Министерство путей сообщения Российской Федерации

# Дальневосточный государственный

# университет путей сообщения

|  |
| --- |
| Кафедра: «Бухгалтерский учет и аудит»  Л.Н. Корзова |

**ЭКОНОМЕТРИКА**

Методическое пособие на выполнение контрольной работы

для студентов экономических специальностей ИИФО

Хабаровск

Издательство ДВГУПС

2002

УДК

ББК

К

*Рецензент:*

Кандидат экономических наук, доцент кафедры

«Бухгалтерский учет и аудит»

Дальневосточного государственного университета путей сообщения

К.И. Алексеева

**Корзова Л.Н.**

**К…** Эконометрика. Методическое пособие на выполнение контрольной работы для студентов экономических специальностей ИИФО. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2002. - c.

Методическое пособие соответствуют государственному стандарту дисциплины «Эконометрика» для всех экономических специальностей ИИФО.

Рассмотрены вопросы построения модели линейных и нелинейных регрессий, качественного исследования их, определения прогнозных значений и доверительных интервалов результативных признаков. Рассмотрена проблема идентификации систем эконометрических уравнений и методы нахождения оценок структурных коэффициентов модели. Исследованы вопросы анализа временных рядов и способы устранения тенденций ряда. Главное внимание уделено качественному анализу моделей и использование их для прогнозирования.

Предназначено для студентов 2,3,4 курсов, экономических специальностей ИИФО.

УДК…

ББК…

© Издательство Дальневосточного государственного

университета путей сообщения (ДВГУПС), 2002

Введение

Эконометрика одна из базовых дисциплин экономического образования во всем мире.

Общепринятое определение «эконометрика» пока отсутствует, но есть высказывания признанных авторитетов в экономике и эконометрике.

«Основная задача эконометрики – наполнить эмпирическим содержанием априорных экономических рассуждений» (Л. Клейн – лауреат Нобелевской премии 1980 года по экономике (эконометрике)).

«Эконометрика не является синонимом приложения математики к экономике. Как показывает опыт, каждая из отправных точек – статистика, экономическая теория и математика – необходимое, но не достаточное условие для понимания количественных соотношений в современной экономической жизни. Это – единство всех трех составляющих. И это единство образует эконометрику» (Р. Фриш – лауреат Нобелевской премии 1969 года по экономике (эконометрике)).

Данная наука возникла на стыке 3–х дисциплин экономической теории, методов математического анализа и математической статистики. Основными дисциплинами, использующими математические методы применительно к экономике являются:

- многомерный статистический анализ;

- финансовая математика;

- математические модели в экономике;

- и математические методы в экономике.

Эконометрика содержит два больших раздела: моделирование данных, неупорядоченных во времени и теорию временных рядов.

Методические указания предназначены для студентов всех курсов по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика».

В ходе изучения курса «Эконометрика» студент должен выполнить одну контрольную работу, содержащую четыре задачи, номера которых выбираются из четырех таблиц по последней цифре шифра зачетной книжки студента.

Тематический план курса и методические указания к выполнению контрольной работы

Глава 1. Парная регрессия и корреляция

Парная регрессия представляет регрессию между двумя переменными y и x, то есть модель вида:

y= (x),

где y- результативный признак,

х – объясняющая переменная.

Практически в каждом отдельном случае:

yj=, j=,

где yj –фактическое значение результативного признака;

- теоретическое значение результативного признака, найденное по построенному уравнению регрессии;

- случайная величина, определяющая отклонения реального значения () от теоретического (), включающая влияние не учтенных в модели факторов, случайных ошибок и ошибок измерения.

* 1. Линейная регрессия и корреляция. Оценка параметров

Основные гипотезы:

1. y=a+bx+- спецификация модели
2. М= 0 (М- математическое ожидание)

М(2) = , не зависит от j, (- дисперсия).

1. М ()=0, если i ≠ s, т.е. ошибки не коррелированы для разных наблюдений.
2. - есть случайная величина, нормально распределенная с параметрами (0,2) , ~N (0,2)

Линейная регрессия сводится к нахождению ее параметров a и b, что можно осуществить различными методами. Одним из широко употребляемых методов является метод наименьших квадратов (МНК).

Суть метода состоит в выполнении условия:

S=

Для определения a и b строится система нормальных уравнений:

 или 



где  ; ; ;  - средние значения соответствующих величин.

Из системы нормальных уравнений:

, 

b – параметр модели. Его величина показывает среднее изменение результативного признака с изменением объясняющий переменной на единицу.

Уравнение регрессии необходимо дополнить показателем тесноты связи, в качестве его выступает коэффициент корреляции rxy.

, обладающий свойством: -1≤ rxy ≤1, причем,

если b>0, то 0≤ rxy ≤1,

если b<0, то -1≤ rxy ≤0.

Близость rxy к нулю означает отсутствие линейной связи между признаками, но возможна и другая спецификация модели.

Величина r2xy называется коэффициентом детерминации, характеризующим долю дисперсии признака у, объясненную регрессией, в общий дисперсии признака y.

Для проверки гипотезы Н0 : b=0 (отсутствие линейной связи между признаками) используют F-статистику (F-распределение).

F-статистика для этой гипотезы имеет вид:

Fрасч.=,

где n – объем совокупности или

Fрасч.=,

где  и  - дисперсии на одну степень свободы.

Fрасч. сравнивают с Fтабл., значение Fтабл. находят в таблице (см. приложение 1) по параметрам:  где - уровень значимости, обычно выбирают 0,05 или 0,01,

 - число степеней свободы дисперсии

Dфакт.=, (=1);

 - число степеней свободы дисперсии

Dост.=, (=n-2);

Гипотеза H0 отвергается и принимается альтернативная, если Fрасч.> Fтабл.

Для оценки не только уравнения в целом, но и его параметров используют t- статистику (t- критерий) Стьюдента.

Для этого рассчитывают стандартные ошибки ma, mb, mr, mx

ma=;

mb,= ;

mr = 

С помощью стандартных ошибок находят расчетные значение t-критерия.

ta= , tb= , tr= 

Далее сравнивают их с табличным значением t-статистики (см. приложение 2).

t (α,ν)= t(α=0,01 или 0,05 ; ν=n-2), если tрасч.> tтабл. Гипотеза Н0 о несущественности коэффициентов отвергается, принимается альтернативная.

Если гипотезы о существенности уравнения регрессии в целом и его параметров в частности принимаются, уравнение можно использовать как для точечного прогноза, так и для интервальной оценки прогнозного значения. Для этого рассчитывается стандартная ошибка mx,

где ,

доверительный интервал прогноза: ,

где tтабл.= t(α=0,01(0,05)), ν= n-2)

Замечание.

Условие независимости дисперсии ошибки от номера наблюдения называется гомоскедастичностью. Случай, когда это условие не выполняется, называется гетероскедаксичностью. В последнем случае используют обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК).

, ,

ki – коэффициенты, характер которых зависит от выдвинутых гипотез.

* 1. Нелинейная регрессия и корреляция для нелинейной регрессии

Нелинейные связи между признаками выражаются с помощью соответствующих функций, например:

,





и другие регрессии, линейные по параметрам;

, 

и другие регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам. Для полиномиальных регрессий можно непосредственно использовать МНК, для некоторых других нелинейных регрессий возможна их предварительная линеаризация, например, , обозначив  получим ,  обозначив ln y=z, ln a=a\*, ln, получим z=a\*+bx+\*

Уравнение нелинейной регрессии оценивается с помощью индекса корреляции R:

, 0≤R≤1

Для оценки качества моделей определяется средняя ошибка аппроксимации: , допустимые значения которой 8-10 %.

#### При анализе построенной и оцененной модели используется средний показатель эластичности: , показывающий на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%.

## Пример 1

# Таблица 1.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 |
| Выручка от реализации (млн. у.е.) | 14 | 15 | 17 | 20 | 24 | 30 | 48 | 49 | 59 | 67 |

В таблице 1.1 приведены данные о годовой выручке (y) от реализации продукции за десятилетний период.

Требуется:

1. Для определения вида зависимости рассчитать параметры a и b функций:

а) y=a+bx+ε,

б) y=aebxε.

2. Оценить тесноту связи и значимости параметров управления, используя F-распределение (Фишера) и t-критерий (Стьюдента), выбрав уровень значимости α=0,01.

3. Рассчитать среднюю ошибку аппроксимации.

4. Выполнить прогноз выручки от продаж при прогнозном значении признака x, составляющим 102% от среднего уровня при условии, что ошибка аппроксимации не превысит 8-10%.

5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.

6. Сделать выводы по результатам расчетов.

Присвоим каждому году x соответствующий код 1, 2, …, 10.

Составим таблицу расчетов 1.2.

# Таблица 1.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x2 | y | xy | y2 |  |  |  |  |  |  |  | A (%) |
|  | 1 | 1 | 14 | 14 | 196 | -20,3 | -4,5 | 412,09 | 20,25 | 6,073 | 7,927 | 62,8373 | 56,62 |
|  | 2 | 4 | 15 | 30 | 225 | -19,3 | -3,5 | 372,49 | 12,25 | 12,346 | 2,054 | 7,0437 | 17,69 |
|  | 3 | 9 | 17 | 51 | 289 | -17,3 | -2,5 | 299,29 | 6,25 | 18,619 | -1,619 | 2,6212 | 9,52 |
|  | 4 | 16 | 20 | 80 | 400 | -14,3 | -1,5 | 204,49 | 2,25 | 24,892 | -4,892 | 23,9317 | 24,46 |
|  | 5 | 25 | 24 | 120 | 576 | -10,3 | -0,5 | 106,09 | 0,25 | 31,165 | -7,165 | 51,3372 | 29,85 |
|  | 6 | 36 | 30 | 180 | 900 | -4,3 | 0,5 | 18,49 | 0,25 | 37,438 | -7,438 | 55,3223 | 24,79 |
|  | 7 | 49 | 48 | 336 | 2304 | 13,7 | 1,5 | 187,69 | 2,25 | 43,710 | 4,290 | 18,4041 | 8,93 |
|  | 8 | 64 | 49 | 392 | 2401 | 14,7 | 2,5 | 216,09 | 6,25 | 49,984 | -0,984 | 0,9682 | 2,00 |
|  | 9 | 81 | 59 | 531 | 3481 | 24,7 | 3,5 | 610,09 | 12,25 | 56,257 | 2,743 | 7,5240 | 4,65 |
|  | 10 | 100 | 67 | 670 | 4489 | 32,7 | 4,5 | 1069,29 | 20,25 | 62,530 | 4,470 | 119,9809 | 6,67 |
| Σ | 55 | 385 | 343 | 2404 | 15261 | 0 | 0 | 34,96,1 | 82,50 |  | 0,014 | 249,9706 | 185,18 |
| Среднее значение |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 24,9971 | 18,518 |
| σ | 2,872 |  | 18,698 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| σ2 | 8,250 |  | 349,610 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Все расчеты велись по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
| ; ; |  |



1а) Линейное уравнение регрессии имеет вид: 

Рассчитаем линейный коэффициент парной корреляции:



т.к. значение коэффициента корреляции близко к единице, связь между признаками y и x тесная.

2. Рассчитаем значение F-критерия Фишера.

, где

m – число параметров уравнения регрессии (число коэффициентов при объясняющей переменной x);

n – объем совокупности.



По таблице приложения находим



т.к. Fфакт.>Fтабл., то гипотеза H0 о статистической незначимости параметра b в уравнении регрессии отклоняется.

Т.к. , это означает, что 92,7% результата объясняется вариациями объясняющей переменной.

Средняя ошибка аппроксимаций  вышла за допустимые пределы (8-10%), что говорит о неудачном выборе модели регрессии.

Выберем в качестве модели уравнение регрессии уравнение 1б) (y=aebxε), предварительно линеаризировав модель. Для этого прологарифмируем обе части уравнения.

lny=lna+bx+lnε,

Введем обозначения

Z=lny, a\*=lna, ε\*=lnε,

Получим линейное уравнение парной регрессии

Z= a\*+bx+ ε\*.

Все промежуточные расчеты поместим в таблицу 1.3.

# Таблица 1.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | Z=lny | xZ | Z2 |  |  |  |  |  |  |  |  | Ai |
|  | 1 | 2,6381 | 2,6381 | 6,9596 | -0,7410 | 0,5491 | 2,5106 | 12,2432 | 0,1275 | 0,0162 | 1,7568 | 3,0863 | 4,83 |
|  | 2 | 2,7071 | 5,4142 | 7,3284 | -0,6720 | 0,4515 | 2,7036 | 14,6509 | 0,0035 | 0,0000 | 0,3491 | 0,1219 | 0,13 |
|  | 3 | 2,8322 | 8,4966 | 8,0214 | -0,5469 | 0,2991 | 2,8966 | 18,0832 | -0,0644 | 0,0041 | -1,0832 | 1,1733 | 2,27 |
|  | 4 | 2,9947 | 11,9788 | 8,9682 | -0,3844 | 0,1478 | 3,0896 | 21,8700 | -0,0949 | 0,0090 | -1,8700 | 3,4969 | 3,17 |
|  | 5 | 3,1771 | 15,8855 | 10,0939 | -0,2020 | 0,0408 | 3,2826 | 26,4465 | -0,1055 | 0,0111 | -2,4465 | 5,9854 | 3,32 |
|  | 6 | 3,4002 | 20,4012 | 11,5614 | 0,0211 | 0,0004 | 3,4756 | 31,9748 | -0,0754 | 0,0057 | -1,9748 | 3,8998 | 2,22 |
|  | 7 | 3,8702 | 27,0914 | 14,9784 | 0,4911 | 0,2412 | 3,6686 | 391574 | 0,2016 | 0,0406 | 8,8426 | 78,1916 | 5,21 |
|  | 8 | 3,8908 | 31,1264 | 15,1382 | 0,5117 | 0,2618 | 3,8616 | 47,2291 | 0,0292 | 0,0008 | 1,7709 | 3,1361 | 0,75 |
|  | 9 | 4,0766 | 36,6894 | 16,6187 | 0,6975 | 0,4865 | 4,0546 | 57,6852 | 0,0220 | 0,0005 | 1,3148 | 1,7257 | 0,54 |
|  | 10 | 4,2037 | 42,0370 | 17,6711 | 0,8246 | 0,6799 | 4,2476 | 69,7572 | -0,0439 | 0,0019 | -2,7572 | 7,6022 | 1,04 |
| Σ | 55 | 33,7907 | 201,7586 | 117,3393 | -0,003 | 3,1583 |  |  | 0,0003 | 0,0899 |  | 108,4222 | 23,48 |
| Среднее значение |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| σ | 2,872 |  |  |  |  |  | 0,5618 |  |  |  |  |  |  |
| σ2 | 8,250 |  |  |  |  |  | 0,3156 |  |  |  |  |  |  |

1. Рассчитаем параметры уравнения, предварительно рассчитав



, 



2. Коэффициент корреляции

,

значение  близко к единице, что говорит о тесной связи признаков.

Коэффициент детерминации

r2=0,972,

следовательно 97,2% результата объясняется вариацией объясняющей переменной x.





,

следовательно, гипотеза H0 о статистической незначимости уравнения регрессии отклоняется. Уравнение регрессии статистически значимо в целом.

Оценим значимость каждого параметра уравнения регрессии.

Используем для этого t-распределения (Стьюдента).

Выдвигаем гипотезу H0 о статически незначимом отличии параметров от нуля: a=b=rxz=0.

tтабл. (α=0,01; v=8)=3,355

Определим ошибки ma, mb, .



следовательно, a, b, r не случайно отличаются от 0, а сформировались под влиянием систематически действующей объясняющей переменной.

3. (т.е. в среднем расчетные значения отклоняются от фактических на 2,3%), следовательно, качество модели хорошее.

4. Полученные оценки модели и ее параметров позволяют использовать ее для прогноза.

Рассчитаем 



5. Средняя ошибка прогноза

, где



Строим доверительный интервал (т.е. интервал, включающий в себе оцениваемое значение с вероятностью, близкой к единице).



, где







Выполненный процесс надежен (вероятность р=1-α=0,99) и достаточно точен, т.к. .

6. Вернемся к первоначальной переменной 

.

Воспользуемся формулой расчета индекса корреляции для нелинейной регрессии

.

 отличается от  в третьем знаке из-за ошибок вычислений и округлений.

###### Контрольное задание 1

##### Задачи 1 – 5

Имеются данные за 12 месяцев года по району города о рынке вторичного жилья (y – стоимость квартиры (тыс. у.е.), х– размер общей площади (м2)). Данные приведены в таблице 1.4.

# Таблица 1.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Мес. | Задача 1 | | Задача 2 | | Задача 3 | | Задача 4 | | Задача 5 | |
| y | x | y | x | y | x | y | x | y | x |
| 1 | 13,0 | 37,0 | 13,2 | 37,2 | 22,5 | 46,0 | 22,5 | 29,0 | 23,0 | 22,8 |
| 2 | 16,4 | 60,0 | 15,9 | 58,2 | 25,5 | 54,0 | 25,8 | 36,2 | 26,8 | 27,5 |
| 3 | 17,0 | 60,9 | 16,2 | 60,8 | 19,2 | 50,2 | 20,8 | 28,9 | 28,0 | 34,5 |
| 4 | 15,2 | 52,1 | 15,4 | 52,0 | 13,6 | 43,8 | 15,2 | 32,4 | 18,4 | 26,4 |
| 5 | 14,2 | 40,1 | 14,2 | 44,6 | 25,4 | 78,6 | 25,8 | 49,7 | 30,4 | 19,8 |
| 6 | 10,5 | 30,4 | 11,0 | 31,2 | 17,8 | 60,2 | 19,4 | 38,1 | 20,8 | 17,9 |
| 7 | 20,0 | 43,0 | 21,1 | 26,4 | 18,0 | 50,2 | 18,2 | 30,0 | 22,4 | 25,2 |
| 8 | 12,0 | 32,1 | 13,2 | 20,7 | 21,0 | 54,7 | 21,0 | 32,6 | 21,8 | 20,1 |
| 9 | 15,6 | 35,1 | 15,4 | 22,4 | 16,5 | 42,8 | 16,4 | 27,5 | 18,5 | 20,7 |
| 10 | 12,5 | 32,0 | 12,8 | 35,4 | 23,0 | 60,4 | 23,5 | 39,0 | 23,5 | 21,4 |
| 11 | 13,2 | 33,0 | 14,5 | 28,4 | 14,6 | 47,2 | 18,8 | 27,5 | 16,7 | 19,8 |
| 12 | 14,6 | 32,5 | 15,1 | 20,7 | 14,2 | 40,6 | 17,5 | 31,2 | 20,4 | 24,5 |

## Задачи 6 - 10

Имеются данные о потребительских расходах на душу населения (y, руб.), средней заработной плате и социальных выплатах (x, руб.) по 16 районам региона. Данные приведены в таблице 1.5.

# Таблица 1.5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| районы | Январь | | Февраль | | Март | | Апрель | | Май | |
| Задача 6 | | Задача 7 | | Задача 8 | | Задача 9 | | Задача 10 | |
| y | x | y | x | y | x | y | x | y | x |
| A | 416 | 1288 | 420 | 1305 | 440 | 1310 | 445 | 1310 | 450 | 1380 |
| B | 501 | 1435 | 512 | 1440 | 525 | 1490 | 537 | 1490 | 540 | 1530 |
| C | 403 | 1210 | 430 | 1230 | 450 | 1250 | 463 | 1255 | 470 | 1310 |
| D | 208 | 1190 | 230 | 1275 | 240 | 1280 | 251 | 1287 | 275 | 1355 |
| E | 462 | 1640 | 505 | 1700 | 545 | 1710 | 553 | 1720 | 564 | 1810 |
| F | 386 | 1420 | 402 | 1480 | 447 | 1497 | 453 | 1500 | 462 | 1520 |
| G | 399 | 1250 | 430 | 1305 | 469 | 1312 | 478 | 1320 | 495 | 1410 |
| H | 342 | 870 | 400 | 895 | 435 | 903 | 448 | 918 | 450 | 1000 |
| I | 354 | 740 | 410 | 775 | 442 | 787 | 453 | 794 | 460 | 810 |
| J | 558 | 910 | 585 | 1000 | 605 | 1012 | 627 | 1012 | 633 | 1051 |
| K | 302 | 1020 | 37 | 1035 | 352 | 1049 | 364 | 1058 | 377 | 1078 |
| L | 360 | 1050 | 384 | 1150 | 405 | 1207 | 419 | 1213 | 422 | 1231 |
| M | 310 | 1205 | 345 | 1215 | 376 | 1221 | 392 | 1225 | 405 | 1230 |
| N | 415 | 990 | 445 | 1010 | 462 | 1035 | 478 | 1042 | 483 | 1050 |
| O | 452 | 1042 | 485 | 1059 | 505 | 1064 | 521 | 1071 | 537 | 1095 |
| P | 450 | 1037 | 491 | 1051 | 500 | 1072 | 517 | 1093 | 529 | 1101 |

Задание:

1. Рассчитайте параметры уравнений регрессий y=a+bx+ε и y=a+b+ε.

2. Оцените тесноту связи с показателем корреляции и детерминации.

3. Рассчитайте средний коэффициент эластичности и дайте сравнительную оценку силы связи фактора с результатом.

4. Рассчитайте среднюю ошибку аппроксимации и оцените качество модели.

5. С помощью F-статистики Фишера (при α=0,5) оцените надежность управления регрессий.

6. Рассчитайте прогнозное значение ,если прогнозное значение фактора увеличится на 5% от его среднего значения. Определите доверительный интервал прогноза для α=0,01.

7. Расчеты должны быть подробны как показаны в примере 1 и сопровождены пояснительной запиской.

Глава 2. Множественная регрессия

Обобщением модели парной регрессии является модель множественной регрессии. Наиболее часто в эконометрике используется линейная модель, т.е. уравнение вида:

, (2.1)

Используются модели и нелинейных регрессий, например:

,  и др.

Построение модели связано с выбором вида уравнения и отбором факторов. Факторы, включаемые в модель должны удовлетворять требованиям:

* должны быть количественно измеримы;
* не должны находиться в точной функциональной связи;
* между факторами не должно быть высокой корреляционной связи;
* факторы не должны быть коллинеарны и мультиколлениарны, то есть факторы не должны дублировать друг друга и более двух факторов не должны быть линейно зависимы.

Замечание. Для оценки мультиколлинеарности факторов можно использовать матрицу М:



- коэффициенты парной корреляции.

1. Если факторы не коррелированы, то определитель матрицы,

det M=1

2. Если между факторами – функциональная связь det M=0

Чем ближе к нулю det M, тем сильнее мультиколлинеарность и ненадежнее результаты множественной регрессии.

Один из путей устранения мультиколлинеарности – исключение из модели одного или нескольких факторов.

2.1. Нахождение параметров линейного уравнения множественной регрессии

Параметры уравнения (2.1) оцениваются МНК, результаты применения которого приводят к следующей системе уравнений



Решив которую, любым способом, например, Крамера, получают коэффициенты a, bj, j=.

Коэффициенты уравнения множественной регрессии можно определить с помощью стандартизированных коэффициентов регрессии на основании уравнения регрессии в стандартизированном масштабе.

 (2.2)

где ty, tj (j=) – стандартизированные переменные, причем

, ,

Система нормальных уравнений для определения коэффициентов  уравнения (2.2) имеет вид:

 (2.3)

где  - парные коэффициенты корреляции,

, j=.

2.2. Частные уравнения регрессии

На основе уравнения (2.1) могут быть найдены частные уравнения регрессии.



 (2.4)



Частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора, при условии, что остальные закреплены на неизменном уровне.

Система (2.4) имеет вид:

 (2.5)



если в (2.4) подставить 

* 1. Множественная корреляция

Значимость уравнения множественной регрессии оценивается с помощью индекса множественной корреляции 

, обладающего свойствами: 0≤≤1,

≥ max , j=.

Вывод о целесообразности включения фактора в уравнение множественной регрессии можно сделать после сравнения индексов коэффициентов множественной и парной регрессии.

Для оценки линейного уравнения регрессии можно воспользоваться формулой:

=

Замечания.

Если число коэффициентов (в) при переменных х приближается к n, то коэффициент (индекс) корреляции близок к единице даже при слабой связи признаков.

В этом случае используется скорректированный индекс (коэффициент) корреляции: 

* 1. Частная корреляция

Для оценки частных уравнений регрессии могут быть использованы индексы (коэффициенты) частной корреляции:

,

где - множественный коэффициент детерминации всего набора к факторов с признаком y.

Возможны коэффициенты корреляции первого, второго, третьего, …, (к-1) порядков, например, влияние фактора х1 можно оценивать при разных условиях независимости действия других факторов:

* - при постоянном действии фактора х2;

-  - при постоянном действии факторов х2, х3, х4, х5;….. .

- - при постоянном действии всех факторов, включенных в регрессию.

При исследовании зависимостей предпочтение отдается показателям частной корреляции более высоких порядков, они являются дополнением к уравнению множественной регрессии. В эконометрике частные коэффициенты корреляции не имеют самостоятельного значения. Их используют на этапе формирования модели, например, для отсева некоторых факторов.

* 1. Оценка надежности результатов множественной регрессии и корреляции

Аналогично парной регрессии оценка осуществляется с помощью F- статистики.

Fрасч.= 

Для оценки значимости влияние фактора xi рассчитывается значение частной F- статистики.



Зная величину Fхiрасч. можно определить значение t- статистики для коэффициентов bi.



 можно рассчитывать и иначе  в частности для уравнения (2.1)



* 1. Фиктивные переменные

Возможны случаи, когда в модель регрессии необходимо включить факторы, имеющие атрибутивные признаки, например, образование, тип изделия, профессию и т.д.

Чтобы использовать эти переменные им присваивают цифровые пометки. Такие искусственно сконструированные переменные в эконометрике называются фиктивными или структурными переменными.

Фиктивные переменные могут вводиться как в линейные, так и нелинейные модели при условии, что последние можно линеаризировать.

**Пример 2**

Изучается влияние стоимости основных и оборотных средств на величину валового дохода торговых предприятий.

Для этого по 12 торговым предприятиям получены данные, приведенные в таблице 2.3.

Таблица 2.3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Валовой доход (y), млн. руб. | 203 | 63 | 45 | 13 | 121 | 88 | 110 | 56 | 80 | 237 | 160 | 75 |
| Среднегодовая стоимость основных фондов, (х1) | 118 | 28 | 17 | 50 | 56 | 102 | 116 | 124 | 114 | 154 | 115 | 98 |
| Среднегодовая стоимость оборотных средств, (х2) | 105 | 56 | 54 | 63 | 28 | 50 | 54 | 42 | 36 | 106 | 88 | 46 |

Требуется:

1. Требуется построить уравнение множественной линейной регрессии в стандартизованной и естественной форме. Рассчитать частные коэффициенты эластичности.
2. Рассчитать линейные коэффициенты частной корреляции и коэффициент множественной корреляции.
3. Рассчитать общий и частные F- статистики Фишера.
4. По результатам расчетов сделать соответствующие выводы.

Решение:

Результаты расчетов приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | y | x1 | x2 | yx1 | yx2 | х1x2 | x12 | x22 | y2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 203 | 118 | 105 | 23954 | 21315 | 12390 | 13924 | 11025 | 41209 |
|  | 63 | 28 | 56 | 1764 | 3528 | 1568 | 784 | 3136 | 3969 |
|  | 45 | 17 | 54 | 765 | 2430 | 918 | 289 | 2916 | 2025 |
|  | 113 | 50 | 63 | 5650 | 7119 | 3150 | 2500 | 3969 | 12769 |
|  | 121 | 56 | 28 | 6776 | 3388 | 1568 | 3136 | 784 | 14641 |
|  | 88 | 102 | 50 | 8976 | 4400 | 5100 | 10404 | 2500 | 7744 |
|  | 110 | 116 | 54 | 12760 | 5940 | 6264 | 12100 | 2916 | 12100 |
|  | 56 | 124 | 42 | 6944 | 2352 | 5208 | 15376 | 1764 | 3136 |

Продолжение табл.2.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 80 | 114 | 36 | 9120 | 2880 | 4104 | 12996 | 1296 | 6400 |
|  | 237 | 154 | 106 | 36498 | 23716 | 16324 | 23716 | 11236 | 56169 |
|  | 160 | 115 | 88 | 18400 | 14080 | 10120 | 13225 | 7740 | 25600 |
|  | 75 | 98 | 46 | 7350 | 3450 | 4508 | 9604 | 2116 | 5625 |
| ∑ | 1351 | 1092 | 728 | 138957 | 94598 | 71222 | 118054 | 51348 | 191387 |
| Средн. | 112,583 | 91 | 60,667 | 11579,75 | 7883,167 |  |  |  | 15948,916 |
|  | 57,219 | 39,457 | 24,549 |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 3273,985 | 1556,833 | 602,6821 |  |  |  |  |  |  |

Рассматриваем уравнение вида:

Y= а+в1х1+в2х2+ (1)

Параметры уравнения можно найти из решения системы уравнений:







Или перейдя к уравнению в стандартизированном масштабе:

ty=β1tx1+β2tx2+,

где ty =, txj = - стандартизированные переменные,

βj - стандартизированные коэффициенты,

bj=, j=.

Коэффициенты βj, в частности для к=2, определяются из системы уравнений:





|  |  |
| --- | --- |
| , | ; |
| r=, | ryxj =; |
| , | ; |
| , | ; |
| , | ; |

|  |  |
| --- | --- |
| , | ; |
| , | ; |

 



Стандартизованная форма уравнения регрессии имеет вид:



Естественная форма уравнения регрессии имеет вид:

= -16,941+0,480x1+1,415x2

Для выяснения относительной силы влияния факторов на результативный признак рассчитываются средние коэффициенты эластичности:



 

Следовательно, при увеличении среднегодовой стоимости основных фондов (х1) на 1 % валовой доход (y) увеличивается на 0,388 % от своего среднего уровня.

При повышении среднегодовой стоимости оборотных средств (х2) на 1 % валовой доход повышается на 0,762 % от своего среднего уровня.

2. Линейные коэффициенты частной корреляции для уравнения (1) определяются следующим образом:

 =

 = 

Отличие коэффициентов частной корреляции объясняется не слабой межфакторной связью (=0,428)

Линейный коэффициент множественной корреляции рассчитывается из формулы:

 = =0,807

Коэффициент детерминации R2= 0,651

3. Fфакт=,

n – число единиц совокупности,

m – число коэффициентов при переменных х.

Fфакт.=

Fтабл. (α=0,05 ν1=2; ν2=9)=4,26

Fфакт. > Fтабл., следовательно, уравнение значимо в целом.

Выясним статистическую значимость каждого фактора во множественном уравнении регрессии.

Для этого рассчитаем частные F- статистики.

Fх1расч.==2,321

Fтабл. (α=0,05 ν1=1; ν2=9)=5,12

Fх1расч < Fтабл.

Из неравенства следует вывод о нецелесообразности включения в модель фактора x1 после фактора x2

Fх2расч.==7,788

Fх2расч > Fтабл.

Из неравенства следует вывод о целесообразности включения в модель фактора x2 после фактора x1.

4.Результаты позволяют сделать вывод:

1. о незначимости фактора х1 и нецелесообразности включения его в уравнение регрессии после фактора х2.
2. о значимости фактора х2 и целесообразности включения его в уравнение регрессии.

Значимой оказалась модель: 

Контрольное задание 2

## Задачи 11-15.

Имеются данные о деятельности крупнейших компаний в течение 12 месяцев 199X года.

Известны – чистый доход (y), оборот капитала (х1), использованный капитал (х2) в млрд. у.е.

Таблица 2.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Задача 11 | | | Задача 12 | | | Задача 13 | | | Задача 14 | | | Задача 15 | | |
| y | х1 | х2 | y | х1 | х2 | y | х1 | х2 | y | х1 | х2 | y | х1 | х2 |
| 5,5 | 53,1 | 27,1 | 6,6 | 6,9 | 83,6 | 3,6 | 16,2 | 13,3 | 1,5 | 5,9 | 5,9 | 3,0 | 18,0 | 6,5 |
| 2,4 | 18,8 | 11,2 | 3,0 | 18,0 | 6,5 | 1,5 | 5,9 | 5,9 | 5,5 | 53,1 | 27,1 | 3,3 | 16,7 | 15,4 |
| 3,0 | 35,3 | 16,4 | 6,5 | 107,9 | 50,4 | 5,5 | 53,1 | 27,1 | 2,4 | 18,8 | 11,2 | 3,6 | 16,2 | 13,3 |
| 4,2 | 71,9 | 32,5 | 3,3 | 16,7 | 15,4 | 2,4 | 18,8 | 11,2 | 3,0 | 35,3 | 16,4 | 5,5 | 53,1 | 27,1 |
| 2,7 | 93,6 | 25,4 | 0,1 | 76,6 | 29,6 | 3,0 | 35,3 | 16,4 | 4,2 | 71,9 | 32,5 | 3,0 | 35,3 | 16,4 |
| 1,6 | 10,0 | 6,4 | 3,6 | 16,2 | 13,3 | 4,2 | 71,9 | 32,5 | 2,7 | 93,6 | 25,4 | 2,7 | 93,6 | 25,4 |
| 2,4 | 31,5 | 12,5 | 2,4 | 18,8 | 11,2 | 2,7 | 93,6 | 25,4 | 1,6 | 10,0 | 6,4 | 2,4 | 31,5 | 12,5 |
| 3,3 | 36,7 | 14,3 | 3,0 | 35,3 | 16,4 | 1,6 | 10,0 | 6,4 | 2,4 | 31,5 | 12,5 | 1,8 | 13,8 | 6,5 |
| 1,8 | 13,8 | 6,5 | 1,8 | 13,8 | 6,5 | 2,4 | 31,5 | 12,5 | 3,3 | 36,7 | 14,3 | 1,6 | 30,4 | 15,8 |
| 2,4 | 64,8 | 22,7 | 2,4 | 64,8 | 22,7 | 3,3 | 36,7 | 14,3 | 1,8 | 13,8 | 6,5 | 0,9 | 31,3 | 18,9 |
| 1,6 | 30,4 | 15,8 | 1,6 | 30,4 | 15,8 | 1,8 | 13,8 | 6,5 | 2,4 | 64,8 | 22,7 | 6,5 | 107,9 | 50,4 |
| 1,4 | 12,1 | 9,3 | 1,4 | 12,1 | 9,3 | 2,4 | 64,8 | 22,7 | 1,6 | 30,4 | 15,8 | 3,6 | 16,2 | 13,3 |

# **Задачи 16-20.**

Имеются данные 12 месяцев по району города о рынке вторичного жилья, (y – стоимость квартиры, тыс. у.е., х1 – размер жилой площади, м2, х2 – размер кухни, м2).

Таблица 2.2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Задача 16 | | | Задача 17 | | | Задача 18 | | | Задача 19 | | | Задача 20 | | |
| y | х1 | х2 | y | х1 | х2 | y | х1 | х2 | y | х1 | х2 | y | х1 | х2 |
| 13,0 | 37,0 | 6,2 | 13,2 | 46,0 | 5,8 | 23,0 | 22,8 | 5,0 | 22,5 | 37,2 | 7,6 | 22,7 | 28,8 | 5,4 |
| 16,4 | 60,9 | 10,0 | 15,9 | 54,1 | 8,5 | 26,8 | 27,7 | 5,2 | 25,5 | 58,0 | 9,4 | 25,8 | 36,2 | 7,2 |
| 17,0 | 60,0 | 8,5 | 16,2 | 50,6 | 8,0 | 28,0 | 34,5 | 6,0 | 19,2 | 60,2 | 9,5 | 20,8 | 28,9 | 5,6 |
| 15,2 | 52,1 | 7,4 | 15,4 | 43,8 | 5,2 | 18,4 | 26,4 | 5,1 | 13,6 | 52,0 | 8,1 | 15,2 | 32,4 | 6,4 |
| 14,2 | 40,1 | 7,0 | 14,2 | 78,6 | 12,0 | 30,4 | 19,8 | 4,8 | 25,4 | 44,6 | 7,4 | 25,4 | 49,7 | 7,5 |
| 10,5 | 30,4 | 6,2 | 11,0 | 60,2 | 7,2 | 20,8 | 17,9 | 4,5 | 17,8 | 31,2 | 6,3 | 19,4 | 38,1 | 6,7 |
| 20,0 | 43,0 | 7,5 | 21,1 | 50,2 | 7,0 | 22,4 | 25,2 | 5,4 | 18,0 | 26,4 | 5,9 | 18,2 | 30,2 | 6,2 |
| 12,0 | 32,1 | 6,4 | 13,4 | 54,7 | 7,3 | 21,8 | 20,4 | 4,9 | 21,1 | 20,7 | 5,5 | 21,0 | 32,6 | 6,4 |
| 15,6 | 35,1 | 7,0 | 15,6 | 42,8 | 5,5 | 18,5 | 20,7 | 5,0 | 16,5 | 22,4 | 5,7 | 16,4 | 27,5 | 5,5 |
| 12,5 | 32,0 | 6,2 | 12,8 | 60,4 | 7,3 | 23,5 | 21,4 | 5,2 | 23,0 | 35,4 | 6,8 | 23,5 | 39,0 | 6,9 |
| 13,2 | 33,0 | 6,0 | 14,5 | 47,2 | 5,8 | 16,7 | 19,6 | 4,5 | 16,2 | 28,4 | 6,5 | 18,8 | 27,5 | 5,4 |
| 14,6 | 32,5 | 5,8 | 15,1 | 40,6 | 5,2 | 20,4 | 24,5 | 4,9 | 17,2 | 22,7 | 6,0 | 17,5 | 31,2 | 6,3 |

Задание:

1. Рассчитайте параметры линейного уравнения множественной регрессии.
2. Дайте оценку силы связи факторов с результатом с помощью средних коэффициентов эластичности.
3. Оцените статистическую значимость параметров и уравнения регрессии в целом с помощью соответственно критериев Стьюдента и Фишера (α=0,01).
4. Рассчитайте среднюю ошибку аппроксимации. Сделайте вывод.
5. Составьте матрицы парных и частных коэффициентов корреляции и укажите информативные факторы.
6. Оцените полученные результаты, выводы оформите в аналитической записке.

#### Глава 3. Системы эконометрических уравнений

Система взаимосвязанных регрессионных уравнений и тождеств, в которых одни и те же переменные в различных регрессионных уравнениях могут одновременно выступать и в роли результирующих показателей, и в роли объясняющих переменных называют системой одновременных (эконометрических уравнений).

Среди переменных систем различают как эндогенные (внутрисистемные), так и экзогенные (внешние по отношению к рассматриваемой системе).

Рассматриваются различные виды систем одновременных уравнений. Система вида:

 (3.1)

называется системой совместных одновременных уравнений или структурной формой модели.

Система вида:

 (3.2)

называется системой независимых уравнений.

МНК, использованной для определения параметров (коэффициентов) системы (3.1) дает смещенные и несостоятельные оценки. Поэтому для определения коэффициентов системы (3.1) – структурных коэффициентов, систему (3.1) приводят к виду:

 (3.3)

Система (3.3) называется приведенной формой модели.

Параметры системы (3.3) могут быть оценены МНК.

Оценки, полученные по МНК могут использованы для оценивания структурных параметров (косвенный метод наименьших квадратов-КМНК).

При этом возможны ситуации:

- однозначное выражение структурных коэффициентов через коэффициенты приведенной модели;

- структурный коэффициент допускает несколько разных оценок КМНК;

- структурный коэффициент не может быть выражен через коэффициенты приведенной модели.

В последнем случае структурное уравнение является не идентифицированным.

Необходимое условие идентифицируемости модели:

 – уравнение идентифицировано;

 - уравнение неидентифицировано;

 - уравнение сверхидентифицировано,

где Н – число эндогенных переменных в уравнении, D – число предопределенных (экзогенных и лаговых) переменных, которые содержаться в системе, но не входят в данное уравнение.

Достаточным условием идентифицируемости является следующее:

- уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы получить матрицу, ранг которой не меньше числа эндогенных переменных в системе минус единица.

- система, в которой для каждого уравнения выполнены необходимые и достаточные условия – точно идентифицируема.

Система, в которой каждое уравнение идентифицировано, идентифицируема. Для оценки ее параметров используют косвенный метод наименьших квадратов (КМНК).

Система в которой хотя бы одно уравнение сверхидентифицировано, а остальные идентифицируемы, сверхидентифицирована.

Для оценки параметров сверхидентифицированной модели используется двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Система, в которой хотя бы одно уравнение не идентифицировано, не идентифицирована. В этом случае необходимо или менять спецификацию системы или использовать трехшаговый метод наименьших квадратов (ТМНК).

Замечание.

Если в модели есть тождества, то статистические исследования исключают их.

Пример 3

1. Оценить структурную модель на идентификацию:

Y1=b12y2+a11 х1+a12x2

Y2=b21y1+b23 y3+a22x2 (1)

Y3=b32y2+a31 х1+a33x3

1. На основе приведенной модели

Y1=2x1+4x2+10x3

Y2=3x1-6x2+2x3 (2)

Y3=-5x1+8x2+5x3

найти структурные коэффициенты модели.

1. Модель имеет 3 эндогенные (y1y2y3) и 3 экзогенные переменные (х1х2х3).

Проверим необходимое условие идентификации:

D+1=Н уравнение идентифицировано

D+1<Н уравнение не идентифицировано

D+1>Н уравнение сверх идентифицировано

где Н – число эндогенных переменных

D – число предопределенных (экзогенных и лаговых), отсутствующих в уравнении, но присутствующих в системе.

1 уравнение: D=1(х3), Н=2 (y1,y2), D+1=Н уравнение идентифицировано

2 уравнение: D=2 (х1, х3), Н=3 (y1,y2,y3), D+1=Н уравнение идентифицировано

3 уравнение: D=1(х2), Н=2 (y2,y3), D+1=Н уравнение идентифицировано

Следовательно, необходимое условие идентифицируемости выполнено.

Проверим достаточное условие:

В 1 уравнении нет переменных х3,y3

Строим матрицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | х3 | y3 |
| 2 ур. | 0 | b23 |
| 3 ур. | a33 | -1 |

det M = det  ≠ 0, rang M = 2

Во 2 уравнении нет переменных х1,х3

Строим матрицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | х1 | x3 |
| 1 ур. | а11 | 0 |
| 3 ур. | a31 | а33 |

det M = det  ≠ 0, rang M = 2

В 3 уравнении нет переменных y1,х2

Строим матрицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | y1 | х2 |
| 1 ур. | -1 | а12 |
| 2 ур. | b 21 | а22 |

det M = det  ≠ 0, rang M = 2

Следовательно, достаточное условие идентифицируемости выполнено.

Система точно идентифицируема.

1. Находим структурные коэффициенты модели.

Для этого:

1. Находим х3 из 2 уравнения приведенной системы (2) и подставляем ее (х3) в 1 уравнение системы (2).

Y1=2,6х1-6,8х2+0,2y2

1. Из 3 уравнения системы (2) находим х3 и подставляем во 2 уравнение системы.

Y2=12х1-8х2+2y3

из системы

Y1=2,6х1-6,8х2+0,2y2

Y2=12х1-8х2+2y3

исключаем х1 и определяем y2: Y2=2,4y1+12,16х2+1,04y3

х2 выразим из последнего уравнения и подставим в 3 уравнение системы (2).

Y3=-8х1+1,5y2-10х3

Выводы:

Структурная модель получена:

Y1=2,6х1-6,8х2+0,2y2

Y2=12,16х2+2,4y1++1,04y3

Y3= -8х1-10х3+1,5y2

Замечание. К приведенной модели можно применить МНК. Для точно идентифицируемой структурной модели, возможно осуществить переход к приведенной форме. Эти действия составляют косвенный метод наименьших квадратов (КМНК).

Контрольное задание 3

Задача 21

Гипотетическая модель экономики:

Сt=a1+b11Yt+b12 Yt+

Jt=a2+b21Yt-1+

Tt=a3+b31Yt++

Yt=Ct+Yt+Gt ,

где С – совокупное потребление в период t;

Y – совокупный доход в период t;

J – инвестиции в период t;

T – налоги в период t;

G – государственные доходы в период t.

Задача 22

Модель спроса и предложения на деньги:

Rt=a1+b11Mt+b12 Yt+

Yt=a2+b21Rt+,

где R – процентные ставки в период t;

Y – ВВП в период t;

M- денежная масса в период t

Задача 23

Макроэкономическая модель:

Сt=a1+b12Yt+b13 Тt+

It=a2+b21Yt+b24 Kt-1+

Yt= Сt+It,

где C – потребление;

I - инвестиции

Y – доход

T - налоги

K- запас капитала

Задача 24

Модель денежного и товарного рынков:

Rt=a1+b12Yt+b14 Mt+

Yt=a2+b21Rt+b23 It+b25Gt+

It=a3+b31Rt+,

где R – процентные ставки;

Y – реальный ВВП

M – денежная масса

I – внутренние инвестиции

G- реальные государственные расходы

Задача 25

Модель денежного рынка:

Rt=a1+b11Mt+b12 Yt+

Yt=a2+b21Rt+b22 It+

It=a3+b33Rt+,

где R – процентные ставки

Y - ВВП

M – денежная масса

I – внутренние инвестиции.

Задача 26

Модель имеет вид:

Y1=a1+b12Y2+

Y2=a2+b21Y1+C21 X1+

Y3=Y2+X2

Задача 27

Модель имеет вид:

Y1=a1+b11х1+b12 х2+С12Y2+

Y2=a2+b22х2+С21Y1+

Y3=a3+b31х1+b33 х3+

Задача 28

Модель имеет вид:

Y1=a1+b11х1+b13 х3+С12Y2+

Y2=a2+b22х2+С21Y1+

Y3=a3+b32х2+b33 х3+

Задача 29

Модель имеет вид:

Y1=b12y2+a11 х1+a12x2+

Y2=b21y1+b23 Y3+а22х2+

Y3=b31y1+a31 х1+a33x3+

Задача 30

Модель имеет вид:

Y1=b12y2+a11 х1+a12x2+

Y2=b21y1+a22 х2+a23x3+

Y3=b31y1+a33 х3+

Задание:

1. Используя необходимое и достаточное условие идентификации, определить, идентифицировано ли каждое уравнение модели.
2. Определите тип модели.
3. Определите метод оценки параметров модели.
4. Опишите последовательность действий при использовании указанного метода.
5. Результаты оформите в виде пояснительной записки.

**Глава 4. Временные ряды (ВР)**

При построении эконометрической модели можно использовать данные:

- описывающие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;

- описывающие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Соответственно определяются и модели:

- пространственные модели;

- модели временных рядов (или динамические ряды).

Для оценки поведения временных рядов значения ряда разделяют на составляющие:

- Тренд;

- Циклические колебания;

- Сезонные колебания;

- Случайные колебания.

Тренд рассматривают в качестве общей направленности изменений определенных значений, взятых на протяженном отрезке времени.

Циклические колебания. Эти составляющие показывают колебания относительно линии тренда для периодов выше одного года. Сезонные колебания показывают периодичность колебаний на протяжении года и более. Сезонные колебания можно выявить после анализа тренда и циклических колебаний. Случайные колебания представляют собой случайные величины. Их выявляют путем снятия тренда, циклических и сезонных колебаний для данного значения. И хотя такое значение нельзя предугадать заранее, его целесообразно учитывать при определении вероятной точности принятой модели прогнозирования.

4.1. Моделирование тенденции временного ряда (выделение тренда)

Наиболее распространенный способ моделирования тенденции ВР является построение функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени или тренда. Этот прием называют аналитическим выравниванием ВР.

Для построения тренда чаще других используют функции:



.

Параметры трендов можно определить МНК, в котором в роли объясняющей переменной выступает время t=1,2,…,n, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда yt.

Тип тенденции можно определить несколькими способами, например:

- качественным анализом изучаемого процесса;

- расчетом основных показателей динамики;

- расчетом и сравнением коэффициентов автокорреляции уровней ВР.

Согласно последнему подходу, если ВР имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни yt и yt-1 тесно коррелируют, коэффициент автокорреляции первого порядка по логарифмам натуральным уровней исходного ряда будет выше, чем соответствующий коэффициент, рассчитанный по уровням ряда.

**4.2. Моделирование циклических и сезонных колебаний**

Анализ структуры ВР, содержащего циклические и сезонные колебания, можно осуществить расчетом сезонной компоненты методом скользящей средней и построением аддитивной (Y=T+S+E) или мультипликативной (Y=T×S×E) составляющих.

Модели предполагают, что каждый уровень ВР может быть представлен с помощью трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Выбор модели производится на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний возрастает или уменьшается – строят мультипликативную модель, если амплитуда приблизительно постоянна, строят аддитивную модель. Построение моделей сводится к расчету значений T, S и E для каждого уровня ряда.

Моделирование циклических колебаний в основном осуществляется аналогично моделированию сезонных колебаний.

Пример 4

Имеются данные об урожайности овощных культур в хозяйствах региона. Данные приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 |
| Урожайность т/га | 10,2 | 10,7 | 11,7 | 13,1 | 14,9 | 17,2 | 20,0 | 23,2 |

Для данного временного ряда требуется:

1. Обосновать тип уравнения тренда.
2. Рассчитать параметры тренда.
3. Дать прогноз на 1997 год.

Расчеты приведем в таблице 4.2.

Решение:

Определим коэффициент корреляции между рядами yt и yt-1.



где  ; 







Результат говорит о тесной зависимости между урожайностью текущего и непосредственно предшествующего годов и наличии во временном ряде сильной линейной тенденции.

Таблица 4.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Год | yt | yt-1 | yt-2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 10,2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
|  | 2 | 10,7 | 10,2 | - | 26,296 | 14,220 | - | - | - | - | 19,338 | - |
|  | 3 | 11,7 | 10,7 | 10,2 | 17,040 | 10,699 | -4,983 | -2,767 | 24,830 | 7,656 | 13,503 | 13,788 |
|  | 4 | 13,1 | 11,7 | 10,7 | 7,442 | 5,157 | -3,583 | -2,267 | 12,838 | 5,139 | 6,195 | 8,123 |
|  | 5 | 14,9 | 13,1 | 11,7 | 0,861 | 0,759 | -1,783 | -1,267 | 3,179 | 1,605 | 0,808 | 2,259 |
|  | 6 | 17,2 | 14,9 | 13,1 | 1,882 | 0,863 | 0,517 | 0,133 | 0,267 | 0,018 | 1,274 | 0,069 |
|  | 7 | 20,0 | 17,2 | 14,9 | 47,416 | 10,426 | 3,317 | 1,933 | 11,002 | 3,736 | 13,471 | 6,412 |
|  | 8 | 23,2 | 20,0 | 17,2 | 54,346 | 36,349 | 6,517 | 4,233 | 42,471 | 17,917 | 44,446 | 27,586 |
|  | 36 |  |  |  | 125,273 | 78,773 | 0,002 | -0,002 | 94,587 | 36,072 | 99,035 | 58,237 |
| Средн. | 4,5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Определим коэффициент автокорреляции второго порядка.



где  ; 







Результаты подтверждает наличие линейной тенденции. Выбираем линейное уравнение тренда:



1. Параметры тренда определим, используя МНК. Результаты расчетов приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | t | yt | t2 | yt2 | t yt |  | ()2 |  |  |  |
|  | 1 | 10,2 | 1 | 104,04 | 10,2 | -3,5 | 12,25 | 8,800 | 1,400 | 1,960 |
|  | 2 | 10,7 | 4 | 114,49 | 21,4 | -2,5 | 6,25 | 10,607 | 0,093 | 0,009 |
|  | 3 | 11,7 | 9 | 136,89 | 35,1 | -1,5 | 2,25 | 12,414 | -0,714 | 0,09 |
|  | 4 | 13,1 | 16 | 171,61 | 52,4 | -0,5 | 0,25 | 14,221 | -1,121 | 1,257 |
|  | 5 | 14,9 | 25 | 222,01 | 72,5 | 0,5 | 0,25 | 16,028 | -1,128 | 1,272 |
|  | 6 | 17,2 | 36 | 295,84 | 103,2 | 1,5 | 2,25 | 17,835 | -0,635 | 0,403 |
|  | 7 | 20,0 | 49 | 400,00 | 140 | 2,5 | 6,25 | 19,642 | 0,358 | 0,128 |
|  | 8 | 23,2 | 64 | 538,24 | 185,6 | 3,5 | 12,25 | 21,449 | 1,751 | 3,066 |
|  | 36 | 121 | 204 | 1983,12 | 620,4 | 0,00 | 32,00 |  |  | 8,604 |
| Средн. | 4,5 | 15,125 | 25,5 | 247,890 | 77,55 |  |  |  |  |  |

 

 









Расчетное значение критерия Фишера равно Fрасч.= 52,25;

Fтабл.(α =0,01; ν1=1; ν2=6) = 13,74, следовательно, уравнение статистически значимо, прогноз имеет смысл.

Прогнозное значение tпрогн.=9, тогда , средняя ошибка прогноза



где остаточная дисперсия Dост рассчитывается по формуле: Dост.=; 

Предельная ошибка прогноза ,

tтабл.(α =0,01; ν=6) = 3,707, 

Доверительный интервал прогноза (20,091;26,494)

Выполненный прогноз надежный и достаточно точный. Следовательно, применительно к рассмотренному временному ряду темпы роста урожайности за восемь рассмотренных лет изменялись от 6,993 (т/га) со средним за год приростом, равным 1,807 (т/га).

КОНТРОЛЬНОЕ Задание 4

Задачи 31-35.

Имеются данные за 15 дней по количеству пациентов клиники, прошедших через соответствующие отделения в течении дня

Таблица 4.4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| День | Задача 31 | Задача 32 | Задача 33 | Задача 34 | Задача 35 |
| Терапевтическое отделение | Хирургическое отделение | Стоматологическое отделение | Гласное отделение | Отделение пластической хирургии |
| 1 | 29 | 35 | 41 | 30 | 22 |
| 2 | 40 | 29 | 52 | 22 | 19 |
| 3 | 30 | 22 | 30 | 19 | 11 |
| 4 | 52 | 19 | 47 | 28 | 12 |
| 5 | 47 | 30 | 28 | 24 | 16 |
| 6 | 28 | 47 | 22 | 18 | 28 |
| 7 | 16 | 28 | 51 | 35 | 30 |
| 8 | 51 | 12 | 40 | 29 | 18 |
| 9 | 40 | 13 | 57 | 40 | 17 |
| 10 | 35 | 15 | 33 | 34 | 20 |
| 11 | 57 | 18 | 43 | 31 | 21 |
| 12 | 28 | 19 | 51 | 29 | 19 |
| 13 | 33 | 20 | 36 | 35 | 24 |
| 14 | 42 | 16 | 19 | 23 | 13 |
| 15 | 39 | 35 | 42 | 27 | 16 |

Задачи 36-40.

Имеются данные за 12 лет по странам о годовом объеме продаж автомобилей.

Таблица 4.5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год  Объем продаж 100 тыс. | Задача 36 | Задача 37 | Задача 38 | Задача 39 | Задача 40 |
| Страна А | Страна В | Страна С | Страна Д | Страна Е |
| 1986 | 3,8 | 4,1 | 5,2 | 2,8 | 4,2 |
| 1987 | 4,7 | 5,2 | 6,3 | 3,6 | 5,4 |
| 1988 | 3,9 | 4,3 | 4,5 | 2,7 | 4,0 |
| 1989 | 2,7 | 3,2 | 3,9 | 2,0 | 3,1 |
| 1990 | 2,9 | 3,0 | 3,8 | 1,8 | 2,9 |
| 1991 | 2,3 | 2,8 | 3,0 | 1,4 | 2,4 |
| 1992 | 3,0 | 4,2 | 4,8 | 2,1 | 3,7 |
| 1993 | 3,6 | 4,6 | 5,0 | 2,5 | 4,1 |
| 1994 | 2,9 | 3,7 | 4,6 | 2,1 | 1,4 |
| 1995 | 3,7 | 4,8 | 6,1 | 3,0 | 2,2 |
| 1996 | 4,5 | 5,6 | 6,7 | 3,7 | 2,9 |
| 1997 | 4,2 | 5,0 | 6,9 | 3,1 | 2,6 |

Требуется:

1. Определить коэффициенты автокорреляции уровней ряда первого и второго порядка.
2. Обоснуйте выбор уравнение тренда и определите его параметры.
3. Сделайте выводы.
4. Результаты оформите в виде пояснительной записки.

Приложение 1

**Распределение Фишера-Снедекора (F-распределение)**

Значения Fтабл, удовлетворяющие условию Р (F > Fтабл). Первое значение соответствует вероятности 0,05, второе - вероятности 0,01 и третье - вероятности 0,001, где ν1 - число степеней свободы числителя, a ν2 - число степеней свободы знаменателя.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν2 ν1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ | t |
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 238,9 | 243,9 | 249,0 | 253,3 | 12,71 |
| 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5981 | 6106 | 6234 | 6366 | 63,66 |
| 406523 | 500016 | 536700 | 562527 | 576449 | 585953 | 598149 | 610598 | 623432 | 636535 | 636,2 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,45 | 19,50 | 4,30 |
| 98,49 | 99,01 | 00,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,42 | 99,46 | 99,50 | 9,92 |
| 998,46 | 999,00 | 999,20 | 999,20 | 999,20 | 999,20 | 999,40 | 999,60 | 999,40 | 999,40 | 31,00 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,84 | 8,74 | 8,64 | 8,53 | 3,18 |
| 34,12 | 30,81 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,49 | 27,05 | 26,60 | 26,12 | 5,84 |
| 67,47 | 148,51 | 141,10 | 137,10 | 134,60 | 132,90 | 130,60 | 128,30 | 125,90 | 123,50 | 12,94 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,77 | 5,63 | 2,78 |
| 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,80 | 14,37 | 13,93 | 13,46 | 4,60 |
| 74,13 | 61,24 | 56,18 | 53,43 | 51,71 | 50,52 | 49,00 | 47,41 | 45,77 | 44,05 | 8,61 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,68 | 4,53 | 4,36 | 2,57 |
| 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,27 | 9,89 | 9,47 | 9,02 | 4,03 |
| 47,04 | 36,61 | 33,20 | 31,09 | 20,75 | 28,83 | 27,64 | 26,42 | 25,14 | 23,78 | 6,86 |

# Продолжение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν2 ν1 | 1 | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 8 | | 12 | | 24 | | ∞ | t |
| 6 | 5,99 | 5,14 | | 4,76 | | 4,53 | | 4,39 | | 4,28 | | 4,15 | | 4,00 | | 3,84 | | 3,67 | 2,45 |
| 13,74 | 10,92 | | 9,78 | | 9,15 | | 8,75 | | 8,47 | | 8,10 | | 7,72 | | 7,31 | | 6,88 | 3,71 |
| 35,51 | 26,99 | | 23,70 | | 21,90 | | 20,81 | | 20,03 | | 19,03 | | 17,99 | | 16,89 | | 15,75 | 5,96 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | | 4,35 | | 4,12 | | 3,97 | | 3,87 | | 3.73 | | 3,57 | | 3,41 | | 3,23 | 2,36 |
| 12,25 | 9,55 | | 8,45 | | 7,85 | | 7,46 | | 7,19 | | 6,84 | | 6,47 | | 6,07 | | 5,65 | 3,50 |
| 29,22 | 21,69 | | 18,77 | | 17,19 | | 16,21 | | 15,52 | | 14,63 | | 13,71 | | 12,73 | | 11,70 | 5,40 |
| 8 | 5,32 | | 4,46 | | 4,07 | | 3,84 | | 3,69 | | 3,58 | | 3,44 | | 3,28 | | 3,12 | 2,99 | 2,31 |
| 11,26 | | 8,65 | | 7,59 | | 7,10 | | 6,63 | | 6.37 | | 6,03 | | 5,67 | | 5,28 | 4,86 | 3,36 |
| 25,42 | | 18,49 | | 15,83 | | 14,39 | | 13,49 | | 12,86 | | 12,04 | | 11,19 | | 10,30 | 9,35 | 5,04 |
| 9 | 5,12 | | 4,26 | | 3,86 | | 3,63 | | 3,48 | | 3,37 | | 3,23 | | 3,07 | | 2,90 | 2,71 | 2,26 |
| 10,56 | | 8,02 | | 6,99 | | 6,42 | | 6,06 | | 5,80 | | 5,47 | | 5,11 | | 4,73 | 4,31 | 3,25 |
| 22,86 | | 16,39 | | 13,90 | | 12,56 | | 11,71 | | 11,13 | | 10,37 | | 9,57 | | 8,72 | 7,81 | 4,78 |
| 10 | 4,96 | | 4,10 | | 3,71 | | 3,48 | | 3,33 | | 3,22 | | 3,07 | | 2,91 | | 2,74 | 2,54 | 2,23 |
| 10,04 | | 7,56 | | 6,55 | | 5,99 | | 5,64 | | 5,39 | | 5,06 | | 4,71 | | 4,33 | 3,91 | 3,17 |
| 21,04 | | 14,91 | | 12,55 | | 11,28 | | 10,48 | | 9,92 | | 9,20 | | 8,45 | | 7,64 | 6,77 | 4,59 |
| 11 | 4,84 | | 3,98 | | 3,59 | | 3,36 | | 3,20 | | 3,09 | | 2,95 | | 2,79 | | 2,61 | 2,40 | 2,20 |
| 9,65 | | 7,20 | | 6,22 | | 5,67 | | 5,32 | | 5,07 | | 4,74 | | 4,40 | | 4,02 | 3,60 | 3,11 |
| 19,69 | | 13,81 | | 11,56 | | 10,35 | | 9,58 | | 9,05 | | 8,35 | | 7,62 | | 6,85 | 6,00 | 4,49 |
| 12 | 4,75 | | 3,88 | | 3,49 | | 3,26 | | 3,11 | | 3,00 | | 2,85 | | 2,69 | | 2,50 | 2,30 | 2,18 |
| 9,33 | | 6,93 | | 5,95 | | 5,41 | | 5,06 | | 4,82 | | 4,50 | | 4,16 | | 3,78 | 3,36 | 3,06 |
| 18,64 | | 12,98 | | 10,81 | | 9,63 | | 8,89 | | 8,38 | | 7,71 | | 7,00 | | 6,25 | 5,42 | 4,32 |

# Продолжение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν2 ν1 | 1 | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 8 | | 12 | | 24 | | ∞ | t |
| 13 | 4,67 | | 3,80 | | 3,41 | | 3,18 | | 3,02 | | 2,92 | | 2,77 | | 2,60 | | 2,42 | 2,21 | 2,16 |
| 9,07 | | 6,70 | | 5,74 | | 5,20 | | 4,86 | | 4,62 | | 4,30 | | 3,96 | | 3,59 | 3,16 | 3,01 |
| 17,81 | | 12,31 | | 10,21 | | 9,07 | | 8,35 | | 7,86 | | 7,21 | | 6,52 | | 5,78 | 4,97 | 4,12 |
| 14 | 4,60 | | 3,74 | | 3,34 | | 3,11 | | 2,96 | | 2,85 | | 2,70 | | 2,53 | | 2,35 | 2,13 | 2,14 |
| 8,86 | | 6,51 | | 5,56 | | 5,03 | | 4,69 | | 4,46 | | 4,14 | | 3,80 | | 3,43 | 3,00 | 2,98 |
| 17,14 | | 11,78 | | 9,73 | | 8,62 | | 7,92 | | 7,44 | | 6,80 | | 6,13 | | 5,41 | 4,60 | 4,14 |
| 15 | 4,45 | | 3,68 | | 3,29 | | 3,06 | | 2,90 | | 2,79 | | 2,64 | | 2,48 | | 2,29 | 2,07 | 2,13 |
| 8,68 | | 6,36 | | 5,42 | | 4,89 | | 4,56 | | 4,32 | | 4,00 | | 3,67 | | 3,29 | 2,87 | 2,95 |
| 16,59 | | 11,34 | | 9,34 | | 8,25 | | 7,57 | | 7,09 | | 6,47 | | 5,81 | | 5,10 | 4,31 | 4,07 |
| 16 | 4,41 | | 3,63 | | 3,24 | | 3,01 | | 2,85 | | 2,74 | | 2,59 | | 2,42 | | 2,24 | 2,01 | 2,12 |
| 8,53 | | 6,23 | | 5,29 | | 4,77 | | 4,44 | | 4,20 | | 3,89 | | 3.55 | | 3,18 | 2,75 | 2,92 |
| 16,12 | | 10,97 | | 9,01 | | 7,94 | | 7,27 | | 6,80 | | 6,20 | | 5,55 | | 4,85 | 4,06 | 4,02 |
| 17 | 4,45 | | 3,59 | | 3,20 | | 2,96 | | 2,81 | | 2,70 | | 2,55 | | 2,38 | | 2,19 | 1,96 | 2,11 |
| 8,40 | | 6,11 | | 5,18 | | 4,67 | | 4,34 | | 4,10 | | 3,79 | | 3,45 | | 3,08 | 2,65 | 2,90 |
| 15,72 | | 10,66 | | 8,73 | | 7,68 | | 7,02 | | 6,56 | | 5,96 | | 5,32 | | 4,63 | 3,85 | 3,96 |
| 18 | 4,41 | | 3,55 | | 3,16 | | 2,93 | | 2,77 | | 2,66 | | 2,51 | | 2,34 | | 2,15 | 1,92 | 2,10 |
| 8,28 | | 6,01 | | 5,09 | | 4,58 | | 4,25 | | 4,01 | | 3,71 | | 3,37 | | 3,01 | 2,57 | 2,88 |
| 15,38 | | 10,39 | | 8,49 | | 7,46 | | 8,49 | | 6,35 | | 5,76 | | 5,13 | | 4,45 | 3,67 | 3,92 |
| 19 | 4,38 | | 3,52 | | 3,13 | | 2,90 | | 2,74 | | 2,63 | | 2,48 | | 2,31 | | 2,11 | 1,88 | 2,09 |
| 8,18 | | 5,93 | | 5,01 | | 4,50 | | 4,17 | | 3,94 | | 3,63 | | 3,30 | | 2,92 | 2,49 | 2,86 |
| 15,08 | | 10,16 | | 8,28 | | 7,26 | | 6,61 | | 6,18 | | 5,59 | | 4,97 | | 4,29 | 3,52 | 3,88 |

# Продолжение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν2 ν1 | 1 | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 8 | | 12 | | 24 | | ∞ | t |
| 20 | 4,35 | | 3,49 | | 3,10 | | 2,87 | | 2,71 | | 2,60 | | 2,45 | | 2,28 | | 2,08 | 1,84 | 2,09 |
| 8,10 | | 5,85 | | 4,94 | | 4,43 | | 4,10 | | 3,87 | | 3,56 | | 3,23 | | 2,86 | 2,42 | 2,84 |
| 14,82 | | 9,95 | | 8,10 | | 7,10 | | 6,46 | | 6,02 | | 5,44 | | 4,82 | | 4,15 | 3,38 | 3,85 |
| 21 | 4,32 | | 3,47 | | 3,07 | | 2,84 | | 2,68 | | 2,57 | | 2,42 | | 2,25 | | 2,05 | 1,82 | 2,08 |
| 8,02 | | 5,78 | | 4,87 | | 4,37 | | 4 04 | | 3,81 | | 3,51 | | 3,17 | | 2,80 | 2,36 | 2,83 |
| 14,62 | | 9,77 | | 7,94 | | 6,95 | | 6,32 | | 5,88 | | 5,31 | | 4,70 | | 4,03 | 3,26 | 3,82 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 | 4,30 | 3,44 | | 3,05 | | 2.82 | | 2,66 | | 2,55 | | 2,40 | | 2,23 | | 2,03 | | 1,78 | | 2,07 |
| 7,94 | 5,72 | | 4,82 | | 4,31 | | 3 99 | | 3,75 | | 3,45 | | 3,12 | | 2,75 | | 2,30 | | 2,82 |
| 14,38 | 9,61 | | 7,80 | | 6,81 | | 6,19 | | 5,76 | | 5,19 | | 4,58 | | 3,92 | | 3,15 | | 3.79 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | | 3,03 | | 2,80 | | 2,64 | | 2,53 | | 2,38 | | 2,20 | | 2,00 | | 1,76 | | 2,07 |
| 7,88 | 5,66 | | 4,76 | | 4,26 | | 3 94 | | 3,71 | | 3,41 | | 3,07 | | 2,70 | | 2,26 | | 2,81 |
| 14,19 | 9,46 | | 7,67 | | 6,70 | | 6,08 | | 5,56 | | 5,09 | | 4,48 | | 3,82 | | 3,05 | | 3,77 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | | 3,01 | | 2,78 | | 2,62 | | 2,51 | | 2,36 | | 2,18 | | 1.98 | | 1,73 | | 2,06 |
| 7,82 | 5,61 | | 4,72 | | 4,22 | | 3 90 | | 3,67 | | 3,36 | | 3,03 | | 2,66 | | 2,21 | | 2,80 |
| 14,03 | 9,34 | | 7,55 | | 6,59 | | 5,98 | | 5,55 | | 4,99 | | 4,39 | | 3,74 | | 2,97 | | 3,75 |
| 25 | 4,24 | | 3,38 | | 2,99 | | 2,76 | | 2,60 | | 2,49 | | 2,34 | | 2,16 | | 1,96 | | 1,71 | 2,06 |
| 7,77 | | 5,57 | | 4,68 | | 4,18 | | 3,86 | | 3,63 | | 3,32 | | 2,99 | | 2,62 | | 2,17 | 2,79 |
| 13,88 | | 9,22 | | 7,45 | | 6,49 | | 5,89 | | 5,46 | | 4,91 | | 4,31 | | 3,66 | | 2,89 | 3,72 |
| 26 | 4,22 | | 3,37 | | 2,98 | | 2,74 | | 2,59 | | 2,47 | | 2,32 | | 2,15 | | 1,95 | | 1,69 | 2,06 |
| 7,72 | | 5,53 | | 4,64 | | 4,14 | | 3,82 | | 3,59 | | 3,29 | | 2,96 | | 2,58 | | 2,13 | 2,78 |
| 13,74 | | 9,12 | | 7,36 | | 6,41 | | 5.80 | | 5,38 | | 4,83 | | 4,24 | | 3,59 | | 2,82 | 3,71 |

# Продолжение

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν2 ν1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ | t |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,30 | 2,13 | 1,93 | 1,67 | 2,05 |
| 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,26 | 2,93 | 2,55 | 2,10 | 2,77 |
| 13,61 | 9,02 | 7,27 | 6,33 | 5,73 | 5,31 | 4,76 | 4,17 | 3,52 | 2,76 | 3,69 |
| 28 | 4,19 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,29 | 2,12 | 2,93 | 1,65 | 2,05 |
| 7,64 | 5,54 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,23 | 2,90 | 4,17 | 2,06 | 2,76 |
| 13,50 | 8,93 | 7,18 | 6,25 | 5,66 | 5,24 | 4,69 | 4,11 | 2,12 | 2,70 | 3,67 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,54 | 2,43 | 2,28 | 2,10 | 1,90 | 1,6 | 2,05 |
| 7,60 | 5,42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3.20 | 2,87 | 2,49 | 2,03 | 2,76 |
| 13,39 | 8,85 | 7,12 | 6,19 | 5,59 | 5,18 | 4.65 | 4,05 | 3,41 | 2,64 | 3,66 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,89 | 1,62 | 2,04 |
| 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3.17 | 2,84 | 2,47 | 2,01 | 2,75 |
| 13,29 | 8,77 | 7,05 | 6,12 | 5,53 | 5,12 | 4,58 | 4,00 | 3,36 | 2,59 | 3,64 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,10 | 1,92 | 1,70 | 1,39 | 2,00 |
| 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,82 | 2,50 | 2,12 | 1,60 | 2,66 |
| 11,97 | 7,76 | 6,17 | 5,31 | 4,76 | 4,37 | 3,87 | 3,31 | 2,76 | 1,90 | 3,36 |
| ∞ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 1,94 | 1,75 | 1,52 | 1,03 | 1,96 |
| 6,64 | 4,60 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,51 | 2,18 | 1,79 | 1,04 | 2,58 |
| 10,83 | 6,91 | 5,42 | 4,62 | 4,10 | 3,74 | 3,27 | 2,74 | 2,13 | 1,05 | 3,29 |

Приложение2

Распределение Стьюдента (t-распределение)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν | Вероятность α=St(t)=P (|T| > tтабл) | | | | | | | | | | | | |
| 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 636,619 |
| 2 | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 31,598 |
| 3 | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 12,941 |
| 4 | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 8,610 |
| 5 | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,043 | 6,859 |
| 6 | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,959 |
| 7 | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 5,405 |
| 8 | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 5,041 |
| 9 | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,781 |
| 10 | 0,129 | 0,260 | 0,327 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,583 |
| 11 | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,437 |
| 12 | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 4,318 |
| 13 | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 4,221 |
| 14 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 4,140 |
| 15 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 4,073 |
| 16 | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 4,015 |
| 17 | 0,128 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,965 |
| 18 | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 1,101 | 2,552 | 2,878 | 3,922 |
| 19 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,833 |

Окончание

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ν | Вероятность α=St(t)=P (|T| > tтабл) | | | | | | | | | | | | |
| 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 20 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,850 |
| 21 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,81 |
| 22 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,792 |
| 23 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,868 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,767 |
| 24 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,402 | 2,797 | 3,745 |
| 25 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,725 |
| 26 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,707 |
| 27 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,690 |
| 28 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,674 |
| 29 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,659 |
| 30 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,646 |
| 40 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,551 |
| 60 | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,460 |
| 120 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,373 |
| ∞ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,291 |

Список Литературы

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. - М.: Финансы и статистика, 1989.

2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и эконометрика. - М.: Юнити, 1998.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятности. М., Наука, 1963.

4. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: Финансы и статистика, 1999.

5. Елисеева И.И. Юзбашев М.М. Общая теория статистики. – 4-е издание, переработанное и дополненное. – М.: Финансы и статистика, 2001.

6. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересетский А.А. Эконометрика. Начальный курс. - М.: Дело, 2000.

7. Практикум по эконометрике: Учебное пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордиенко и др.; Под ред. ИИ. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001.

8. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979.

9. Трошин Л.И., Мхитарян В.С. Коррялиационный и регрессионный анализ. – М.: МЭСИ, 1991.

10. Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ | 4 |
| ГЛАВА 1. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ | 4 |
| КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 1 | 14 |
| ГЛАВА 2. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ | 15 |
| КОТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2 | 24 |
| ГЛАВА 3. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ | 25 |
| КОТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 3 | 29 |
| ГЛАВА 4. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ | 31 |
| КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 4 | 37 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1 |  |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 2 |  |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ |  |