Рис.1). Левая опора моста – жесткая заделка (консольная опора), правая опора – подвижный шарнир (каток). Вес каждой части моста  $P$ , нагрузка и размеры показаны на рисунке. Определить реакции в опорах и в соединении С.



В заделке А три неизвестных – две составляющих силы  $X_A, Y_A$  и момент  $m_A$ , в катке В неизвестная по величине сила  $N_B$ , направленная перпендикулярно к наклонной плоскости.

Для всего моста, как и для любого тела, можно написать три уравнения равновесия, из которых найти четыре неизвестных невозможно, то есть, на первый взгляд, система статически неопределима. Решить эту, как, впрочем, и любую другую учебную задачу, помогает наличие в конструкции «слабого» соединения, при разделении по которому действие одной части конструкции на другую описывается в плоском случае менее чем тремя реакциями. В данном случае при разделении по шарниру С получаем два тела (рис.2а, 2б), для которых можем написать *шесть* уравнений равновесия с *шестью* неизвестными  $X_A, Y_A, m_A, N_B, X_C, Y_C$ .



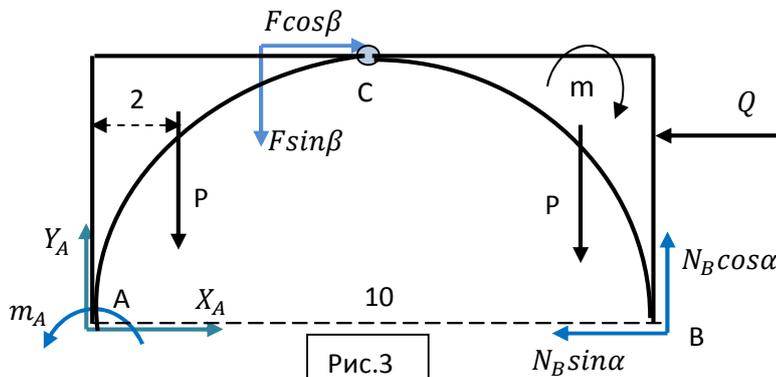
Для удобства заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой  $Q$ , разложим силу  $\underline{F}$  на составляющие, параллельные осям координат и выпишем уравнения равновесия для двух тел, объединив их в систему:

$$\begin{cases} F_x^{ext} = X_A + X_C + F \cos \beta = 0, \\ F_y^{ext} = Y_A + Y_C - F \sin \beta - P = 0, \\ M_{AZ}^{ext} = m_A - X_C \cdot 6 + Y_C \cdot 5 - P \cdot 2 - F \sin \beta \cdot 3 - F \cos \beta \cdot 6 = 0, \\ F_x^{ext} = -X_C - Q - N_B \sin \alpha = 0, \\ F_y^{ext} = -Y_C + N_B \cos \alpha - P = 0, \\ M_{CZ}^{ext} = N_B \cos \alpha \cdot 5 - N_B \sin \alpha \cdot 6 - Q \cdot 2 - P \cdot 3 - m = 0. \end{cases}$$

Опорные точки при вычислении моментов следует выбирать таким образом, чтобы, во-первых, уравнение содержало меньшее число неизвестных, и, во-вторых, легко было бы находить плечи сил. В данном примере для тела б) в качестве опорной точки взята точка С, что позволяет из последнего уравнения найти  $N_B$ , а все прочие неизвестные определяются последовательно из оставшихся уравнений.

После определения всех неизвестных следует сделать проверку, которая заключается в проверке равновесия всей конструкции: главный вектор и момент (относительно произвольной опорной точки) должны быть равны нулю (рис.3):

$$\begin{cases} F_x^{ext} = X_A + F \cos \beta - Q - N_B \sin \alpha (= 0), \\ F_y^{ext} = Y_A + N_B \cos \alpha - 2P - F \sin \beta (= 0) \\ M_{CZ}^{ext} = N_B \cos \alpha \cdot 5 - N_B \sin \alpha \cdot 6 - Q \cdot 2 - m + F \sin \beta \cdot 2 + X_A \cdot 6 - Y_A \cdot 5 + m_A (= 0) \end{cases}$$

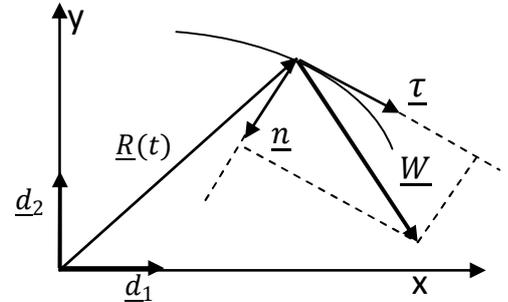


## 2. Кинематика точки.

Уравнения движения точки имеют вид  $\begin{cases} x = x_k(t) \\ y = y_k(t) \end{cases}$ , где индекс  $k$  – номер варианта.

В момент времени  $t$  найти векторы скорости  $\underline{V}$ , ускорения  $\underline{W}$ , касательную (тангенциальную)  $W_\tau$  и нормальную  $W_n$  составляющие ускорения, радиус кривизны траектории  $\rho$ .

Вариант	$x(t)$	$y(t)$	Момент $t$
1	$t^2 - 1$	$2t$	1
2	$t \sin \frac{\pi}{2} t$	$t \cos \frac{\pi}{2} t$	1
3	$2 \sin \frac{\pi}{2} t + 3$	$\cos \frac{\pi}{2} t - 4$	2
4	$t - t^2 + 1$	$2t - 2t^2 - 3$	1
5	$1 - \frac{t^3}{3}$	$-\frac{t^2}{2} - 3$	2
6	$t^2 + 1$	$\frac{2}{3}t^3 - 4$	$\frac{1}{2}$
7	$2 - 4t$	$\frac{t^2}{2} - 3$	1
8	$6 \cos \left(\frac{\pi}{3} t\right) - 2$	$-3 \sin \left(\frac{\pi}{3} t\right)$	3
9	$t$	$2(1 - \cos \frac{t}{2})$	$2\pi$
10	$\frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$	$t$	$\frac{\pi}{2}$



Для осознанного выполнения задания следует прочитать главу 3 «Курса лекций по механике»

**Вся кинематика точки заключена в двух определениях:**

$$\underline{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\underline{R}}{dt} = \dot{\underline{R}}, \quad \underline{W} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\underline{V}}{dt} = \dot{\underline{V}},$$

где  $\underline{V}$  и  $\underline{W}$  – векторы скорости и ускорения, а  $\underline{R}$  – вектор положения точки в системе отсчета.

Если используется система координат с неподвижными базисными векторами (как декартова система в этой задаче), то дифференцируются только координаты. Последовательно находим вектор скорости  $\underline{V} = \dot{x}\underline{d}_1 + \dot{y}\underline{d}_2$  и модуль скорости  $V = |\underline{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ,

вектор ускорения и его модуль  $\underline{W} = \ddot{x}\underline{d}_1 + \ddot{y}\underline{d}_2$ ,  $W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ .

Касательное ускорение – проекция  $\underline{W}$  на направление касательной:  $W_\tau = \underline{W} \cdot \underline{\tau}$ , где единичный орт касательной  $\underline{\tau}$  (с точностью до знака) может быть найден как отношение вектора скорости к его величине:  $\underline{\tau} = \frac{\underline{V}}{V}$ . Таким образом,  $W_\tau = \frac{\underline{W} \cdot \underline{V}}{V} = \frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}}{V}$ . Другой способ – касательное ускорение вычисляется как производная по времени от величины скорости:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt}. \quad \text{Нормальное ускорение } W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}, \quad \text{радиус кривизны } \rho = \frac{V^2}{W_n}.$$

### 3. Кинематика плоского движения.

Для заданного положения кривошипно-шатунного механизма вычислить угловую скорость  $\omega_2$  шатуна  $AB$ , угловую скорость колеса  $\omega_3$  и скорость точки  $D$ .

		КПД-1						
		Массив исходных данных						
№Вар	OA	AB	h	R	Fi	OmegaFi	EpsFi	
1	1	3	0	1	30	1	2	
2	2	4	1	1	45	2	4	
3	3	5	-1	1	60	3	5	
4	4	6	-2	1	90	4	8	
5	2	5	1	1	120	5	-2	
6	3	4	0	1	135	-1	0	
7	2	3	1	1	180	1	1	
8	2	4	1	1	-30	-2	2	
9	3	6	0	1	90	6	3	
10	2	5	2	1	-45	3	4	

1	КинПД	FFP					
OA	AB	h	R	Fi	OmegaFi	EpsFi	
1	5	0	2	30	1	1	
φ							

Для выполнения этого задания необходимо прочитать параграф 4.1 главы 4 «Кинематика плоского движения».

Вся кинематика твердого тела сводится к **основной формуле кинематики твердого тела**

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB} = \underline{V}_A + \underline{V}_{BA}^{BP}$$

где  $\underline{V}_{BA}^{BP}$  – вращательная скорость точки  $B$  вокруг точки  $A$ , перпендикулярная к  $\underline{AB}$ .

Дифференцированием из нее получается формула для ускорений

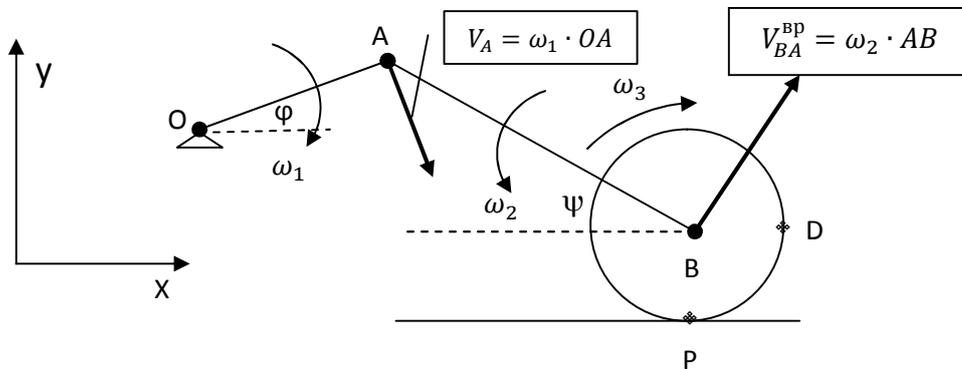
$$\underline{W}_B = \underline{W}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}) = \underline{W}_B + \underline{W}_{BA}^{BP} + \underline{W}_{BA}^{OC}, \text{ где}$$

$$\underline{W}_{BA}^{BP} = \underline{\varepsilon} \times \underline{AB}, \quad \underline{W}_{BA}^{OC} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}).$$

При плоском движении векторы угловой скорости  $\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}$  и углового ускорения  $\underline{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \underline{k}$  перпендикулярны плоскости движения. Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\underline{W}_{BA}^{OC} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AB}) = \underline{\omega}(\underline{\omega} \cdot \underline{AB}) - \underline{AB} \omega^2 = -\underline{AB} \omega^2, \text{ так как } \underline{\omega} \perp \underline{AB}.$$

При решении учебных задач для плоского движения так называемым графоаналитическим способом, когда вычисляются величины векторов и они изображаются на рисунке, удобно изображать угловую скорость в виде круговой стрелки, показывающей известное либо предполагаемое направление вращения тела.



Скорость точки A  $\underline{V}_A = \underline{V}_O + \underline{\omega}_1 \times \underline{OA} = \underline{\omega}_1 \times \underline{OA}$ , ее величина  $V_A = \omega_1 \cdot OA$ .

Угловую скорость шатуна  $\omega_2$  и скорость точки B найдем, спроецировав векторную формулу

$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega}_2 \times \underline{AB}$  на оси X и Y, учитывая при этом, что  $V_{By} = 0$ .

$$\begin{cases} V_{By} = 0 = \dots & \text{(самостоятельно!)} \\ V_{Bx} = \dots & \dots \end{cases}$$

Необходимые для проецирования значения  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$  легко определяются из рисунка

$$\sin \psi = \frac{h + OA \cdot \sin \varphi}{AB}, \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}.$$

Угловую скорость колеса найдем с помощью все той же формулы, выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей колеса:  $\underline{V}_B = \underline{V}_P + \underline{\omega}_3 \times \underline{PB} = 0 + \underline{\omega}_3 \times \underline{PB}$ .

Скорость точки D:  $\underline{V}_D = \underline{V}_P + \underline{\omega}_3 \times \underline{PD} = 0 + \underline{\omega}_3 \times \underline{PD}$ .

## 4. Фундаментальные законы механики.

Следует прочитать параграфы 5.1, 5.1.2, 5.2, 5.2.8, 5.3 и 7.1.2 курса лекций.

Уравнения первого и второго фундаментальных законов полностью описывают трансляционное (поступательное) и вращательное движения любого, в том числе и твердого тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q} = \underline{F}^{ext} - \text{первый ФЗМ,} \\ \dot{K}_A = \underline{M}_A^{ext} - \text{второй ФЗМ.} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

Из этих законов следует теорема об изменении кинетической энергии (частный случай третьего фундаментального закона)

$$\dot{T} = N^{ext} + N^{int},$$

использование которой позволяет быстрее получать решение задачи о движении системы.

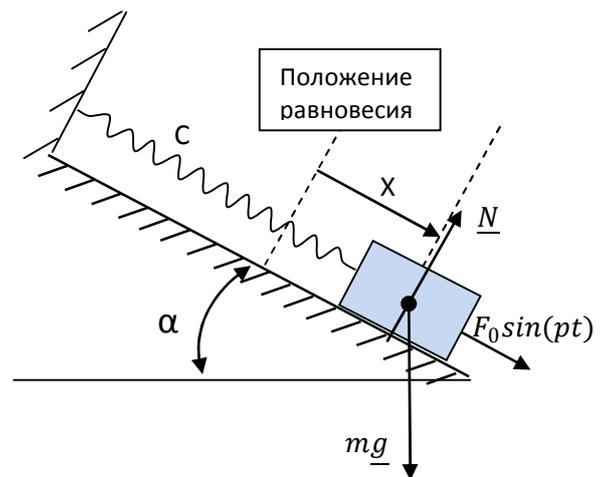
### 4.1. Динамика точки

Тело массой  $m$ , прикрепленное пружиной к неподвижной точке, движется по гладкой плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, под действием возмущающей силы  $F = F_0 \sin(pt)$ .

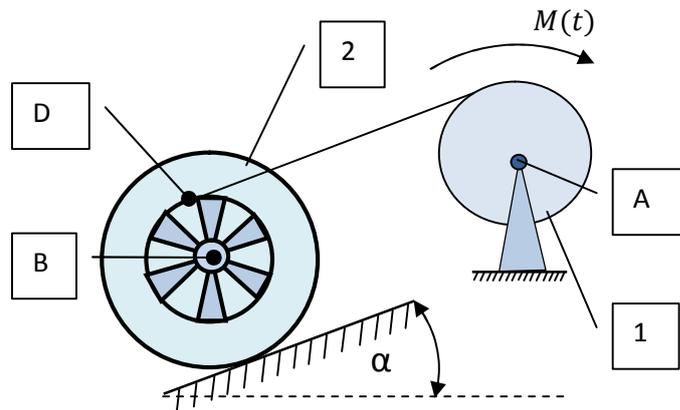
В начальный момент тело находилось в покое в положении равновесия. Найти

- 1) Частоту и период свободных колебаний
- 2) Уравнения движения тела

FFP	$C, \frac{\text{Н}}{\text{см}}$	$m, \text{ кг}$	$\alpha, \text{ Град}$	$F_0, \text{ н}$	$p, \frac{1}{\text{с}}$
1	5,12	2	30	12	10
2	50	2	45	30	8
3	180	45	90	6	30
4	12	3	90	1,5	21
5	0,196	0,1	60	3	18
6	0,392	0,8	30	4	8
7	2	2	0	2	11
8	0,75	3	30	4	6
9	12	3	0	5	16
10	4,5	2	45	0,5	17



## 4.2. Динамика плоского движения



№ вар	$m_1$	$m_2$	$R_1$	$R_2$	$r_2$	$\rho_2$	$\alpha$	$M(t)$
1	3,0	4,0	0,10	0,35	0,25	0,30	30	$1 - 0,2 t^2$
2	2,5	5,0	0,20	0,40	0,30	0,35	30	$1 + 0,1 t^2$
3	4,0	4,0	0,30	0,30	0,20	0,25	30	$3 - 0,2 t$
4	5,0	6,0	0,30	0,35	0,20	0,30	45	$4 + 0,2 t^2$
5	6,0	7,0	0,20	0,30	0,20	0,25	30	$5 - 0,25 t^2$
6	4,0	6,0	0,15	0,40	0,25	0,30	45	$4 - 0,25 t^2$
7	2,0	5,0	0,25	0,40	0,20	0,25	30	$3 + t^2$
8	1,0	2,0	0,15	0,50	0,20	0,40	30	$1 + 2 t^2$
9	6,0	8,0	0,30	0,50	0,25	0,30	30	$5 + 0,1 t^2$
10	3,0	10,0	0,15	0,40	0,20	0,35	30	$2 + 2 t^2$

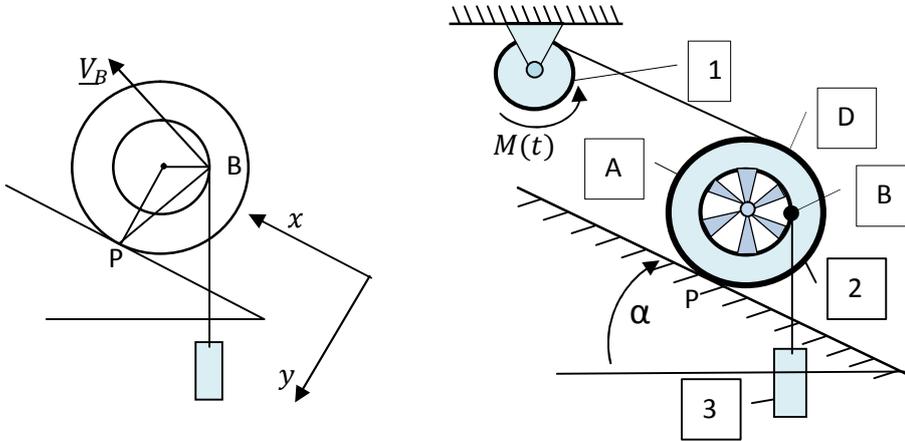
К барабану лебедки (1) приложен момент  $M(t)$ . Второй конец троса намотан на внутренний барабан колеса (2), которое катится без проскальзывания по наклонной плоскости. Барабан лебедки - однородный цилиндр; радиус инерции колеса  $\rho_2$ , то есть момент инерции  $I_2 = m_2 \cdot \rho_2^2$ . Определить закон вращения лебедки  $\varphi_1(t)$ . В начальный момент система была в покое. Задачу решить двумя способами:

А) С помощью фундаментальных законов (1) и (2)

В) С помощью теоремы об изменении кинетической энергии (3).

### Пример применения теоремы об изменении кинетической энергии.

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме  $\dot{T} = N^{ext} + N^{int}$  составить дифференциальное уравнение, описывающее движение системы. При заданных  $M(t)$  и начальных условиях найти это движение.



За обобщенную координату примем угол поворота первого тела  $\phi_1$ . Сообщим системе обобщенную скорость  $\dot{\phi}_1$  и вычислим кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_A^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2.$$

Кинематические соотношения имеют вид:

$$\dot{\phi}_2 = \frac{V_D}{PD} = \frac{\dot{\phi}_1 \cdot R_1}{2R_2}, V_A = \dot{\phi}_2 \cdot R_2 = \frac{\dot{\phi}_1 \cdot R_1}{2}, V_3 = V_B = \dot{\phi}_2 \cdot b,$$

где обозначено  $b \equiv PB = \sqrt{R_2^2 + r_2^2 - 2R_2 r_2 \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})}$ .

Кинетическая энергия записывается в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{\phi}_1^2 \left( I_1 + m_2 \frac{R_1^2}{4} + I_2 \frac{R_1^2}{4R_2^2} + m_3 b^2 \frac{R_1^2}{4R_2^2} \right) \equiv \frac{1}{2} a \dot{\phi}_1^2.$$

Мощность внутренних воздействий равна нулю, так как нити нерастяжимы, мощность внешних

$$N^{ext} \triangleq \underline{M} \cdot (\dot{\phi}_1 \underline{k}) + m_2 \underline{g} \cdot \underline{V}_A + m_3 \underline{g} \cdot \underline{V}_B,$$

или, с учетом  $\underline{g} = g(-\sin \alpha \underline{i} + \cos \alpha \underline{j})$ ,  $\underline{V}_A = \frac{\dot{\phi}_1 R_1}{2} \underline{i}$ ,

$$\underline{V}_B = (\dot{\phi}_2 \underline{k}) \times \underline{PB} = (\dot{\phi}_2 \underline{k}) \times (-r_2 \cos \alpha \underline{i} - (R_2 + r_2 \sin \alpha) \underline{j}) = \dot{\phi}_2 ((R_2 + r_2 \sin \alpha) \underline{i} - r_2 \cos \alpha \underline{j}),$$

$$N = \dot{\phi}_1 (M(t) - m_2 g \sin \alpha \frac{R_1}{2} - m_3 g \frac{R_1}{2R_2} (R_2 \sin \alpha + r_2)) \equiv Q_\phi \dot{\phi}_1,$$

где коэффициент  $Q_\phi$  при скорости в выражении мощности называют обобщенной силой.

Записывая теорему в дифференциальной форме, получим  $(a\ddot{\phi}_1 - Q_\phi) \dot{\phi}_1 = 0$ , и, поскольку теорема справедлива для любых движений,

$$a\ddot{\phi}_1 = Q_\phi.$$

В случае, когда приведенный инерционный коэффициент  $a = const$  (как в данном случае), интегрирование уравнения не вызывает трудностей.