

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

В.Г. АТАПИН

СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ  
С ПРИМЕРАМИ ИХ РЕШЕНИЯ

Утверждено  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2016

УДК 620.1(076.2)

А 92

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *В.П. Гилета*  
д-р техн. наук, профессор *Г.А. Куриленко*

Работа подготовлена на кафедре ПЛА  
для студентов машиностроительных, авиационных  
и транспортных направлений, изучающих дисциплину  
«Сопrotивление материалов»

**Атапин В.Г.**

А 92 Сопrotивление материалов. Сборник заданий с примерами  
их решения: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ,  
2016. – 148 с.

ISBN 978-5-7782-2885-6

Учебное пособие содержит расчетно-графические задания по базовым разделам учебной дисциплины «Сопrotивление материалов» для направлений подготовки бакалавров в области техники и технологии. Все задания сопровождаются примерами их выполнения с подробными методическими указаниями.

Предназначено для студентов машиностроительных, авиационных и транспортных направлений (специальностей).

УДК 620.1(076.2)

ISBN 978-5-7782-2885-6

© Атапин В.Г., 2016  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>1. Растяжение и сжатие</b> .....	7
Задача 1.1. Расчет статически определимого ступенчатого стержня .....	7
Задача 1.2. Расчет статически неопределимой стержневой системы .....	16
<b>2. Расчет на прочность при сложном напряженном состоянии</b> .....	29
Задача. Расчет напряженного и деформированного состояния, оценка прочности малого элемента тела .....	29
<b>3. Кручение</b> .....	35
Задача. Расчет статически неопределимого стержня на прочность и жесткость при кручении.....	35
<b>4. Изгиб</b> .....	45
Задача 4.1. Построение эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов.....	45
Задача 4.2. Расчет допускаемой нагрузки для балки, изготовленной из чугуна .....	64
Задача 4.3. Расчет на прочность и жесткость двутавровой балки .....	74
<b>5. Сложное сопротивление стержней</b> .....	83
Задача. Расчет вала редуктора с цилиндрическими косозубыми колесами .....	83
<b>6. Статически неопределимые стержневые системы</b> .....	89
Задача. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил.....	89
<b>7. Устойчивость стержней</b> .....	105
Задача. Расчет стержня, сжатого центральной продольной силой .....	105
<b>8. Динамика</b> .....	122
Задача 8.1. Учет сил инерции.....	122
Задача 8.2. Удар.....	128
Задача 8.3. Колебания упругих систем.....	134
<b>Библиографический список</b> .....	140
<b>Приложение</b> .....	141

## ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей учебной дисциплины «Сопротивление материалов» является овладение теоретическими основами и практическими методами расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и машин. Опыт в проведении таких инженерных расчетов студент получает на практических занятиях, а также при выполнении индивидуальных заданий. Предлагаемые расчетно-графические задания охватывают базовые разделы учебной дисциплины «Сопротивление материалов» для направлений подготовки бакалавров в области техники и технологии.

Учебное пособие:

- способствует развитию инструментальных компетенций, формирующих, в частности, способность к анализу и синтезу, способность решать проблемы прочности при выполнении практических работ;
- позволяет существенно сократить время, затрачиваемое преподавателем на подготовку, выдачу и объяснение заданий, на консультации в связи с подробно рассмотренными примерами решения этих заданий. В примерах содержатся ответы на вопросы практического характера, на которые студенты затрудняются найти ответы в учебниках и в лекционных материалах.

### Общие методические указания

■ Данные для выполнения задания следует выбирать из соответствующей таблицы согласно шифру своей зачетной книжки и первым **шести** буквам русского алфавита, расположенным в определенном порядке. Записав шифр и под каждой его цифрой буквы

*шифр* – 1238104725

*буквы* – \*\*\*\*абвгде,

далее выбирают из таблицы, приведенной в задании, число, которое находится на пересечении столбца (буква) и строки (цифра шифра). Причем вначале берется буква, а затем находится цифра.

Так, в табл.1.1 (задача 1.1) в последней строке по горизонтали первая буква «е». На пересечении этого столбца со строкой, соответствующей цифре 5 шифра (е5), получаем следующие значения сил:

$$F_1 = 130 \text{ кН}, F_2 = -60 \text{ кН}, F_3 = -20 \text{ кН}.$$

Затем по следующей букве «д» и соответствующей ей цифре 2 шифра на пересечении столбца «д» и строки «2» (д2) получаем:

$$l_1 = 0,2 \text{ м}; l_2 = 0,6 \text{ м}; l_3 = 0,9 \text{ м}; a_1 = 0,1 \text{ м}; a_2 = 0,4 \text{ м}; a_3 = 0,9 \text{ м}$$

и т. д.

■ Все задания должны быть выполнены самостоятельно после изучения соответствующего раздела курса «Сопrotивление материалов».

■ Задания выполняются, как правило, на стандартных листах писчей бумаги формата А1 (297×210 мм).

■ Все расчеты и пояснения к ним выполняются чернилами, записи ведутся только на одной стороне листа.

■ Графическая часть задания выполняется в масштабе с использованием чертежного инструмента.

■ При решении каждой задачи необходимо:

- написать полное условие задачи, численные данные и вычертить заданную схему, соответствующую варианту;

- начертить с соблюдением масштаба расчетную схему;

- привести решение в общем виде, подставив численные значения только в конечные буквенные выражения (соблюдается последовательность подстановки и единицы измерения соответствующих величин);

- записать численное значение результата с точностью до трех-четырех значащих цифр (независимо от положения запятой) и указать единицу измерения;

- эпюры внутренних усилий строить под расчетной схемой на одном листе с соблюдением масштаба и указанием значений характерных ординат;

- каждый этап расчета сопровождать краткими пояснениями.

- Титульный лист оформляется согласно ГОСТ 2.105–95. ЕСКД. Общие требования к текстовым документам (см. рисунок).

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ	
КАФЕДРА «ПРОЧНОСТЬ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ»	
«УТВЕРЖДАЮ»	
Преподаватель	
_____	Фамилия И.О.
_____	_____ 2016 г.
З А Д А Н И Е № _____	
«Название задания»	
Шифр зачетной книжки _____	
РАЗРАБОТАЛ:	
Студент _____	
Группа _____	
Факультет _____	
Новосибирск	
2016	

Образец титульного листа

# 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

## Задача 1.1. Расчет статически определимого ступенчатого стержня

Ступенчатый стержень изготовлен из серого чугуна, который имеет предел прочности при растяжении  $\sigma_{в\ p} = 240$  МПа, при сжатии  $\sigma_{в\ сж} = 1000$  МПа, модуль упругости  $E = 1,2 \cdot 10^5$  МПа (рис. 1.1). Требуется при исходных данных, приведенных в табл. 1.1:

- построить эпюры нормальных (продольных) сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений;
- определить перемещение свободного торца стержня, используя принцип независимости действия сил;
- проверить прочность стержня.

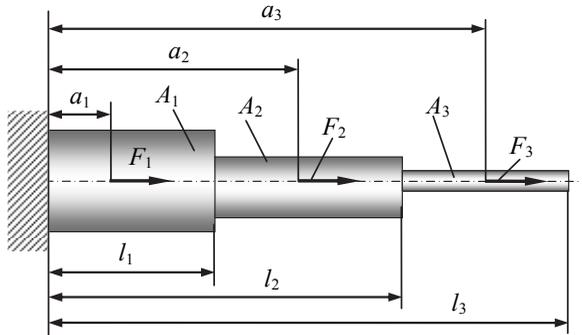


Рис. 1.1. К задаче 1.1

**Указание.** Направление сил на расчетной схеме для рассматриваемого варианта изобразить в соответствии с их знаками, приведенными в табл. 1.1. Если в таблице сила указана со знаком (+), то направление силы, указанное на рис. 1.1, на вашей расчетной схеме сохраняется.

Если в таблице сила указана со знаком (–), то направление силы, указанное на рис. 1.1, на вашей расчетной схеме рисуется в противоположном направлении и знак (–), стоящий у силы, далее не учитывается.

Таблица 1.1

### Исходные данные к задаче 1.1

Но- мер стро- ки	Сила, кН			Линейный размер, м						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>			Нормативный коэффициент запаса прочности [n]
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
1	120	-50	-40	0,3	0,7	1,0	0,1	0,4	1,0	3	2	1	3,0
2	-40	80	-70	0,2	0,6	0,9	0,1	0,4	0,9	3	1	2	3,5
3	90	-70	30	0,4	0,6	0,8	0,1	0,5	0,8	5	4	3	3,2
4	50	-60	20	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,7	3	1	2	3,6
5	130	-60	-20	0,3	0,7	1,0	0,3	0,6	0,8	4	2	1	3,3
6	40	-70	30	0,4	0,7	0,9	0,2	0,6	0,9	2	4	3	3,7
7	-60	110	-90	0,2	0,5	0,8	0,1	0,5	0,7	4	2	3	3,4
8	-80	70	30	0,3	0,7	0,9	0,1	0,6	0,9	6	4	3	3,8
9	60	-70	20	0,4	0,7	1,0	0,1	0,5	1,0	2	3	2	3,2
0	60	-90	10	0,2	0,5	0,8	0,1	0,3	0,8	3	2	1	4,0
	е			д						г			е

### Пример расчета и оформления задачи

Ступенчатый стержень изготовлен из серого чугуна, который имеет предел прочности при растяжении  $\sigma_{в\ p} = 240$  МПа, предел прочности при сжати  $\sigma_{в\ сж} = 1000$  МПа, модуль упругости  $E = 1,2 \cdot 10^5$  МПа.

Исходные данные:  $F_1 = 150$  кН,  $F_2 = -50$  кН,  $F_3 = -40$  кН,  $l_1 = 0,2$  м,  $l_2 = 0,5$  м,  $l_3 = 0,8$  м,  $a_1 = 0,1$  м,  $a_2 = 0,3$  м,  $a_3 = 0,6$  м,  $A_1 = 2$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 3$  см<sup>2</sup>,  $A_3 = 1$  см<sup>2</sup>,  $[n] = 2,0$ . Расчетная схема представлена на рис. 1.2.

Требуется:

- построить эпюры нормальных (продольных) сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений;
- определить перемещение свободного торца стержня, используя принцип независимости действия сил;
- проверить прочность стержня.

### Решение

**Расчетная схема.** Расчетная схема стержня согласно исходным данным к задаче изображена на рис. 1.2. Начало системы координат  $x$

поместим в точке  $B$  (заделка). Ось  $x$  направим вдоль стержня (горизонтально), ось  $y$  – перпендикулярно оси  $x$  (вертикально).

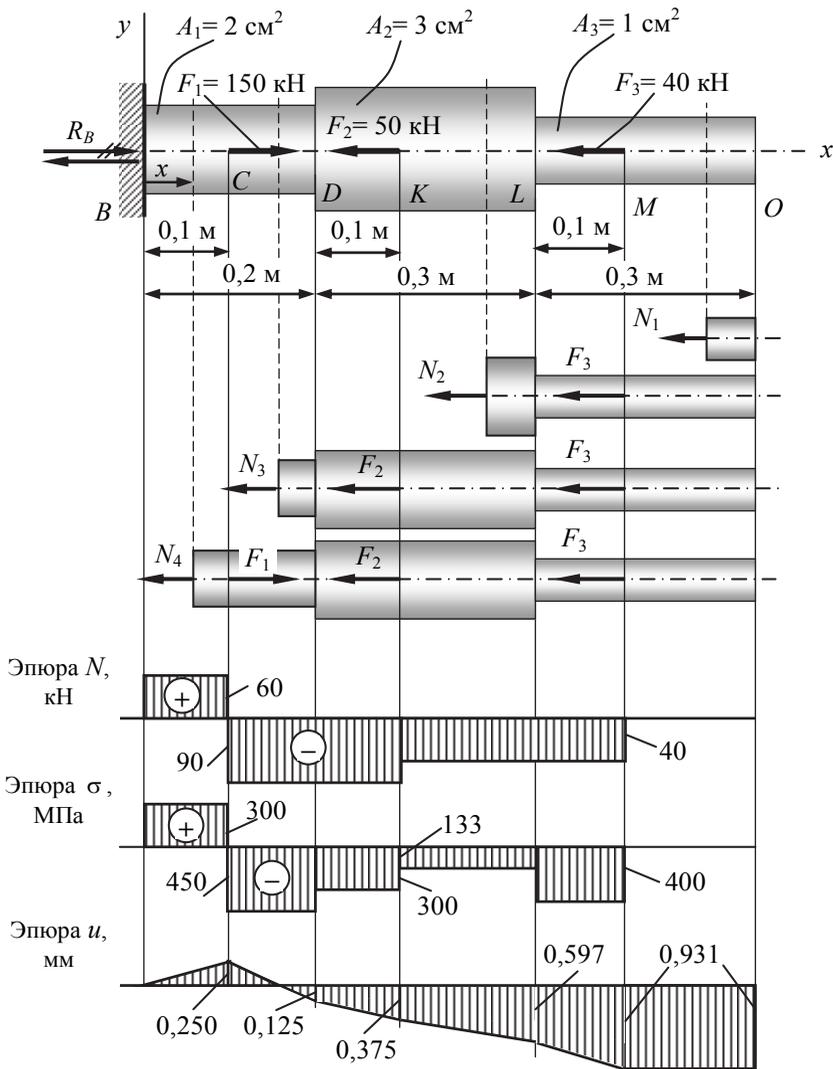


Рис. 1.2. Расчетная схема стержня и эпюры

**Определение реакции опоры.** Полагаем, что реакция опоры (заделки)  $R_B$  направлена в положительном направлении оси  $x$  (см. рис. 1.2). Для нахождения реакции составляем уравнение равновесия:

$$\sum x = 0 \quad R_B + F_1 - F_2 - F_3 = 0 \rightarrow$$

$$R_B = -F_1 + F_2 + F_3 = -150 + 50 + 40 = -60 \text{ кН},$$

т. е. реакция опоры направлена в противоположную сторону. Зачеркивая двумя штрихами первоначальное направление реакции, изображаем ее истинное направление.

**Эпюра нормальных сил.** Разобьем стержень на отдельные (силовые) участки, начиная от свободного торца. Границами участков при построении эпюры нормальных сил являются сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы, а также торцы стержня (сечения  $B$  и  $O$ ). Таким образом, заданный стержень имеет четыре участка:  $OM$ ,  $MK$ ,  $KC$ ,  $CB$  (см. рис. 1.2).

При применении метода сечений принципиально безразлично, равновесие какой из отсеченных частей (левой или правой) стержня рассматривать. В данном случае, применяя метод сечений, будем оставлять правую и отбрасывать левую отсеченную часть стержня.

При растяжении нормальную силу принято считать положительной.

■ **Правило знаков:** при рассмотрении равновесия оставленной части стержня будем всегда предполагать нормальную силу  $N$  положительной, т. е. направленной от сечения, независимо от действия внешней нагрузки.

Проведем произвольные сечения на указанных участках  $OM$ ,  $MK$ ,  $KC$ ,  $CB$  и рассмотрим равновесие оставленных частей (см. рис. 1.2):

- *участок  $OM$*

$$\sum x = 0 \quad N_1 = 0; \quad \text{Ответ}$$

- *участок  $MK$*

$$\sum x = 0 \quad -N_2 - F_3 = 0 \rightarrow N_2 = -F_3 = -40 \text{ кН}, \quad \text{Ответ}$$

знак минус показывает, что на участке  $MK$  действует не растягивающая сила, а сжимающая;

- *участок  $KC$*

$$\sum x = 0 \quad -N_3 - F_3 - F_2 = 0 \rightarrow N_3 = -F_3 - F_2 = -90, \quad \text{Ответ}$$

знак минус показывает, что на участке  $KC$  также действует не растягивающая сила, а сжимающая;

- участок  $CB$

$$\begin{aligned} \sum x = 0 \quad -N_4 - F_3 - F_2 + F_1 = 0 &\rightarrow \\ N_4 = -F_3 - F_2 + F_1 = 60 \text{ кН}, & \end{aligned} \quad \text{Ответ}$$

знак плюс показывает, что на участке  $CB$  действует растягивающая сила.

■ *Замечание.* Реакция  $R_B$  заделки равна  $R_B = N_4 = 60$  кН, что совпадает с результатом, полученным ранее из решения уравнения равновесия. Таким образом, если определять значения нормальных сил, оставляя каждый раз после проведения сечения левую часть стержня, конечно получим те же результаты.

Для построения эпюры  $N$  проведем ось абсцисс графика параллельно оси  $x$  стержня и отложим в произвольно выбранном масштабе значения нормальных сил по оси ординат  $y$ . Так как в пределах одного участка нормальная сила не меняется, то эпюра ограничена прямыми линиями, параллельными оси абсцисс (см. рис. 1.2). Полученные графики принято штриховать, при этом штриховка должна быть перпендикулярна оси стержня. Каждая линия штриховки в соответствующем масштабе выражает величину нормальной силы в лежащем против нее поперечном сечении.

**Эпюра нормальных напряжений.** При построении эпюры нормальных напряжений границами участков являются сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы и изменяются размеры поперечного сечения. Следовательно, в этом случае имеем шесть участков:  $OM$ ,  $ML$ ,  $LK$ ,  $KD$ ,  $DC$ ,  $CB$  (рис. 1.2). Напряжения для этих участков получим, разделив значения  $N$  на соответствующие площади поперечных сечений стержня, т.е. используем формулу

$$\sigma = N/A :$$

- участок  $OM$   $\sigma = 0;$  Ответ

- участок  $ML$   $\sigma = \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -400 \text{ МПа};$  Ответ

- участок  $LK$   $\sigma = \frac{-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -133 \text{ МПа};$  Ответ

- участок  $KD$   $\sigma = \frac{-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -300 \text{ МПа};$  *Ответ*
- участок  $DC$   $\sigma = \frac{-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -450 \text{ МПа};$  *Ответ*
- участок  $CB$   $\sigma = \frac{60 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 300 \text{ МПа}.$  *Ответ*

**Эпюра перемещений.** Эпюру перемещений  $u$  следует строить, начиная от заземленного торца  $B$ , для которого  $u_B = 0$ .

Перемещение произвольного сечения, взятого в пределах участка  $BC$  на расстоянии  $x$ , равно удлинению части стержня длиной  $x$  (см. рис. 1.2)

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_4 x}{EA_1}.$$

Полученное выражение показывает, что перемещения возрастают (по мере удаления сечения от заделки) по линейному закону. При нагружении стержня сосредоточенными силами в пределах каждого участка эпюра перемещений будет линейной; поэтому для ее построения достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков.

Абсолютное перемещение сечения  $C$  ( $u_C$ ) равно перемещению сечения  $B$  плюс удлинение участка  $BC$ :

$$\begin{aligned} u_C &= u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N_4 l_{BC}}{EA_1} = \\ &= 0 + \frac{(60 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,250 \text{ мм}. \end{aligned} \quad \text{Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения  $D$  равно перемещению сечения  $C$  плюс удлинение (или укорочение, если  $N$  отрицательно) участка  $CD$ :

$$\begin{aligned} u_D &= u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N_3 l_{CD}}{EA_1} = 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ м} + \\ &+ \frac{(-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = -1,250 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,125 \text{ мм}. \end{aligned} \quad \text{Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения  $K$  равно перемещению сечения  $D$  плюс удлинение (укорочение) участка  $DK$ :

$$u_K = u_D + \Delta l_{DK} = u_D + \frac{N_3 l_{DK}}{EA_2} = -1,250 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{(-90 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = -3,750 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,375 \text{ мм. Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения  $L$  равно перемещению сечения  $K$  плюс удлинение (укорочение) участка  $KL$ :

$$u_L = u_K + \Delta l_{KL} = u_K + \frac{N_2 l_{KL}}{EA_2} = -3,750 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{(-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,2 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = -5,972 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,597 \text{ мм. Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения  $M$  равно перемещению сечения  $L$  плюс удлинение (укорочение) участка  $LM$ :

$$u_M = u_L + \Delta l_{LM} = u_L + \frac{N_2 l_{LM}}{EA_1} = -5,972 \cdot 10^{-4} \text{ м} +$$

$$+ \frac{(-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = -9,305 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,931 \text{ мм. Ответ}$$

Абсолютное перемещение сечения  $O$  равно перемещению сечения  $M$  плюс удлинение (укорочение) участка  $MO$ :

$$u_O = u_M + \Delta l_{MO} = u_M + \frac{N_1 l_{MO}}{EA_1} =$$

$$= -9,305 \cdot 10^{-4} \text{ м} + 0 = -9,305 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,931 \text{ мм. Ответ}$$

Построенная по полученным данным эпюра перемещений показана на рис. 1.2.

**Вычисление перемещения свободного торца  $O$  стержня на основе принципа независимости действия сил.** На основе принципа независимости действия сил перемещение свободного торца  $u_O$  стержня от нагрузок  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  равно сумме перемещений  $u_O(F_1)$ ,  $u_O(F_2)$ ,  $u_O(F_3)$  от действия каждой силы в отдельности, т. е.

$$u_O = u_O(F_1) + u_O(F_2) + u_O(F_3).$$

Вычисляем перемещения  $u_O(F_1)$ ,  $u_O(F_2)$ ,  $u_O(F_3)$ ,  $u_O$  :

$$\begin{aligned} u_O(F_1) &= \frac{F_1 l_{BC}}{EA_1} = \\ &= \frac{(150 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = 6,250 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,625 \text{ мм}, \end{aligned}$$

сила  $F_1$  вызывает деформацию растяжения, поэтому в расчете поставлен знак плюс;

$$\begin{aligned} u_O(F_2) &= \frac{-F_2 l_{DK}}{EA_2} + \frac{-F_2 l_{BD}}{EA_1} = \frac{(-50 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} + \\ &+ \frac{(-50 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,2 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} \approx -5,556 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -0,556 \text{ мм}, \end{aligned}$$

сила  $F_2$  вызывает деформацию сжатия, поэтому в расчете поставлен знак минус;

$$\begin{aligned} u_O(F_3) &= \frac{-F_3 l_{LM}}{EA_3} + \frac{-F_3 l_{DL}}{EA_2} + \frac{-F_3 l_{BD}}{EA_1} = \\ &= \frac{(-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,1 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} + \frac{(-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,3 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} + \\ &+ \frac{(-40 \cdot 10^{-3} \text{ МН})(0,2 \text{ м})}{(1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)} = -9,999 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx -1,00 \text{ мм}, \end{aligned}$$

сила  $F_3$  вызывает деформацию сжатия, поэтому в расчете поставлен знак минус;

$$\begin{aligned} u_O &= u_O(F_1) + u_O(F_2) + u_O(F_3) = \\ &= 0,625 - 0,556 - 1,00 = -0,931 \text{ мм.} \end{aligned} \quad \text{Ответ}$$

*Замечание:* полученный результат совпадает с результатом, полученным при построении полной эпюры перемещений (см. рис.1.2).

**Проверка прочности стержня.** В связи с тем что стержень изготовлен из материала, имеющего разные пределы прочности при растяжении и сжатии, проверка прочности проводится для участков, испытывающих растяжение и сжатие. При этом выделяются участки, имеющие наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения (см. рис. 1.2, эпюра  $\sigma$ ):

- *участок BC* –  $\sigma_{\max p} = 300$  МПа (растяжение),
  - *участок CD* –  $\sigma_{\max c} = 450$  МПа (сжатие).
- Вычисляем допускаемые напряжения:
- при растяжении –  $[\sigma]_p = \sigma_{Bp} / [n] = 320/2 = 160$  МПа,
  - при сжатии –  $[\sigma]_c = \sigma_{Bc} / [n] = 1200/2 = 600$  МПа.

Стержень считается прочным, если выполняется условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Для заданного стержня имеем:

- *участок BC* (растяжение):

$$\sigma_{\max p} = 300 \text{ МПа} > [\sigma]_p = 160 \text{ МПа}, \quad \text{Ответ}$$

т. е. прочность стержня на растяжение недостаточная;

- *участок CD* (сжатие):

$$\sigma_{\max c} = 450 \text{ МПа} < [\sigma]_c = 600 \text{ МПа}, \quad \text{Ответ}$$

т. е. стержень при сжатии имеет достаточную прочность.

Так как условие прочности стержня на растяжение не выполняется, то в целом прочность стержня недостаточна.

## Задача 1.2. Расчет статически неопределимой стержневой системы

Плоская стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 1.3). Стержни изготовлены из разных материалов, механические характеристики которых приведены в табл. 1.2. Исходные данные – в табл. 1.3.

Таблица 1.2

**Материал стержня и его механические характеристики**

Номер стержня	Материал	Модуль упругости	Предел прочности	Предел текучести	Нормативный коэффициент запаса прочности	
		$E, 10^5$	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$[n_B]$	$[n_T]$
		МПа			–	
1	Сталь Ст3	2,0	380	220	–	1,5
2	Сплав Д16Т	0,7	470	320	3,5	–
3	Латунь Л68	1,0	300	–	4,0	–

Таблица 1.3

**Исходные данные к задаче 1.2**

Номер строки	Схема	Сила $F$ , кН	Длина $l$ , м	Отношение площадей поперечного сечения стержней $A_1: A_2: A_3$	Угол, град	
					$\alpha$	$\beta$
1	1	10	1,0	1:4:3	30	60
2	2	20	1,1	2:1:4	40	50
3	3	30	1,2	3:2:1	50	40
4	4	40	1,3	4:3:1	60	30
5	5	10	1,4	1:3:2	30	60
6	6	20	1,5	2:1:3	40	50
7	7	30	1,6	3:4:1	50	40
8	8	40	1,7	4:2:3	45	45
9	9	20	1,8	1:2:4	40	50
0	10	40	1,0	2:4:3	30	60
	е	д	г	е	д	

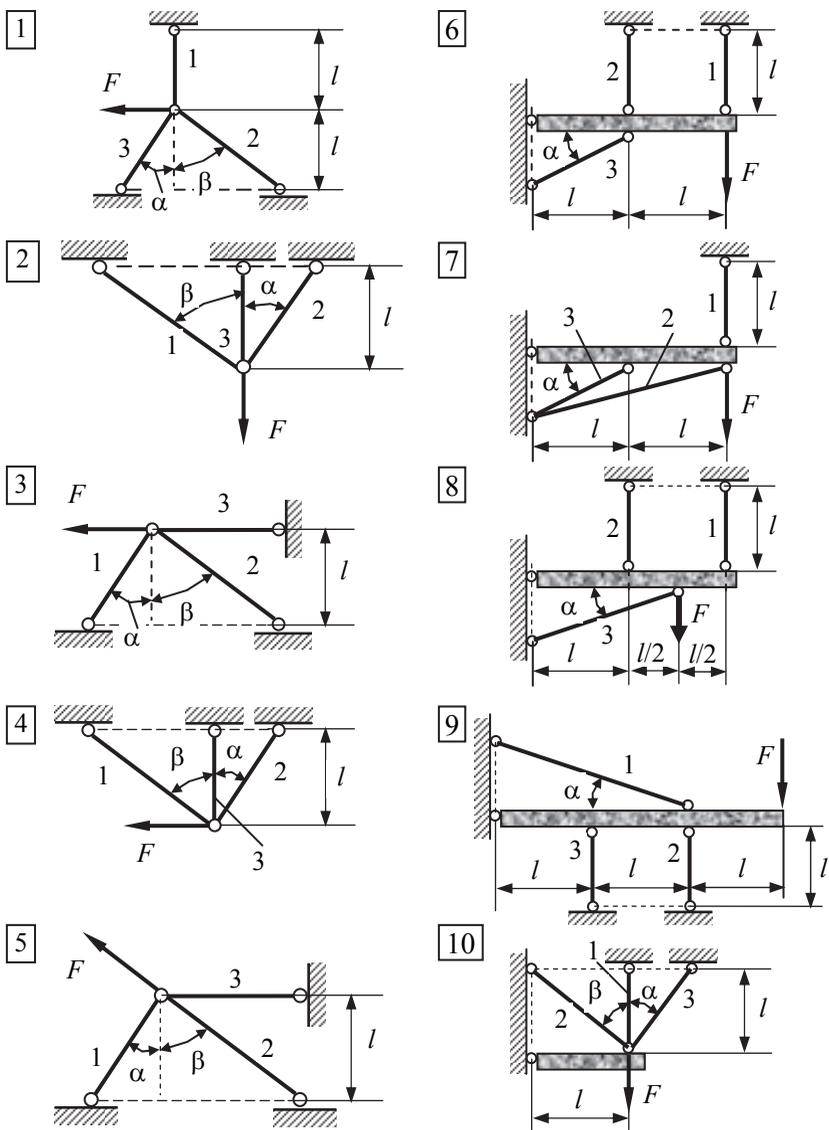


Рис. 1.3. К задаче 1.2

Требуется определить:

- 1) площади поперечных сечений стержней;
- 2) коэффициент запаса прочности каждого стержня.

**Указание.** Затемненные на расчетных схемах элементы конструкции считать абсолютно жесткими.

### Примеры расчета и оформления задачи

#### 1. Стержневая система без жесткого элемента

Плоская стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 1.4, а). Стержни изготовлены из разных материалов, механические характеристики которых приведены в табл. 1.2. Исходные данные:  $F = 10$  кН,  $l = 1,0$  м,  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

Требуется определить:

- 1) площади поперечных сечений стержней;
- 2) коэффициент запаса прочности каждого стержня.

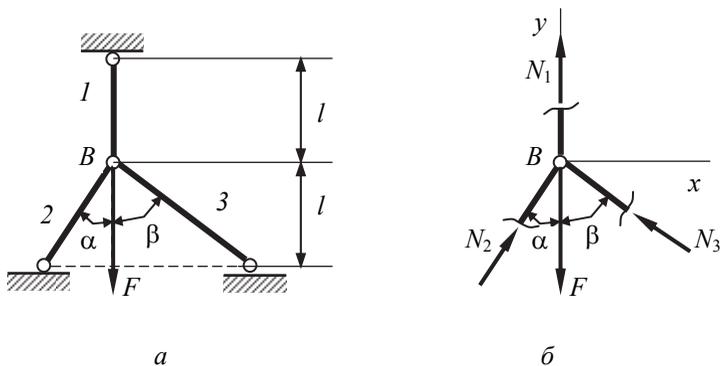


Рис. 1.4. Стержневая система (а) и ее расчетная схема (б)

#### Решение

**Уравнения равновесия.** Рассекаем стержни и рассматриваем равновесие узла  $B$  под действием силы  $F$  и усилий в стержнях (рис. 1.4, б). Полагаем, что стержень  $1$  растянут, стержни  $2, 3$  сжаты.

Составляем уравнения равновесия. Начало системы координат  $xu$  поместим в узле  $B$ . Для узла  $B$ :

$$\sum x = 0 \quad N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \beta = 0 \rightarrow N_2 = 1,732N_3; \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \beta - F = 0 \rightarrow$$

$$N_1 + 0,866N_2 + 0,5N_3 = F. \quad (2)$$

Неизвестных усилий – три ( $N_1, N_2, N_3$ ), число уравнений статики для плоской системы сходящихся сил – два, следовательно, система один раз статически неопределима.

**Уравнение перемещений.** Составим уравнение перемещений, выражающее связь между изменениями длин стержней, которая графически изображается *диаграммой перемещений*. Диаграмма перемещений может строиться в произвольном масштабе, не связанном с масштабом чертежа самой стержневой системы.

■ При построении диаграммы перемещений предположение о характере деформации необходимо согласовать с направлением усилий в стержнях на силовой диаграмме (см. рис. 1.4, б). Это означает: если при составлении уравнений равновесия полагают стержень растянутым, то на диаграмме перемещений этот стержень должен иметь удлинение, если сжатым, то – укорочение.

Ранее мы предположили, что стержень 1 растянут, а стержни 2, 3 сжаты (см. рис. 1.4, б). Следовательно, шарнир  $B$  опустится вниз, допустим, вправо от линии действия нагрузки в точку  $B^*$  (рис. 1.5). Из точки  $B^*$  опускаем перпендикуляры на направления стержней. Здесь:

отрезок  $BB_1 = \Delta l_1$  – удлинение стержня 1,

отрезок  $BB_2 = \Delta l_2$  – укорочение стержня 2,

отрезок  $BB_3 = \Delta l_3$  – укорочение стержня 3.

Обозначим через  $u, v$  проекции вектора перемещений узла  $\overline{BB^*}$  на оси  $x, y$ . Тогда из рис. 1.5 получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= v, \\ \Delta l_2 &= v \cos \alpha - u \sin \alpha, \\ \Delta l_3 &= v \cos \beta + u \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исключая  $u$ ,  $v$  из уравнений (3), с учетом  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  приходим к следующему уравнению перемещений:

$$0,866\Delta l_2 + 0,5\Delta l_3 = \Delta l_1. \quad (4)$$

Выразим удлинения  $\Delta l_i$  ( $i=1,2,3$ ) через усилия в стержнях, используя формулу

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}.$$

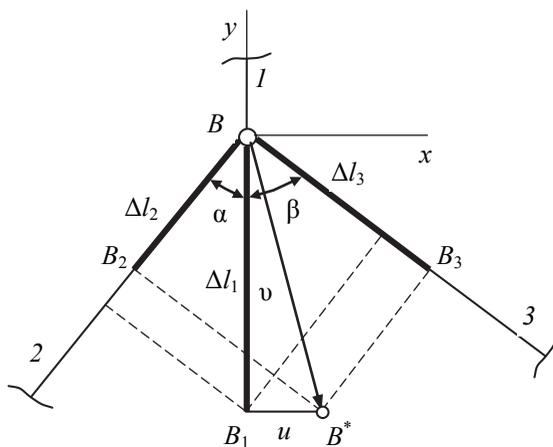


Рис. 1.5. Предполагаемая диаграмма перемещений

Учитывая заданное соотношение площадей  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ , принимаем  $A_2 = 4A_1$ ,  $A_3 = 2A_1$ .

Из табл. 1.2 следует, что  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$  МПа,  $E_3 = 1 \cdot 10^5$  МПа.

Длины стержней определяются из рис. 1.4,  $a$ :

$$l_1 = l, l_2 = l/\cos\alpha, l_3 = l/\cos\beta.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (4), получаем при  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $l = 1,0$  м уравнение перемещений, выраженное через внутренние силы  $N_i$ :

$$0,7N_2 + N_3 = N_1. \quad (5)$$

**Усилия в стержнях.** Система уравнений (1), (2), (5) позволяет определить усилия в стержнях. Эта система будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= 1,732N_3, \\ N_1 + 0,866N_2 + 0,5N_3 &= F, \\ 0,7N_2 + N_3 &= N_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решая систему (6) с учетом  $F = 10$  кН, получаем

$N_1 = 5,26$  кН (стержень растянут);

$N_2 = 4,12$  кН (стержень сжат);

$N_3 = 2,38$  кН (стержень сжат).

**Определение площадей поперечных сечений стержней при расчете по допускаемым напряжениям**

$$A_i = \frac{N_i}{[\sigma]_i}, \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$[\sigma]_1 = \sigma_T / [n_T] = 220 / 1,5 = 147 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_2 = \sigma_B / [n_B] = 470 / 3,5 = 134 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_3 = \sigma_B / [n_B] = 300 / 4,0 = 75 \text{ МПа}.$$

Площади поперечных сечений стержней с учетом заданного соотношения площадей  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$  или  $A_1 = A, A_2 = 4A, A_3 = 2A$ :

$$A_1 = A \geq \frac{N_1}{[\sigma]_1} = \frac{5,26 \cdot 10^{-3}}{147} = 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 = 4A \geq \frac{N_2}{[\sigma]_2} = \frac{4,12 \cdot 10^{-3}}{134} = 0,307 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,077 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 = 2A \geq \frac{N_3}{[\sigma]_3} = \frac{2,38 \cdot 10^{-3}}{75} = 0,317 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,159 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За допускаемое значение  $A$  принимаем максимальное из всех полученных  $A = 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ . Так как максимум  $A$  реализуется для стержня 1, то напряжение в нем будет равно допускаемому, а напряжения в других стержнях будут меньше допускаемых. Действительные площади стержней:

$$A_1^* = A = 0,358 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2^* = 4A = 1,432 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3^* = 2A = 0,716 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

*Ответ*

**Построение действительной диаграммы перемещений.** Для проверки правильности полученного решения строим действительную диаграмму перемещений (рис. 1.6). Предварительно найдем длины и удлинения (укорочения) стержней:

$$l_1 = l = 1 \text{ м}; \quad l_2 = l/\cos\alpha = 1/0,866 = 1,155 \text{ м};$$

$$l_3 = l/\cos\beta = 1/0,5 = 2,0 \text{ м};$$

$$\Delta l_1 = \frac{5,26 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,358 \cdot 10^{-4}} = 7,346 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,735 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{4,12 \cdot 10^{-3} \cdot 1,155}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 1,432 \cdot 10^{-4}} = 4,746 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,475 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{2,38 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{1 \cdot 10^5 \cdot 0,716 \cdot 10^{-4}} = 6,648 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,665 \text{ мм}.$$

Для построения действительной диаграммы перемещений отложим от точки  $B$  по направлениям соответствующих стержней удлинение  $\Delta l_1$ , укорочения  $\Delta l_2$ ,  $\Delta l_3$  и получим точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  соответственно (см. рис. 1.6). Если теперь из точек  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  восстановить перпендикуляры к стержням 1, 2, 3 соответственно, то эти перпендикуляры должны пересечься в одной точке  $B^*$ .

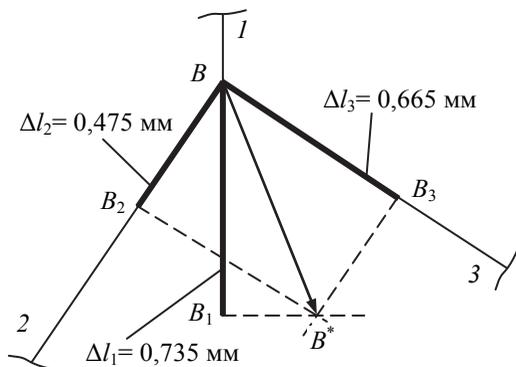


Рис. 1.6. Действительная диаграмма перемещений

**Определение коэффициентов запаса прочности стержней.** Вычислим действительные коэффициенты запаса прочности  $n_i$  каждого стержня:

$$n_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{(1)}} = \frac{\sigma_T}{(N_1/A_1)} = \frac{220}{(5,26 \cdot 10^{-3} / (0,358 \cdot 10^{-4}))} = 1,5 = [n_T]_1;$$

$$n_2 = \frac{\sigma_B}{\sigma_{(2)}} = \frac{\sigma_B}{(N_2/A_2)} = \frac{470}{(4,12 \cdot 10^{-3} / (1,432 \cdot 10^{-4}))} = 16,3 > [n_B]_2 = 3,5;$$

$$n_3 = \frac{\sigma_B}{\sigma_{(3)}} = \frac{\sigma_B}{(N_3/A_3)} = \frac{300}{(2,38 \cdot 10^{-3} / (0,716 \cdot 10^{-4}))} = 9,0 > [n_B]_3 = 4,0.$$

Ответ

## 2. Стержневая система с жестким элементом

Плоская стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 1.7). Стержни изготовлены из разных материалов, механические характеристики которых приведены в табл. 1.2. Исходные данные:  $F = 10$  кН,  $l = 1,0$  м,  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

Требуется определить:

- 1) площади поперечных сечений стержней;
- 2) коэффициент запаса прочности каждого стержня.

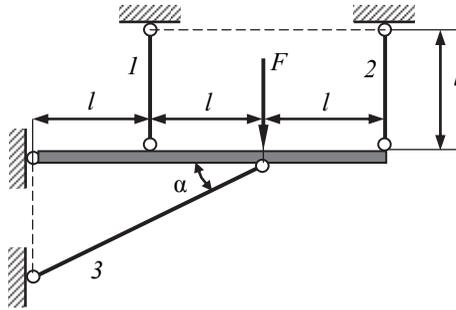


Рис. 1.7. Стержневая система с жестким элементом

## Решение

**Уравнения равновесия.** Выбираем систему координат  $x, y$  (рис. 1.8). Рассекаем стержни и рассматриваем равновесие жесткого (твердого) тела под действием силы  $F$ , усилий в стержнях  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и реакций в шарнире  $Y_B, X_B$  (рис. 1.8). Полагаем, что стержни 1, 2 растянуты, стержень 3 сжат.

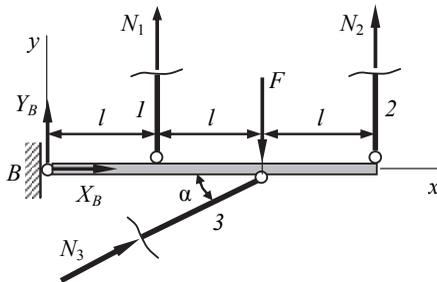


Рис. 1.8. Расчетная схема системы для определения усилий в стержнях

Для плоской системы можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum x = 0 \quad X_B + N_3 \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad Y_B + N_1 + N_2 + N_3 \sin \alpha - F = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_B = 0 \quad N_1 l + N_2(3l) + (N_3 \sin \alpha) 2l - F(2l) = 0 \rightarrow$$

$$N_1 + 3N_2 + N_3 = 2F. \quad (3)$$

Имеем неизвестных – пять ( $N_1, N_2, N_3, Y_B, X_B$ ), уравнений статики – три. Следовательно, система два раза статически неопределима. Необходимо дополнительно составить два уравнения перемещений.

**Уравнения перемещений.** Составим уравнения перемещений, выражающие связи между изменениями длин стержней, которые графически изображаются диаграммой перемещений. Для этого дадим системе возможное перемещение, совместимое с наложенными ограничениями (связями). В рассматриваемом случае – это поворот жесткого элемента вниз вокруг шарнира  $B$  (рис. 1.9). В этом случае диаграмма перемещений находится в соответствии с силовой диаграммой (рис. 1.8) – стержни 1, 2 растянуты, а стержень 3 сжат. Для определения укорочения стержня 3 из точки  $C_1$  опускаем перпендикуляр на направление стержня 3 (рис. 1.9). Здесь обозначено: отрезок  $KK_1 = \Delta l_1$  – удлинение стержня 1, отрезок  $DD_1 = \Delta l_2$  – удлинение стержня 2, отрезок  $CC_2 = \Delta l_3$  – укорочение стержня 3.

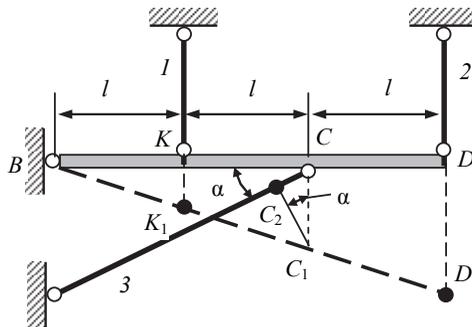


Рис. 1.9. Предполагаемая диаграмма перемещений

Учитывая заданные размеры, из геометрических соображений имеем:

$$\frac{KK_1}{DD_1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CC_1}{DD_1} = \frac{2}{3}. \quad (4)$$

Из рис. 1.9 следует:

$$\Delta l_1 = KK_1, \Delta l_2 = DD_1, \Delta l_3 = CC_2 = CC_1 \sin \alpha. \quad (5)$$

Из (4) с учетом (5) получим два уравнения перемещений:

$$\Delta l_2 = 3\Delta l_1, 3\Delta l_3 = 2\Delta l_2 \sin \alpha. \quad (6)$$

Выразим удлинения (укорочения)  $\Delta l_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) через усилия в стержнях, используя формулу

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}.$$

Учитывая заданное соотношение площадей  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ , принимаем  $A_2 = 4A_1, A_3 = 2A_1$ .

Из табл. 1.2 следует, что  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$  МПа,  $E_3 = 1 \cdot 10^5$  МПа.

Длины стержней определяются из рис. 1.7

$$l_1 = l, l_2 = l, l_3 = 2l/\cos \alpha.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (6), с учетом  $\alpha = 30^\circ, l = 1,0$  м получаем уравнения перемещений, выраженные через внутренние силы  $N_i$

$$0,238N_2 = N_1, N_3 = 0,103N_2. \quad (7)$$

**Усилия в стержнях.** Для определения усилий  $N_i$  в стержнях используем систему уравнений, состоящую из уравнений (3), (7). Эта система будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} N_1 + 3N_2 + N_3 &= 2F, \\ 0,238N_2 &= N_1, \\ N_3 &= 0,103N_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решая систему (8) с учетом  $F = 10$  кН, получаем

$N_1 = 1,425$  кН (стержень растянут);

$N_2 = 5,986$  кН (стержень растянут);

$N_3 = 0,617$  кН (стержень сжат).

### Определение площадей поперечных сечений стержней

$$A_i = \frac{N_i}{[\sigma]_i}, \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$[\sigma]_1 = \sigma_T / [n_T] = 220 / 1,5 = 147 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_2 = \sigma_B / [n_B] = 470 / 3,5 = 134 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_3 = \sigma_B / [n_B] = 300 / 4,0 = 75 \text{ МПа}.$$

Площади поперечных сечений стержней с учетом заданного соотношения площадей  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 2$ , или  $A_1 = A$ ,  $A_2 = 4A$ ,  $A_3 = 2A$ :

$$A_1 = A \geq \frac{N_1}{[\sigma]_1} = \frac{1,425 \cdot 10^{-3}}{147} = 0,969 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,969 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_2 = 4A \geq \frac{N_2}{[\sigma]_2} = \frac{5,986 \cdot 10^{-3}}{134} = 4,467 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 1,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_3 = 2A \geq \frac{N_3}{[\sigma]_3} = \frac{0,617 \cdot 10^{-3}}{75} = 0,823 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2; \rightarrow A \geq 0,411 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

За допускаемое значение  $A$  принимаем максимальное из всех полученных  $A = 1,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ . Так как максимум  $A$  реализуется для стержня 2, то напряжение в нем будет равно допускаемому, а напряжения в других стержнях будут меньше допускаемых. Действительные площади стержней:

$$A_1^* = A = 1,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_2^* = 4A = 4,468 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2;$$

$$A_3^* = 2A = 2,234 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

*Ответ*

**Построение действительной диаграммы перемещений.** Для проверки правильности полученного решения строим действительную диаграмму перемещений (рис. 1.10). Предварительно найдем длины и удлинения (укорочения) стержней:

$$l_1 = l = 1 \text{ м}; \quad l_2 = l = 1 \text{ м}; \quad l_3 = 2l / \cos \alpha = 2 \cdot 1 / 0,866 = 2,31 \text{ м};$$

$$\Delta l_1 = \frac{1,425 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,117 \cdot 10^{-5}} = 0,638 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,638 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{5,986 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 4,468 \cdot 10^{-5}} = 1,914 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,914 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{0,617 \cdot 10^{-3} \cdot 2,31}{1 \cdot 10^5 \cdot 2,234 \cdot 10^{-5}} = 0,638 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,638 \text{ мм}.$$

Для построения действительной диаграммы перемещений отложим по направлениям соответствующих стержней удлинения  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$ , укорочение  $\Delta l_3$  и получим точки  $K_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$  соответственно (рис. 1.10). Далее из точки  $C$  проведем перпендикуляр к жесткому элементу до пересечения с прямой  $BK_1D_1$  – получаем точку  $C_1$ . Если из точки  $C_1$  восстановим перпендикуляр на направление стержня 3 соответственно, то перпендикуляр должен пересечь направление стержня 3 в точке  $C_2$ .

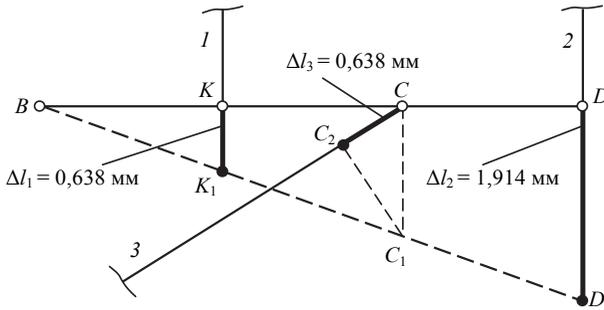


Рис. 1.10. Действительная диаграмма перемещений

**Определение коэффициентов запаса прочности стержней.** Вычислим действительные коэффициенты запаса прочности  $n_i$  стержней:

$$n_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_{(1)}} = \frac{\sigma_T}{(N_1/A_1)} = \frac{220}{(1,425 \cdot 10^{-3}/(1,117 \cdot 10^{-5}))} = 1,7 > [n_T]_1 = 1,5;$$

$$n_2 = \frac{\sigma_B}{\sigma_{(2)}} = \frac{\sigma_B}{(N_2/A_2)} = \frac{470}{(5,986 \cdot 10^{-3}/(4,468 \cdot 10^{-5}))} = 3,5 = [n_B]_2;$$

$$n_3 = \frac{\sigma_B}{\sigma_{(3)}} = \frac{\sigma_B}{(N_3/A_3)} = \frac{300}{(0,617 \cdot 10^{-3}/(2,234 \cdot 10^{-5}))} = 10,9 > [n_B]_3 = 4,0$$

Ответ

## 2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

### Задача. Расчет напряженного и деформированного состояния, оценка прочности малого элемента тела

В окрестности точки твердого деформируемого тела выделен бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.1). Значения напряжений на площадках параллелепипеда и линейные деформации в направлениях координатных осей приведены в табл. 2.1. При расчете принять: модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ; предел текучести  $\sigma_T = 300$  МПа; допускаемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

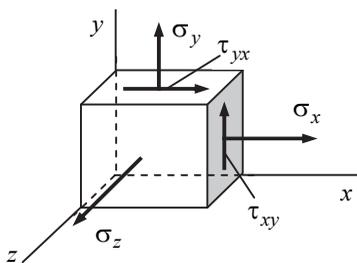


Рис. 2.1. Напряженное состояние в точке

Требуется:

1) определить:

- недостающее значение одного из нормальных напряжений;
- главные напряжения и положение главных площадок; изобразить элемент графически повернутым так, чтобы все его грани стали главными площадками, и показать главные напряжения;

2) проверить прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела, используя критерии прочности для пластичных материалов.

- наибольшее касательное напряжение;
- объемную деформацию.

2) проверить прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела, используя критерии прочности для пластичных материалов.

**Указание.** Направления сил, действующих на исходных площадках параллелепипеда, изобразить в соответствии с их знаками для рассматриваемого варианта (см. табл. 2.1).

Т а б л и ц а 2.1

**Исходные данные к задаче**

Номер строки	Напряжение, МПа				Деформация, $10^{-4}$		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_z$
1	50	-30		-20	4,15		
2	60	50		30		3,70	
3	40	-60		-40			1,50
4		20	-70	20	-0,75		
5		-40	50	-30		-3,20	
6		60	40	40			-1,95
7	-30		80	30	-3,30		
8	50		-60	-20		-1,85	
9	-70		40	40			2,45
0		80	-50	-50	2,25		
	е			г	д		

*Пример расчета и оформления задачи*

В окрестности точки твердого деформируемого тела выделен бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.1). Значения напряжений на площадках параллелепипеда и линейные деформации в направлениях координатных осей приведены в табл. 2.2.

При расчете принять: модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , предел текучести материала  $\sigma_T = 300$  МПа, допускаемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 2$ .

Т а б л и ц а 2.2

**Исходные данные к примеру расчета**

Напряжение, МПа				Деформация, $10^{-4}$		
$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_z$
40	30	-	20	3,50	-	-

Требуется:

1) определить:

- недостающее значение одного из нормальных напряжений;

- главные напряжения и положение главных площадок; изобразить элемент графически повернутым так, чтобы все его грани стали главными площадками, и показать главные напряжения;
  - наибольшее касательное напряжение;
  - объемную деформацию.
- 2) проверить прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела, используя критерии прочности для пластичных материалов.

## Решение

**Расчетная схема.** Изображаем малый элемент в соответствии с исходными данными к задаче (рис. 2.2).

**Недостающее значение одного из нормальных напряжений.** Для определения недостающего значения нормального напряжения  $\sigma_z$  используем одно из уравнений обобщенного закона Гука. Так как известна деформация  $\varepsilon_x = 3,5 \cdot 10^{-4}$ , то имеем

$$\varepsilon_x = (1/E) [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

$$3,5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [40 - 0,3(30 + \sigma_z)],$$

$$\sigma_z = -130 \text{ МПа.}$$

*Ответ*

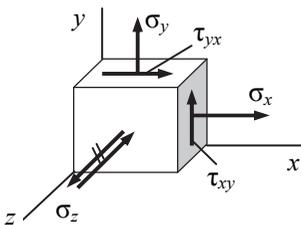


Рис. 2.2. Напряженное состояние малого элемента

В результате решения напряжение  $\sigma_z$  получилось с отрицательным знаком. Поэтому первоначально заданное направление этого напряжения меняем на противоположное направление (рис. 2.2).

**Главные напряжения. Главные площадки.** В рассматриваемом случае все площадки не свободны от напряжений, т. е. заданное напряженное состояние является объемным (трехосным). Однако особенностью данной задачи является то, что одна из исходных площадок, а именно площадка действия  $\sigma_z$ , главная. Следовательно, одно из главных напряжений ( $\sigma_z$ ) известно.

Площадки действия остальных двух главных напряжений принадлежат серии площадок, параллельных оси  $z$ . Напряжения, возникающие на площадках указанной серии, очевидно, не зависят от  $\sigma_z$  и для их определения возможно применение формул плоского напряженного состояния.

Среди площадок рассматриваемой серии есть две главные площадки, направления нормалей к которым определяются по формуле (значения напряжений следует подставлять со своими знаками)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+20)}{(+40) - (+30)} = 4,$$

$$2\alpha_0 = 76^\circ \rightarrow \alpha_0 = 38^\circ. \quad \text{Ответ}$$

Для определения недостающих главных напряжений воспользуемся формулой (значения напряжений следует подставлять со своими знаками)

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{40 + 30}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(40 - 30)^2 + 4 \cdot 20^2} = 35 \pm 20,6 \text{ (МПа)}.$$

Окончательно имеем следующие значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 55,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = 14,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -130 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

На рис. 2.3 показаны положения главных площадок и главных напряжений.

**Наибольшие касательные напряжения.** Используем следующую формулу (значения напряжений следует подставлять со своими знаками):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{55,6 - (-130)}{2} = 92,8 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

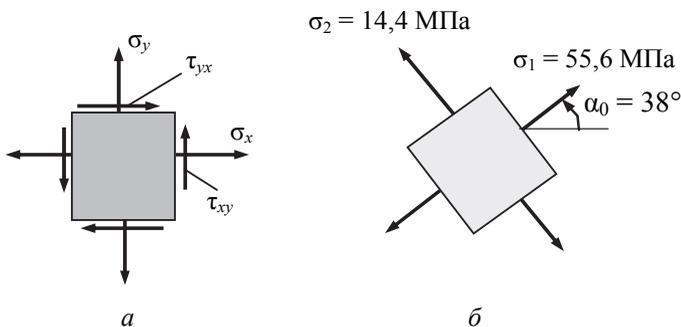


Рис. 2.3. Заданное напряженное состояние элемента (а) и площадки действия главных напряжений (б)

**Объемная деформация.** Объемную деформацию (относительное изменение объема) при малых линейных деформациях определяют по одной из следующих формул:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (1)$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \quad (2)$$

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}, \quad (3)$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  – объемный модуль упругости.

Воспользуемся, например, формулой (1). Используя обобщенный закон Гука, получим следующие результаты (значения напряжений следует подставлять со своими знаками):

$$\varepsilon_x = (1/E)[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [40 - 0,3(30 - 130)] = 35 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = (1/E)[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [30 - 0,3(-130 + 40)] = 28 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = (1/E)[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-130 - 0,3(40 + 30)] = -75,5 \cdot 10^{-5}.$$

Окончательно объемная деформация

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 35 \cdot 10^{-5} + 28,5 \cdot 10^{-5} - 75,5 \cdot 10^{-5} = -12 \cdot 10^{-5} \quad \text{Ответ}$$

**Проверка прочности материала по критериям прочности для пластичных материалов.** При расчете с применением критериев прочности условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma].$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]} = \frac{300}{2} = 150 \text{ МПа.}$$

Для оценки прочности пластичных материалов применяются следующие критерии прочности.

- Критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 55,6 - (-130) = 185,6 \text{ МПа} > [\sigma],$$

т. е. прочность недостаточна.

*Ответ*

- Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(55,6 - 14,4)^2 + (14,4 - (-130))^2 + (-130 - 55,6)^2} = \\ &= 169,3 \text{ МПа} > [\sigma], \end{aligned}$$

т. е. прочность недостаточна.

*Ответ*

Таким образом, оба критерия показали, что прочность материала в окрестности рассматриваемой точки тела недостаточна.

### 3. КРУЧЕНИЕ

#### Задача. Расчет статически неопределимого стержня на прочность и жесткость при кручении

Стальной стержень постоянного поперечного сечения жестко заземлен по торцам и нагружен двумя скручивающими моментами (рис. 3.1). Модуль сдвига материала  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа. Исходные данные приведены в табл. 3.1.

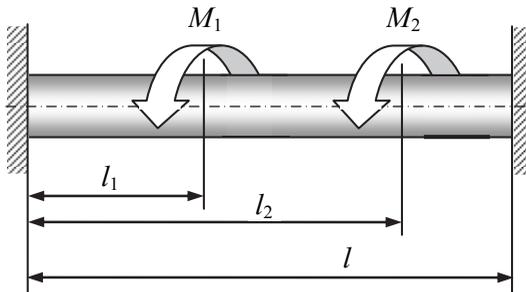


Рис. 3.1. Расчет статически неопределимого стержня

Требуется:

1) определить размеры поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости при кручении для следующих случаев:

- круглое сплошное сечение диаметром  $d$ ;
- кольцевое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров  $d/D$ ;
- прямоугольное сечение с отношением сторон  $h/b$ .

2) сопоставить массы стержней с различной формой сечения по п. 1 и указать наиболее рациональное поперечное сечение;

2. Построить эпюры углов поворота  $\varphi$  поперечных сечений стержня с круглым сплошным поперечным сечением диаметром  $d$ .

**Указание.** Направление сил на расчетной схеме для рассматриваемого варианта изобразить в соответствии с их знаками, приведенными в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Исходные данные к задаче**

Номер строки	Момент, кН·м		Линейный размер, м			[ $\tau$ ], МПа	[ $\theta$ ], град/м	$d/D$	$h/b$
	$M_1$	$M_2$	$l$	$l_1$	$l_2$				
1	1	-10	1,0	0,2	0,6	50	0,2	0,6	1,5
2	-2	9	1,1	0,3	0,7	60	0,3	0,7	2,0
3	3	-8	1,2	0,4	0,8	70	0,4	0,8	2,5
4	4	7	1,3	0,3	0,6	80	0,5	0,9	3,0
5	-5	6	1,4	0,4	1,0	50	0,6	0,6	3,5
6	6	5	1,5	0,5	1,0	60	0,2	0,7	4,0
7	-7	4	1,6	0,6	1,2	70	0,3	0,8	1,5
8	8	3	1,8	0,8	1,2	80	0,4	0,9	2,0
9	9	2	1,9	0,9	1,5	50	0,5	0,6	2,5
0	10	1	2,0	0,8	1,4	60	0,6	0,8	3,0
	е		д			г	д	е	г

*Пример расчета и оформления задачи*

Стальной стержень постоянного поперечного сечения жестко заземлен по торцам и нагружен двумя скручивающими моментами. Расчетная схема стержня в соответствии с исходными данными представлена на рис. 3.2. Модуль сдвига материала  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

Таблица 3.2

**Исходные данные**

Момент, кН·м		Линейный размер, м			[ $\tau$ ], МПа	[ $\theta$ ], град/м	$d/D$	$h/b$
$M_1$	$M_2$	$l$	$l_1$	$l_2$				
12	-8	1,0	0,3	0,7	50	0,5	0,8	1,5

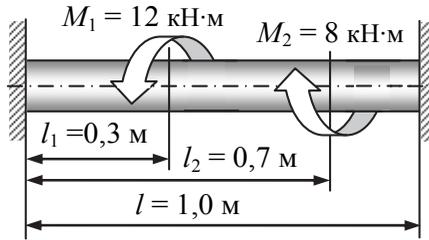


Рис. 3.2. Расчетная схема стержня

Требуется:

1) определить размеры поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости при кручении для следующих случаев:

- круглое сплошное сечение диаметром  $d$ ;
- кольцевое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров  $d/D$ ;
- прямоугольное сечение с отношением сторон  $h/b$ ;

2) сопоставить массы стержней с различной формой сечения по п. 1 и указать наиболее рациональное поперечное сечение;

3) построить эпюры углов поворота  $\varphi$  поперечных сечений стержня с круглым сплошным поперечным сечением диаметром  $d$ .

### Решение

**Уравнение равновесия.** В заделках возникают реактивные пары сил с моментами  $M_B$  и  $M_O$  (рис. 3.3, а). Для системы пар сил, лежащих в параллельных плоскостях, статика дает только одно уравнение равновесия:

$$\sum M_x = 0; \quad M_B - M_1 + M_2 - M_O = 0 \rightarrow$$

$$M_B - M_O = M_1 - M_2. \quad (1)$$

Неизвестных реактивных моментов два, следовательно, система один раз статически неопределима. Для определения неизвестных необходимо дополнительно составить уравнение перемещений.

**Уравнение перемещений.** Для составления уравнения перемещений отбросим правую заделку. Вместо заделки приложим к торцу стержня неизвестный реактивный момент  $X = M_O$  (рис. 3.3, б). Полу-

ченный таким образом статически определимый стержень эквивалентен заданному и поэтому угол поворота сечения  $O$  равен нулю, так как по условию задачи это сечение жестко заделано

$$\varphi_O = 0.$$

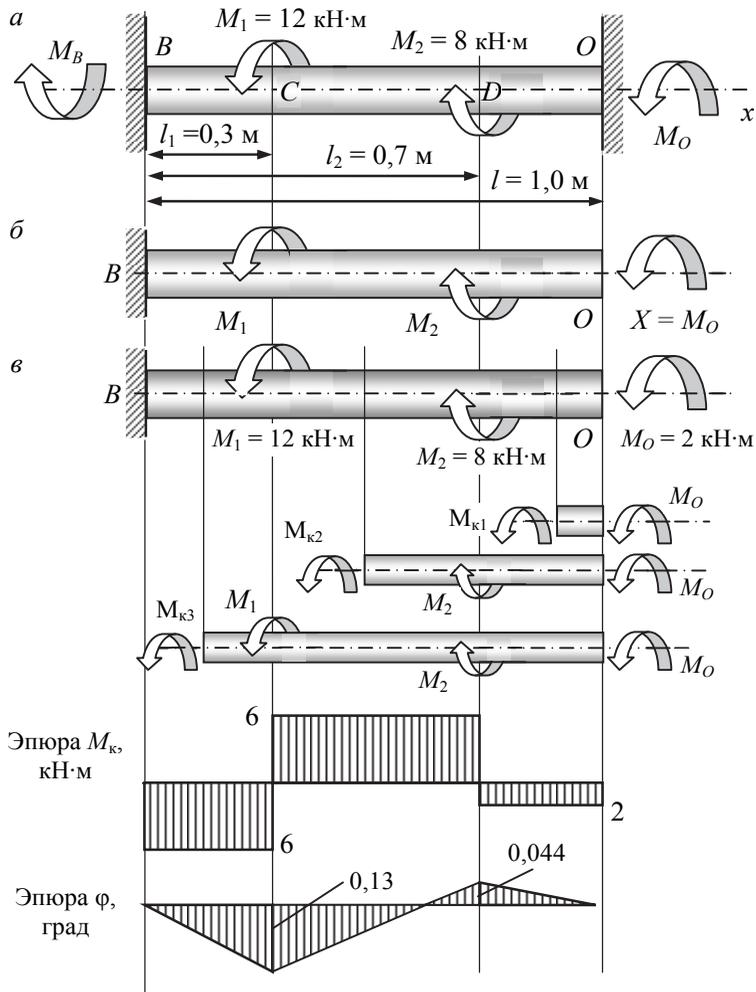


Рис. 3.3. Расчетная схема (а) и результаты решения задачи (б, в)

Применяя принцип независимости действия сил, запишем уравнение перемещений  $\varphi_O = 0$  в виде

$$\varphi_O = \varphi_O(M_1) + \varphi_O(M_2) + \varphi_O(X) = 0, \quad (2)$$

где  $\varphi_O(M_1) = -\frac{M_1 l_1}{GI_p} = -\frac{12 \cdot 0,3}{GI_p} = -\frac{3,6}{GI_p}$  – угол поворота сечения  $O$  от действия момента  $M_1$ ;

$$\varphi_O(M_2) = \frac{M_2 l_2}{GI_p} = \frac{8 \cdot 0,7}{GI_p} = \frac{5,6}{GI_p} \text{ – то же от момента } M_2;$$

$$\varphi_O(X) = -\frac{Xl}{GI_p} = -\frac{X \cdot 1,0}{GI_p} = -\frac{X}{GI_p} \text{ – то же от момента } X = M_O.$$

■ Знаки в выражениях углов поворота приняты такими же, как знаки соответствующих моментов в уравнении равновесия.

Подставляя значения углов поворота  $\varphi_O(M_1)$ ,  $\varphi_O(M_2)$  и  $\varphi_O(X)$  в уравнение перемещений (2), получаем

$$-\frac{3,6}{GI_p} + \frac{5,6}{GI_p} - \frac{X}{GI_p} = 0,$$

откуда  $X = M_O = 2$  кН·м. Знак плюс указывает, что направление момента  $M_O$  выбрано правильно.

Из уравнения равновесия (1) получаем  $M_B = 6$  кН·м.

**Построение эпюры крутящих моментов.** Методика построения эпюры крутящего момента аналогична методике построения эпюры нормальных сил  $N$ .

■ **Правило знаков:** считаем крутящий момент в сечении положительным, когда внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения.

На рис. 3.3, в в сечениях стержня показаны положительные направления крутящих моментов  $M_k$ .

Применяя метод сечений (см. рис. 3.3, в), получаем следующие результаты:

- *участок OD*

$$\sum x = 0 M_{k1} + M_O = 0 \rightarrow M_{k1} = -M_O = -2 \text{ кН·м,}$$

так как внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке;

- участок  $DC$

$$\sum x = 0M_{к2} - M_2 + M_O = 0 \rightarrow M_{к2} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

- участок  $CB$

$$\sum x = 0M_{к3} + M_1 - M_2 + M_O = 0 \rightarrow M_{к3} = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из построенной эпюры  $M_k$  (рис. 3.3, в) следует, что наибольшие по абсолютной величине крутящие моменты возникают в сечениях участков  $BC$  и  $CD$ . Следовательно, расчетный крутящий момент по абсолютной величине равен

$$|M_{к\max}| = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### **Определение размеров поперечного сечения стержня**

1. Круглое сплошное поперечное сечение диаметра  $d$ .

- Определяем диаметр вала из расчета на прочность: условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{к\max}}{W_p} \leq [\tau],$$

полярный момент сопротивления

$$W_p \geq \frac{M_{к\max}}{[\tau]} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \text{ МН}\cdot\text{м}}{50 \text{ МПа}} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}},$$

$$d(W_p) \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}}{3,14}} \geq 0,0849 \text{ м} \geq 84,9 \text{ мм}.$$

- Определяем диаметр вала из расчета на жесткость: условие жесткости

$$\theta = \frac{M_{к\max}}{GI_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

полярный момент инерции

$$I_p \geq \frac{M_{\text{к max}}}{G[\theta]} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{(6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}) \cdot 180^\circ}{(0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа})(0,5 \text{ град} / \text{м}) \cdot 3,14} = 0,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{32 I_p}{\pi}},$$

$$d(I_p) \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,86 \cdot 10^{-5}}{3,14}} \geq 0,0968 \text{ м} \geq 96,8 \text{ мм}.$$

Округляя по ГОСТ 6636–69, окончательно принимаем  $d = 100 \text{ мм}$ .

*Ответ*

2. Кольцевое сечение с отношением внутреннего и наружного диаметров  $\alpha = d/D = 0,8$ .

- Определяем диаметры вала из расчета на прочность: полярный момент сопротивления (см. п. 1)

$$W_p \geq 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi (1 - \alpha^4)}},$$

$$D(W_p) \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}}{3,14 (1 - 0,8^4)}} \geq 0,1012 \text{ м} \geq 101,2 \text{ мм},$$

$$d = 0,8D = 81 \text{ мм}.$$

- Определяем диаметры вала из расчета на жесткость: полярный момент инерции (см. п. 1)

$$I_p \geq 0,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{32 I_p}{\pi (1 - \alpha^4)}},$$

$$D(I_p) \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 0,86 \cdot 10^{-5}}{3,14 (1 - 0,8^4)}} \geq 0,1105 \text{ м} \geq 110,5 \text{ мм},$$

$$d = 0,8D = 88,4 \text{ мм}.$$

Округляя по ГОСТ 6636–69, окончательно принимаем  $D = 112$  мм,  
 $d = 90$  мм.

*Ответ*

3. Прямоугольное сечение с отношением сторон  $h/b = 1,5$ .

- Определяем размеры вала из расчета на прочность: полярный момент сопротивления (см. п. 1)

$$W_K = W_p \geq 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$h = 1,5b; W_K = \alpha b^2 h = 1,5\alpha b^3; \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{W_K}{1,5\alpha}},$$

коэффициент  $\alpha$ , зависящий от отношения сторон ( $h/b$ ), принимается по таблице (см. [1, 2]):

$$\text{для } h/b = 1,5 \quad \alpha = 0,231,$$

$$b(W_K) \geq \sqrt[3]{\frac{0,12 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 0,231}} \geq 0,0703 \text{ м} \geq 70,3 \text{ мм},$$

$$h = 1,5b = 105,5 \text{ мм}.$$

- Определяем размеры вала из расчета на жесткость: полярный момент инерции (см. п. 1)

$$I_K = I_p \geq 0,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$h = 1,5b; I_K = \beta b^3 h = 1,5\beta b^4; \rightarrow b = \sqrt[4]{\frac{I_K}{1,5\beta}},$$

коэффициент  $\beta$ , зависящий от отношения сторон ( $h : b$ ), принимается по таблице (см. [1, 2]):

$$\text{для } h/b = 1,5 \quad \beta = 0,1955,$$

$$b(I_K) \geq \sqrt[4]{\frac{0,86 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 0,1955}} \geq 0,0736 \text{ м} \geq 73,6 \text{ мм}.$$

$$h = 1,5b = 110,4 \text{ мм}.$$

Округляя по ГОСТ 6636–69, окончательно принимаем

$$b = 75 \text{ мм}, h = 112 \text{ мм.} \quad \text{Ответ}$$

### **Сопоставление стержней с различной формой сечения по массе**

Масса стержня вычисляется по формуле

$$m = \rho A l,$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;  $l$  – длина стержня. В нашей задаче  $\rho$  и  $l$  постоянны, следовательно, при сравнении стержня по массе переменной является площадь поперечного сечения.

• Сравнение по массе стержней со сплошным круглым и кольцевым поперечным сечением:

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{кольц}}}{m_{\text{спл}}} &= \frac{A_{\text{кольц}}}{A_{\text{спл}}} = \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4}{\pi d^2 / 4} = \frac{D^2 (1 - \alpha^2)}{d^2} = \\ &= \frac{112^2 (1 - 0,8^2)}{100^2} = 0,45. \end{aligned} \quad \text{Ответ}$$

• Сравнение по массе стержней со сплошным круглым и прямоугольным поперечным сечением:

$$\frac{m_{\text{прямоуг}}}{m_{\text{спл}}} = \frac{A_{\text{прямоуг}}}{A_{\text{спл}}} = \frac{bh}{\pi d^2 / 4} = \frac{75 \cdot 112}{3,14 \cdot 100^2 / 4} = 1,07. \quad \text{Ответ}$$

• Сравнение по массе стержней с кольцевым и прямоугольным поперечным сечением:

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{прямоуг}}}{m_{\text{кольц}}} &= \frac{A_{\text{прямоуг}}}{A_{\text{кольц}}} = \frac{bh}{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4} = \\ &= \frac{75 \cdot 112}{3,14 \cdot 112^2 (1 - 0,8^2) / 4} = 2,37. \end{aligned} \quad \text{Ответ}$$

**Вывод:** наиболее рациональной формой поперечного сечения стержня при кручении является кольцевое (трубчатое) поперечное сечение, имеющее меньшую массу (вес).

**Построение эпюры углов поворота  $\varphi$  поперечных сечений стержня с круглым сплошным поперечным сечением.** Построение эпюры углов поворота поперечных сечений стержня (эпюры угловых перемещений) принципиально ничем не отличается от построения эпюры линейных перемещений при растяжении и сжатии. На каждом из участков эпюра будет линейной, поэтому для ее построения достаточно вычислить перемещения сечений, являющихся границами участков.

Построение эпюры начинаем от заделки, т. е. от неподвижного сечения,

$$\varphi_B = 0.$$

Угол поворота сечения  $C$

$$\begin{aligned}\varphi_C &= \frac{-M_{кBC} l_{BC}}{GI_p} = \\ &= -\frac{(6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м})(0,3 \text{ м})}{(0,784 \text{ МН} \cdot \text{м}^2)} = -0,002296 \text{ рад} = -0,13^\circ.\end{aligned}$$

Угол поворота сечения  $D$  равен алгебраической сумме углов поворота сечения  $C$  и сечения  $D$  относительно сечения  $C$  ( $\varphi_{CD}$ ):

$$\begin{aligned}\varphi_D &= \varphi_C + \varphi_{CD} = \varphi_C + \frac{M_{кCD} l_{CD}}{GI_p} = -0,002296 + \\ &+ \frac{(6 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м})(0,4 \text{ м})}{(0,784 \text{ МН} \cdot \text{м}^2)} = 0,000765 \text{ рад} = 0,044^\circ.\end{aligned}$$

Аналогично определяется угол поворота сечения  $O$

$$\begin{aligned}\varphi_O &= \varphi_D + \varphi_{DO} = \varphi_D + \frac{-M_{кDO} l_{DO}}{GI_p} = 0,000765 - \\ &- \frac{(2 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м})(0,3 \text{ м})}{(0,784 \text{ МН} \cdot \text{м}^2)} = 0,000765 - 0,000765 = 0.\end{aligned}$$

Полученный в результате решения задачи угол поворота в сечении  $O$ , равный нулю, подтверждает правильность решения задачи, так как по условию задачи (рис. 3.3, *а*) в сечении  $O$  находится заделка и, следовательно, угол поворота в этом сечении равен нулю. На рис. 3.3, *в* по этим данным построена эпюра угловых перемещений.

## 4. ИЗГИБ

### Задача 4.1. Построение эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов

Построить эпюры внутренних сил для комплекта расчетных схем, приведенных ниже. Исходные данные содержатся в табл. 4.1.

**Указание.** Сосредоточенные силы и моменты на расчетных схемах выразить через соответствующие величины по заданному отношению силовых факторов:

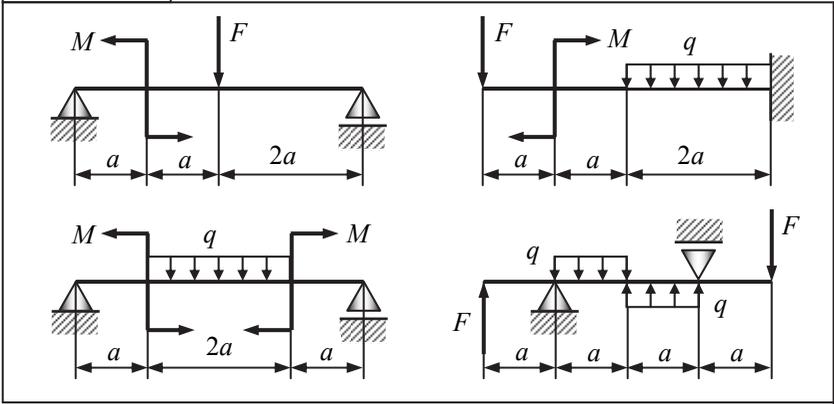
$$F = \alpha qa, \quad M = \beta qa^2.$$

Таблица 4.1

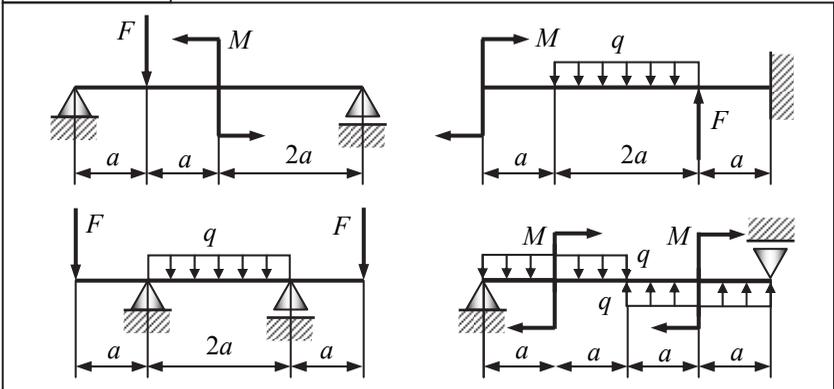
Исходные данные к задаче 4.1

Номер строки	Номер комплекта	Коэффициенты	
		$\alpha$	$\beta$
1	I	1	1
2	II	2	2
3	III	3	3
4	IV	4	4
5	V	5	5
6	VI	6	6
7	VII	7	7
8	VIII	8	8
9	IX	9	9
0	X	10	10
	e	д	г

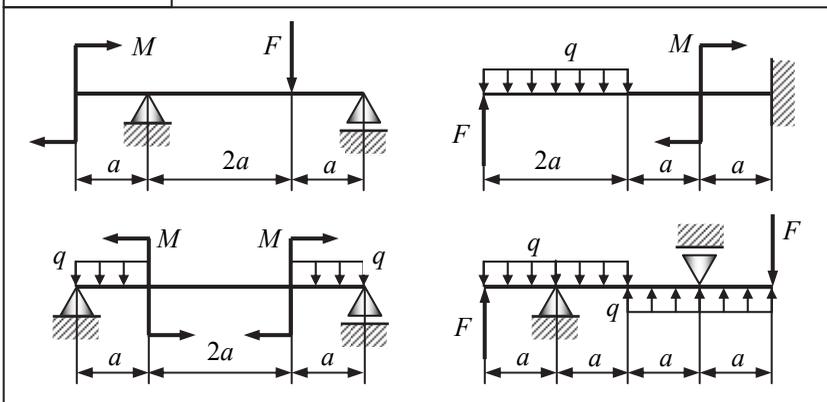
Комплект I



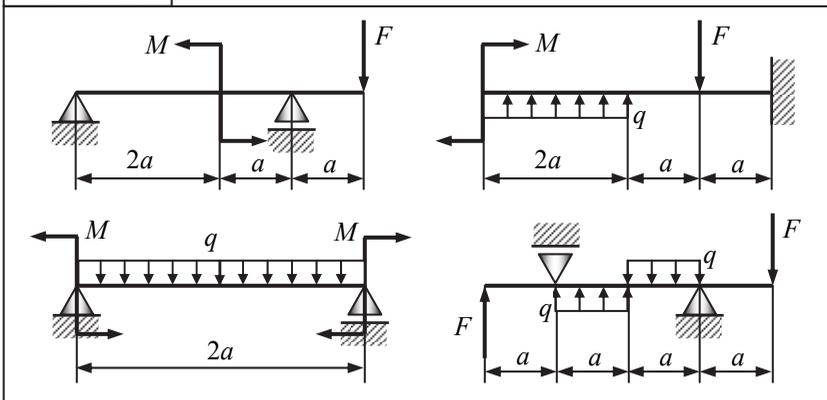
Комплект II



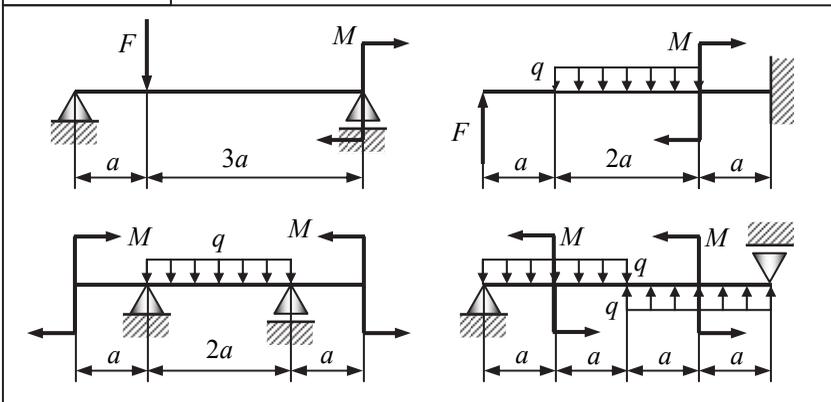
Комплект III



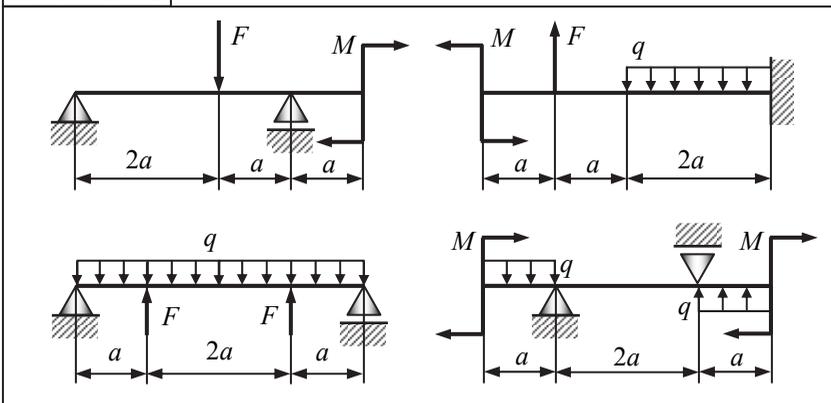
Комплект IV



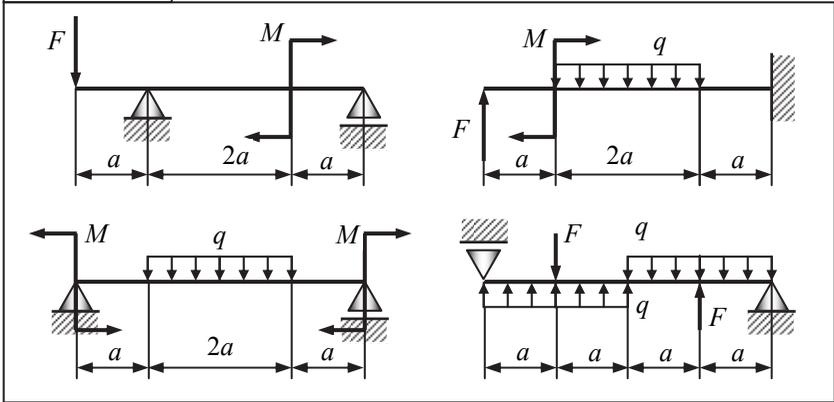
Комплект V



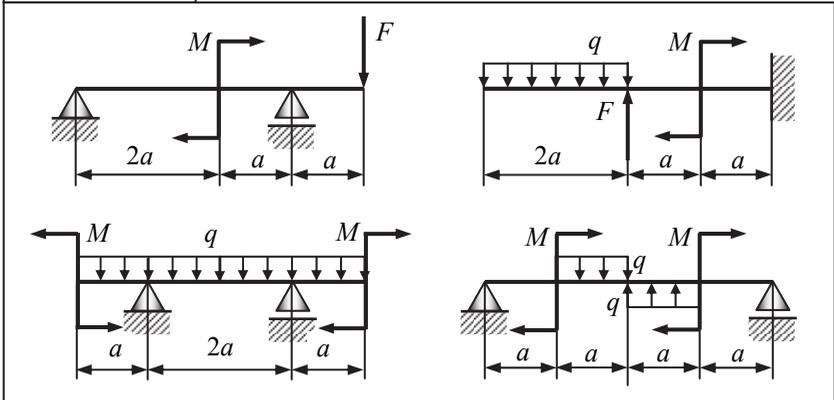
Комплект VI



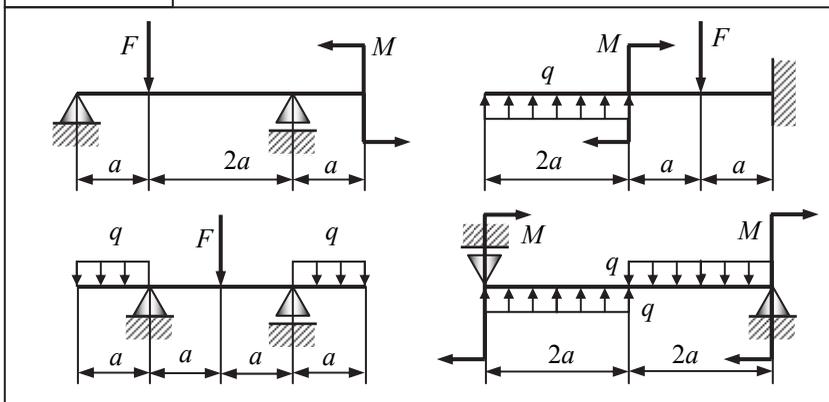
Комплект VII



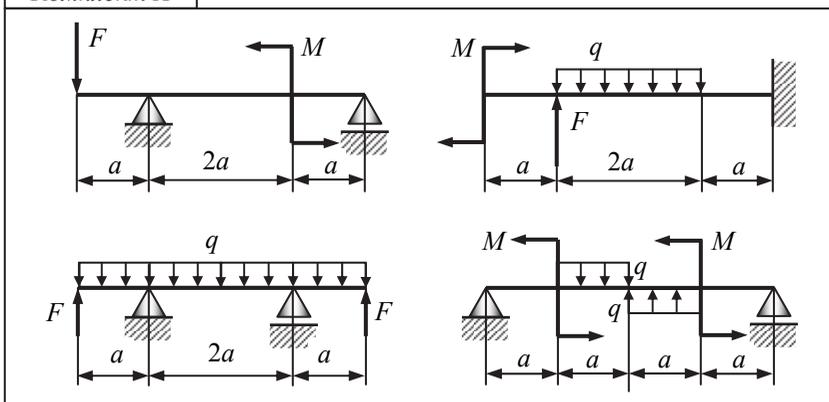
Комплект VIII



Комплект IX



Комплект X



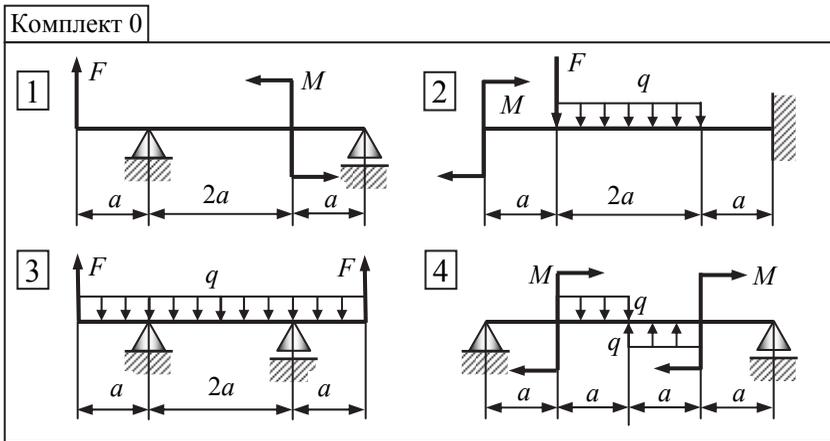
### Пример расчета и оформления задачи 4.1

Построить эпюры внутренних сил для комплекта расчетных схем, приведенных ниже.

Сосредоточенные силы и моменты на расчетных схемах выразить через соответствующие величины по заданному отношению силовых факторов:  $F = \alpha qa$ ,  $M = \beta qa^2$ .

#### Исходные данные к примеру 4.1

Коэффициенты	
$\alpha$	$\beta$
1	2



#### Решение

##### Расчетная схема 1

**Определение реакций опор.** Принимаем начало системы координат  $x$  на левом конце балки так, чтобы вся расчетная схема разместилась в первом квадранте (см. рис. 4.1).

Так как направления реакций опор  $R_B$  и  $R_C$  неизвестны, то полагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad Fa - M - R_C(3a) = 0 \rightarrow$$

$$R_C = \frac{Fa - M}{3a} = \frac{qa^2 - 2qa^2}{3a} = -\frac{1}{3}qa.$$

Знак минус означает, что исходное направление реакции  $R_C$  выбрано неправильно, в действительности, оно противоположно. Рекомендуется вектор  $R_C$  зачеркнуть, что нами сделано, и показать рядом истинное направление реакции со знаком плюс:

$$\sum m_C = 0 \quad F(4a) + R_B(3a) - M = 0,$$

$$R_B = \frac{-F(4a) + M}{3a} = \frac{-4qa^2 + 2qa^2}{3a} = -\frac{2}{3}qa.$$

В связи с отрицательным значением  $R_B$  поступаем аналогично действиям с реакцией  $R_C$ .

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

$$\sum y = 0 \quad F - R_B - R_C = 0 \rightarrow qa - (2/3)qa - (1/3)qa = 0,$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

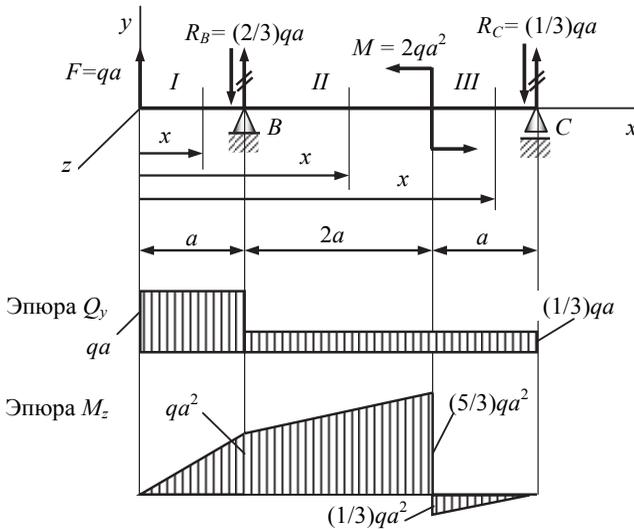


Рис. 4.1. Расчетная схема и эпюры

**Построение эпюр перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .** Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных

нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.1 эти участки обозначены цифрами I, II, III. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$ .

■ **Правило знаков:** при составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$ , как показано на рис. 4.2.

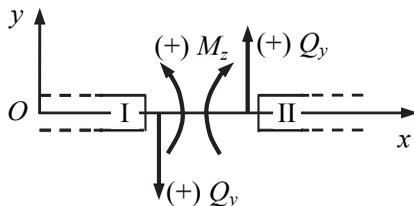


Рис. 4.2. Правило знаков

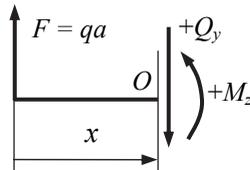
- **Участок I** ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$\sum y = 0 \quad F - Q_y = 0 \rightarrow Q_y = F = qa;$$

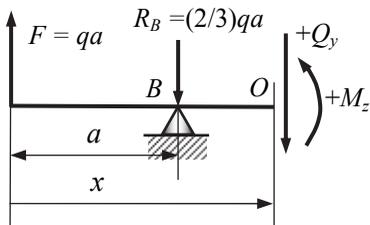
$$\sum m_O = 0 \quad Fx - M_z = 0 \rightarrow M_z = Fx = qax;$$

при  $x = 0 \quad M_z = 0,$

$$x = a \quad M_z = qa^2.$$



- **Участок II** ( $a \leq x \leq 3a$ ):



$$\sum y = 0 \quad F - R_B - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = F - R_B = qa - (2/3)qa = (1/3)qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad Fx - R_B(x - a) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = Fx - R_B(x - a) = qax - (2/3)qa(x - a);$$

при  $x = a \quad M_z = qa^2,$

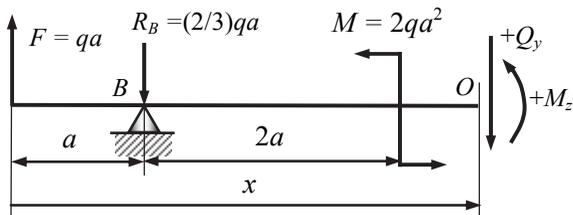
$$x = 3a \quad M_z = (5/3)qa^2.$$

- **Участок III** ( $3a \leq x \leq 4a$ )

■ При использовании метода сечений рекомендуется оставлять ту часть балки, которая нагружена меньшим числом нагрузок.

В связи с этим для участка III можно использовать два подхода:

1) как и для участков I и II, здесь рассматривается левая отсеченная часть балки:



$$\sum y = 0 \quad F - R_B - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = F - R_B = qa - (2/3)qa = (1/3)qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad Fx - R_B(x - a) - M - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = Fx - R_B(x - a) - M = qax - (2/3)qa(x - a) - 2qa^2;$$

при  $x = 3a$   $M_z = -(1/3)qa^2$ ,

$x = 4a$   $M_z = 0$ .

2) рассмотрим правую отсеченную часть:

$$\sum y = 0 \quad Q_y - R_C = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = R_C = (1/3)qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad M_z + R_C(4a - x) = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -R_C(4a - x) = -(1/3)qa(4a - x);$$

при  $x = 3a$   $M_z = -(1/3)qa^2$ ,

$x = 4a$   $M_z = 0$ .

Следовательно, для участка III удобнее рассматривать правую отсеченную часть балки, содержащую меньшее число нагрузок. Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис. 4.1.

### Расчетная схема 2

**Определение реакций опор.** Принимаем начало системы координат  $x$  на левом конце балки так, чтобы вся расчетная схема разместилась в первом квадранте (рис. 4.3).

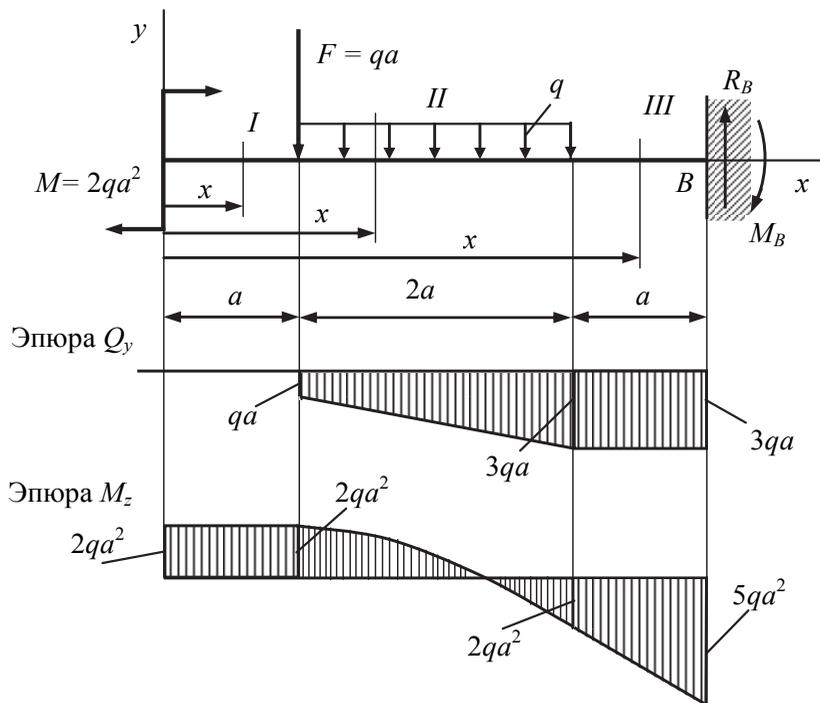


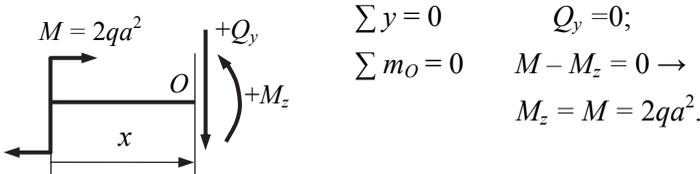
Рис. 4.3. Расчетная схема балки и эпюры

Для данной расчетной схемы можно не определять реакции в заделке  $B$ , если рассматривать участки, начиная от свободного торца и отбрасывая при использовании метода сечений каждый раз часть балки, содержащую заделку.

**Построение эпюр перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .** Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.3 эти участки обозначены цифрами  $I$ ,  $II$ ,  $III$ . Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$ .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$ .

- Участок I ( $0 \leq x \leq a$ ):



$$\begin{aligned} \sum y = 0 & \quad Q_y = 0; \\ \sum m_O = 0 & \quad M - M_z = 0 \rightarrow \\ & \quad M_z = M = 2qa^2. \end{aligned}$$

- Участок II ( $a \leq x \leq 3a$ ):

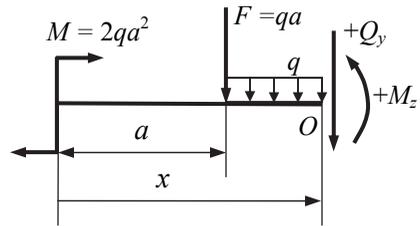
$$\sum y = 0$$

$$-F - q(x - a) - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F - q(x - a) = -qa - q(x - a):$$

$$\text{при } x = a \quad Q_y = -qa,$$

$$x = 3a \quad Q_y = -3qa;$$



здесь  $q(x - a)$  – равнодействующая равномерно распределенной нагрузки; на участке II перерезывающая сила  $Q_y$  изменяется по линейному закону;

$$\sum m_O = 0 \quad M - F(x - a) - q(x - a) \frac{(x - a)}{2} - M_z = 0 \rightarrow$$

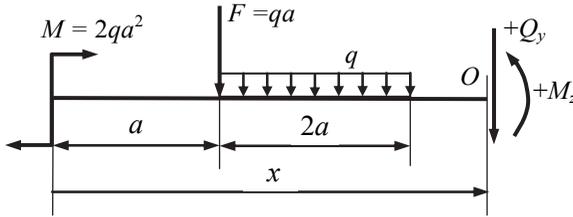
$$M_z = M - F(x - a) - q \frac{(x - a)^2}{2} = 2qa^2 - qa(x - a) - q \frac{(x - a)^2}{2}:$$

$$\text{при } x = a \quad M_z = 2qa^2,$$

$$x = 3a \quad M_z = -2qa^2;$$

здесь  $q(x - a) \frac{(x - a)}{2} = q \frac{(x - a)^2}{2}$  – момент относительно точки O равнодействующей распределенной нагрузки  $q(x - a)$ . При построении эпюры следует учесть, что на участке II изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы.

- Участок III ( $3a \leq x \leq 4a$ ):



$$\sum y = 0 \quad -F - q(2a) - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F - q(2a) = -qa - q(2a) = -3qa;$$

для участка III перерезывающая сила постоянна.

$$\sum m_O = 0 \quad M - F(x - a) - q(2a)(x - 2a) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = M - F(x - a) - 2qa(x - 2a) = 2qa^2 - qa(x - a) - 2qa(x - 2a):$$

при  $x = 3a \quad M_z = -2qa^2,$

$x = 4a \quad M_z = -5qa^2;$

на участке III момент изменяется по линейному закону.

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис. 4.3.

■ *Замечание.* В результате построения эпюр внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$  определены также величина и направление реакций в заделке B:

- $R_B = 3qa$  и направлено согласно правилу знаков для левой отсеченной части вверх;

- $M_B = 5qa^2$  и направлено согласно правилу знаков для левой отсеченной части так, что изгибает стержень выпуклостью вверх.

Для проверки указанных значений определим реакции в заделке B на основе уравнений равновесия:

$$\sum y = 0 \quad -F - q(2a) + R_B = 0$$

$$-qa - 2qa + R_B = 0 \rightarrow R_B = 3qa,$$

$$\sum m_B = 0 \quad M - F(3a) - q(2a)2a + M_B = 0$$

$$2qa^2 - 3qa^2 - 4qa^2 + M_B = 0 \rightarrow M_B = 5qa^2.$$

Полученные результаты полностью совпадают с ранее проведенными вычислениями при построении эпюр без определения реакций в заделке  $B$ . Таким образом, если вначале определить реакции в заделке  $B$ , а затем определять значения перерезывающих сил и изгибающих моментов, оставляя каждый раз после проведения сечения правую часть стержня, конечно получим те же результаты. Однако в этом случае в задаче необходимо выполнить больше действий (дополнительно составляется уравнение равновесия).

*Расчетная схема 3*

**Определение реакций опор.** Принимаем начало системы координат  $x$  на левом конце балки (рис. 4.4).

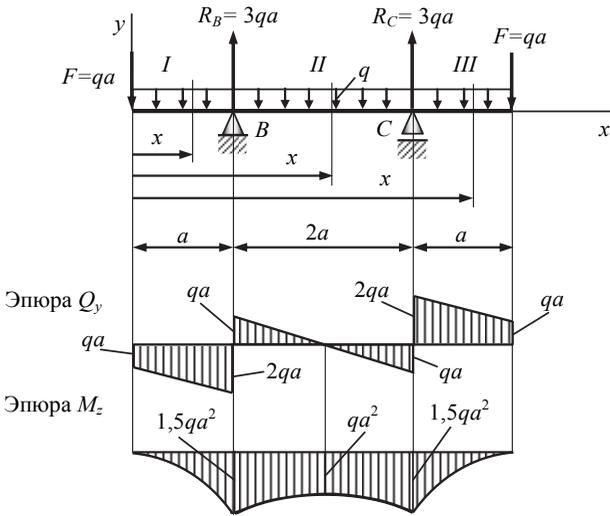


Рис. 4.4. Расчетная схема и эпюры

Так как направления реакций опор  $R_B$  и  $R_C$  неизвестны, то полагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad Fa - (q \cdot 4a)a + R_C \cdot 2a - F \cdot 3a = 0,$$

$$R_C = \frac{-Fa + 4qa^2 + 3Fa}{2a} = \frac{-qa^2 + 4qa^2 + 3qa^2}{2a} = 3qa.$$

$$\sum m_C = 0 \quad F \cdot 3a - R_B \cdot 2a + (q \cdot 4a)a - Fa = 0,$$

$$R_B = \frac{3Fa + 4qa^2 - Fa}{2a} = \frac{3qa^2 + 4qa^2 - qa^2}{2a} = 3qa.$$

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

$$\sum y = 0 \quad -F + R_B + R_C - q \cdot 4a - F = 0,$$

$$-qa + 3qa + 3qa - 4qa - qa = 0,$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

**Построение эпюр перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .** Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.4 эти участки обозначены цифрами I, II, III. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$ .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$ .

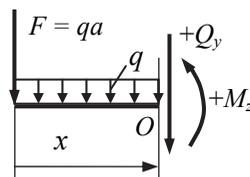
- *Участок I ( $0 \leq x \leq a$ ):*

$$\sum y = 0 \quad -F - qx - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F - qx = -qa - qx:$$

при  $x = 0 \quad Q_y = -qa,$

$x = a \quad Q_y = -2qa;$



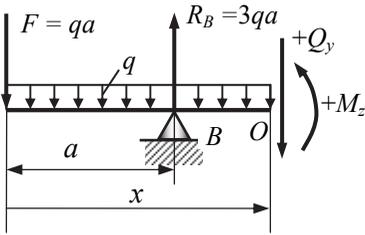
$$\sum m_O = 0 \quad -Fx - (qx)(x/2) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -Fx - qx^2/2 = -qax - qx^2/2:$$

при  $x = 0 \quad M_z = 0,$

$x = a \quad M_z = -1,5qa^2.$

- Участок II ( $a \leq x \leq 3a$ ):



$$\sum y = 0 \quad -F + R_B - qx - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -F + R_B - qx = -qa + 3qa - qx:$$

$$\text{при } x = a \quad Q_y = qa,$$

$$x = 3a \quad Q_y = -qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad -Fx - (qx)(x/2) + R_B(x-a) - M_z = 0$$

$$M_z = -Fx - qx^2/2 + R_B(x-a) = -qax - qx^2/2 + 3qa(x-a):$$

$$\text{при } x = a \quad M_z = -1,5qa^2,$$

$$x = 3a \quad M_z = -1,5qa^2.$$

Так как на участке II эпюра  $Q_y$  пересекает ось  $x$ , то в точке пересечения эпюра  $M_z$  будет иметь экстремальное значение. Для определения этого значения найдем точку пересечения  $x_0$  из уравнения

$$Q_y = -F + R_B - qx_0 =$$

$$= -qa + 3qa - qx_0 = 2qa - qx_0 = 0 \rightarrow x_0 = 2a;$$

$$M_z|_{x_0=2a} = -qa(2a) - q(2a)^2/2 + 3qa(2a-a) = -qa^2.$$

- Участок III ( $3a \leq x \leq 4a$ ):

$$\sum y = 0 \quad Q_y - q(4a-x) - F = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = q(4a-x) + qa$$

$$\text{при } x = 3a \quad Q_y = 2qa,$$

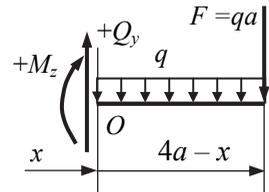
$$x = 4a \quad Q_y = qa;$$

$$\sum m_O = 0 \quad M_z + q(4a-x)^2/2 + F(4a-x) = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -q(4a-x)^2/2 - F(4a-x) = -q(4a-x)^2/2 - qa(4a-x):$$

$$\text{при } x = 3a \quad M_z = -1,5qa^2,$$

$$x = 4a \quad M_z = 0.$$



Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  приведены на рис. 4.4.

### Расчетная схема 4

**Определение реакций опор.** Принимаем начало системы координат  $x$  на левом конце балки (рис. 4.5).

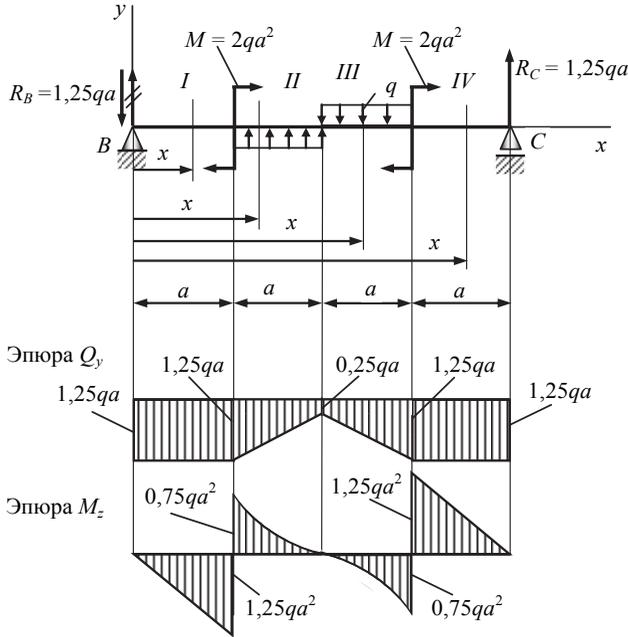


Рис. 4.5. Расчетная схема и эпюры

Так как направления реакций опор  $R_B$  и  $R_C$  неизвестны, то полагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad R_C \cdot 4a - M - (qa)2,5a + (qa)1,5a - M = 0,$$

$$R_C = \frac{M + 2,5qa^2 - 1,5qa^2 + M}{4a} = \frac{2qa^2 + qa^2 + 2qa^2}{4a} = 1,25qa.$$

$$\sum m_C = 0 \quad R_B \cdot 4a + M + (qa)2,5a - (qa)1,5a + M = 0,$$

$$R_B = \frac{-M - 2,5qa^2 + 1,5qa^2 - M}{4a} = \frac{-2qa^2 - qa^2 - 2qa^2}{4a} = -1,25qa.$$

Так как реакция  $R_B$  получилась отрицательной, на схеме (рис. 4.5) меняем ее направление на противоположное.

Для проверки правильности нахождения реакций опор используем уравнение

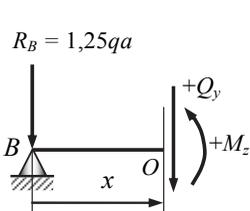
$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad -R_B + qa - qa + R_C = 0 \rightarrow \\ -1,25qa + qa - qa + 1,25qa = 0, \end{aligned}$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

**Построение эпюр перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .** Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.5 эти участки обозначены цифрами I, II, III, IV. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$ .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$ .

- Участок I ( $0 \leq x \leq a$ ):



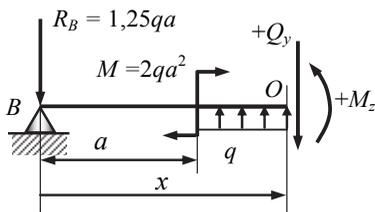
$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad -R_B - Q_y = 0 \rightarrow \\ Q_y = -R_B = -1,25qa; \\ \sum m_O = 0 \quad -R_B x - M_z = 0 \rightarrow \\ M_z = -R_B x = -1,25qax; \\ \text{при } x = 0 \quad M_z = 0, \quad x = a \quad M_z = -1,25qa^2. \end{aligned}$$

- Участок II ( $a \leq x \leq 2a$ ):

$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad -R_B + q(x - a) - Q_y = 0 \rightarrow \\ Q_y = -R_B + q(x - a) = \\ = -1,25qa + q(x - a); \end{aligned}$$

$$\text{при } x = a \quad Q_y = -1,25qa,$$

$$x = 2a \quad Q_y = -0,25qa;$$

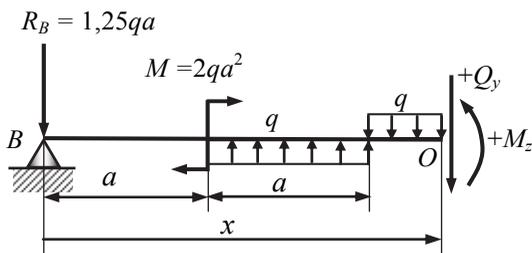


$$\sum m_O = 0 \quad -R_B x + M + q(x-a)(x-a)/2 - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -R_B x + M + q(x-a)^2/2 = -1,25qax + 2qa^2 + q \frac{(x-a)^2}{2}$$

при  $x = a$   $M_z = -0,75qa^2$ ,  $x = 2a$   $M_z = 0$ .

- Участок III ( $2a \leq x \leq 3a$ ):



$$\sum y = 0 \quad -R_B + qa - q(x-2a) - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -R_B + qa - q(x-2a) = -1,25qa + qa - q(x-2a):$$

при  $x = 2a$   $Q_y = -0,25qa$ ,  $x = 3a$   $Q_y = -1,25qa$ ;

$$\sum m_O = 0$$

$$-R_B x + M + qa(x-1,5a) - q(x-2a)(x-2a)/2 - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -R_B x + M + qa(x-1,5a) - q(x-2a)^2/2 =$$

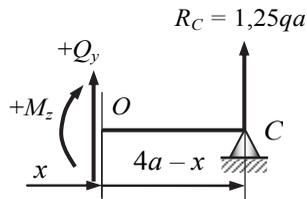
$$= -1,25qax + 2qa^2 + qa(x-1,5a) - q \frac{(x-2a)^2}{2} :$$

при  $x = 2a$   $M_z = 0$ ,  $x = 3a$   $M_z = -0,75qa^2$ .

- Участок IV ( $3a \leq x \leq 4a$ ):

$$\sum y = 0 \quad Q_y + R_C = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = -R_C = -1,25qa;$$



$$\sum m_O = 0 \quad R_C (4a - x) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = R_C (4a - x) = 1,25qa(4a - x):$$

при  $x = 3a \quad M_z = 1,25qa^2, \quad x = 4a \quad M_z = 0.$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  изображены на рис. 4.5.

### Задача 4.2. Расчет допускаемой нагрузки для балки, изготовленной из чугуна

Чугунная балка нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 4.6). Исходные данные приведены в табл. 4.2. При расчете принять: допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma]_p = 40$  МПа, на сжатие  $[\sigma]_c = 120$  МПа. Определить допускаемую нагрузку  $q$  из условия прочности по нормальным напряжениям при рациональном расположении заданного поперечного сечения (рис. 4.7).

Таблица 4.2

Исходные данные к задаче 4.2

Номер строки	Схема, рис. 4.6	Сечение, рис. 4.7	Соотношение силовых факторов		$l$ , м	$r$ , мм
			$F/ql$	$M/q^2$		
1	1	1	1	1	1,0	40
2	2	2	2	2	0,9	35
3	3	3	3	3	0,8	30
4	4	4	3	1	0,7	25
5	5	5	2	2	0,6	20
6	6	6	1	3	1,0	15
7	7	1	1	1	0,9	20
8	8	3	2	2	0,8	25
9	9	5	3	3	0,7	30
0	10	6	3	2	0,6	40
	е		д		г	е

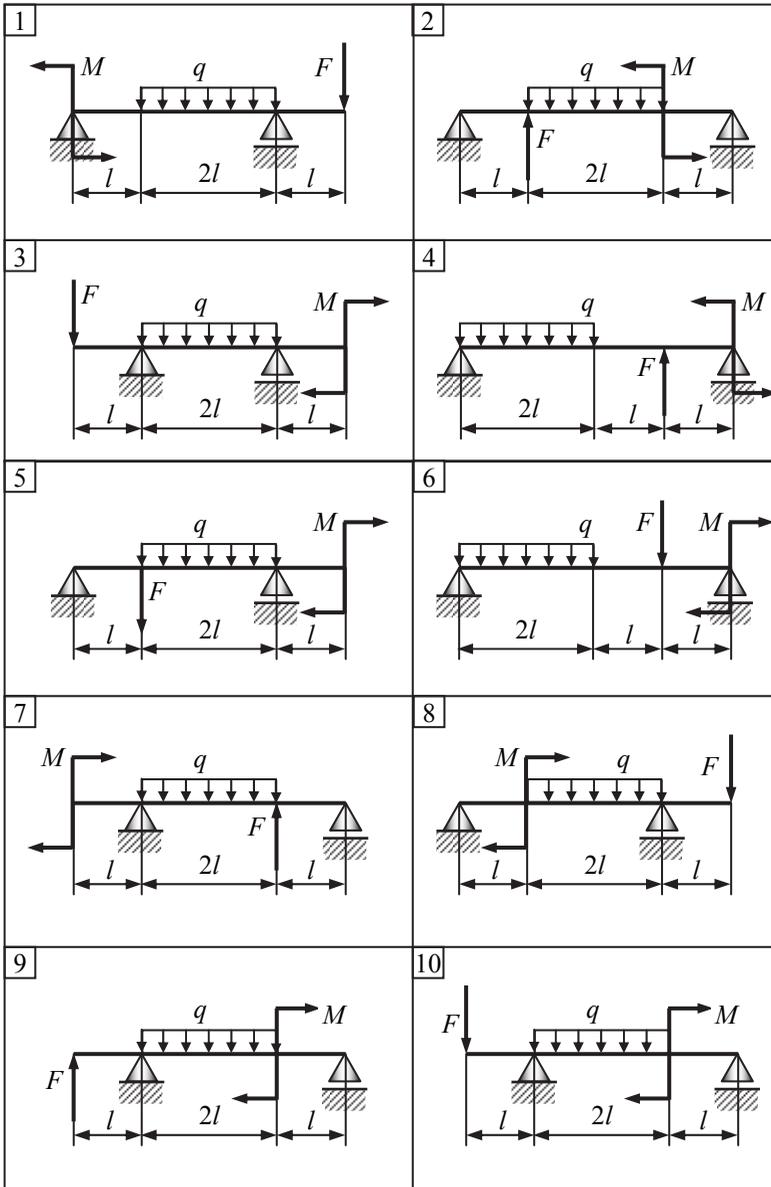


Рис. 4.6. Расчетные схемы к задаче 4.2

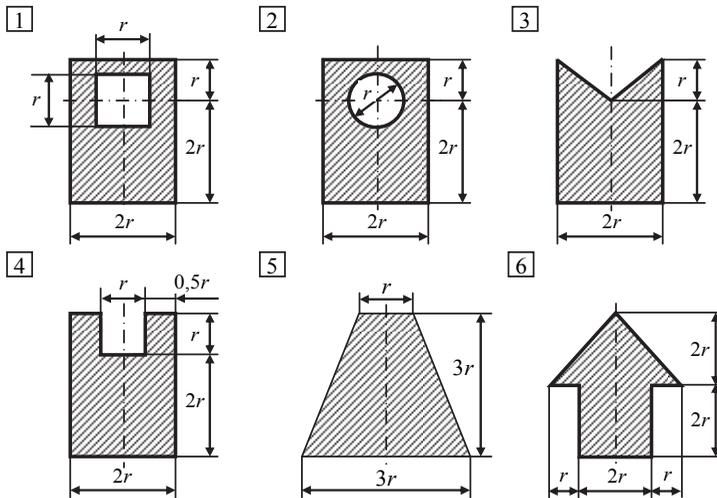


Рис. 4.7. Поперечные сечения стержня к задаче 4.2

### Пример расчета и оформления задачи

Чугунная балка нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой, приведенной на рис. 4.8, а. При расчете принять: допустимое напряжение на растяжение  $[\sigma]_p = 40$  МПа, допустимое напряжение на сжатие  $[\sigma]_c = 120$  МПа.

#### Исходные данные к примеру

Схема	Сечение	Соотношение силовых факторов		$l$ , м	$r$ , мм
		$F/ql$	$M/ql^2$		
Рис.4.8, а	Рис.4.8, б	1,0	1,0	1,0	30

Определить допускаемую нагрузку  $q$  из условия прочности по нормальным напряжениям при рациональном расположении заданного поперечного сечения (рис. 4.8, б).

#### Решение

**Определение реакций опор.** Принимаем начало системы координат  $x$  на левом конце балки (рис. 4.9).

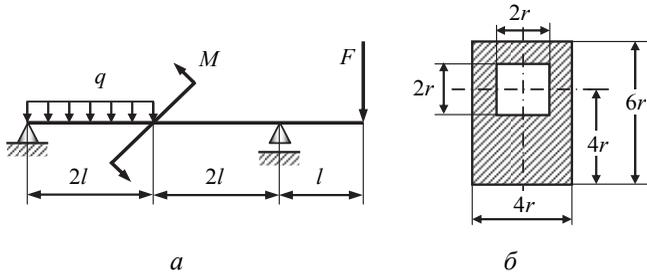


Рис. 4.8. Расчетная схема (а) и поперечное сечение (б) балки

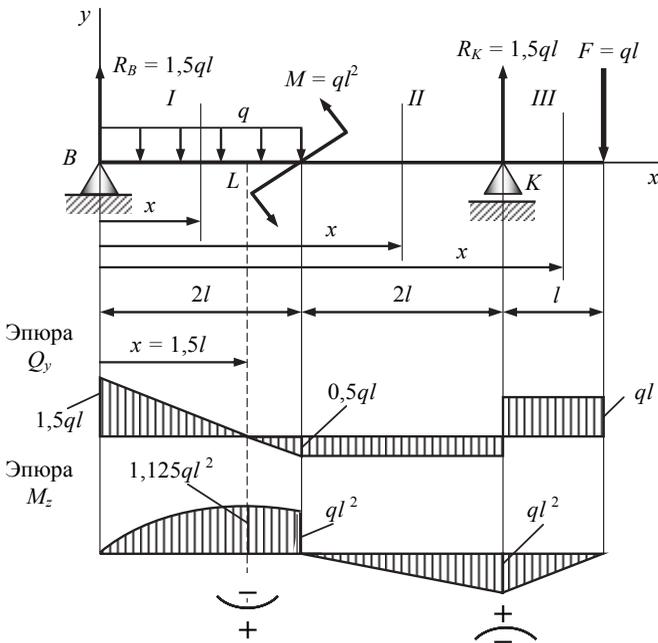


Рис. 4.9. Расчетная схема балки и эпюры внутренних силовых факторов

Так как направления реакций опор  $R_B$  и  $R_K$  неизвестны, то предполагаем их направления положительными (направленными вверх). Далее составляем два уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0 \quad -F(5l) + R_K(4l) + M - (q \cdot 2l)l = 0,$$

$$R_K = \frac{5Fl - M + 2ql^2}{4l} = \frac{5ql^2 - ql^2 + 2ql^2}{4l} = 1,5ql;$$

$$\sum m_K = 0 \quad R_B(4l) - (q \cdot 2l)3l - M + Fl = 0,$$

$$R_B = \frac{6ql^2 + M - Fl}{4l} = \frac{6ql^2 + ql^2 - ql^2}{4l} = 1,5ql.$$

Проверка правильности нахождения реакций опор:

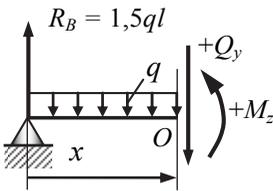
$$\begin{aligned} \sum y = 0 \quad R_B - q(2l) + R_K - F = 0 & \rightarrow \\ 1,5ql - 2ql + 1,5ql - ql = 0, \end{aligned}$$

т. е. опорные реакции определены правильно.

**Построение эпюр перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .** Предварительно разбиваем балку на силовые участки. Границами силовых участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов), начало и конец участка с распределенной нагрузкой. На рис. 4.9 эти участки обозначены цифрами I, II, III. Далее рассматриваем последовательно силовые участки и, используя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы  $Q_y$  и  $M_z$ .

■ При составлении уравнений равновесия для отсеченной части балки всегда будем предполагать положительное направление внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$ .

- Участок I ( $0 \leq x \leq 2l$ ):



$$\sum y = 0 \quad R_B - qx - Q_y = 0 \rightarrow$$

$$Q_y = R_B - qx = 1,5ql - qx;$$

$$\text{при } x = 0 \quad Q_y = 1,5ql, \quad x = 2l \quad Q_y = -0,5ql;$$

$$\sum m_O = 0 \quad R_B x - (qx)(x/2) - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = R_B x - qx^2/2 = 1,5qlx - qx^2/2;$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_z = 0, \quad x = 2l \quad M_z = ql^2.$$

Так как на участке I эпюра  $Q_y$  пересекает ось  $x$ , то в точке пересечения эпюра  $M_z$  будет иметь экстремальное значение. Для определения этого значения найдем точку пересечения  $x_0$  из уравнения

$$Q_y = R_B - qx_0 = 1,5ql - qx_0 = 0 \rightarrow x_0 = 1,5l;$$

$$M_z|_{x_0=1,5l} = 1,5ql(1,5l) - q(1,5l)^2/2 = 1,125ql^2.$$

- Участок II ( $2l \leq x \leq 4l$ ):

$$\sum y = 0 \quad R_B - q(2l) - Q_y = 0 \rightarrow$$

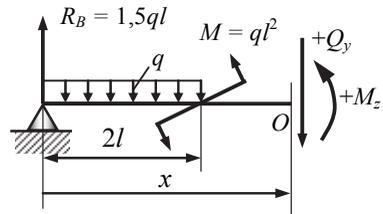
$$Q_y = R_B - 2ql = 1,5ql - 2ql = -0,5ql;$$

$$\sum m_O = 0$$

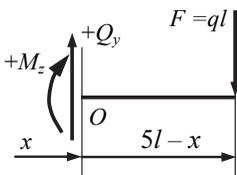
$$R_B x - q(2l)(x - l) - M - M_z = 0 \rightarrow$$

$$M_z = R_B x - 2ql(x - l) - M = 1,5qlx - 2ql(x - l) - ql^2:$$

при  $x = 2l \quad M_z = 0$ ,  $x = 4l \quad M_z = -ql^2$ .



- Участок III ( $4l \leq x \leq 5l$ ):



$$\sum y = 0 \quad Q_y - F = 0 \rightarrow Q_y = F = ql;$$

$$\sum m_O = 0 \quad M_z + F(5l - x) = 0 \rightarrow$$

$$M_z = -F(5l - x) = -ql(5l - x):$$

при  $x = 4l \quad M_z = -ql^2$ ,  $x = 5l \quad M_z = 0$ .

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  представлены на рис. 4.9.

### Геометрические характеристики поперечного сечения.

1. Для определения центра тяжести сложного поперечного сечения разбиваем сложное сечение на простые фигуры, для которых известно положение их центров тяжести. В нашем случае это прямоугольник без отверстия и квадрат (отверстие) с центрами тяжести  $C_1$  и  $C_2$  соответственно (рис. 4.10).

Так как сечение имеет одну ось симметрии (ось  $y$ ), то в качестве исходной принимаем систему координат  $yOz_0$ . Ось  $y$  является одной из главных осей, вторая главная ось  $z$  проходит через центр тяжести  $C$  сечения перпендикулярно к первой. Центр тяжести сечения будет располагаться на оси симметрии  $y$ . Координата  $y_C$  центра тяжести  $C$  сечения (рис. 4.10) вычисляется по формуле

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где  $y_{C_i}$  – расстояние от центра тяжести  $C_i$  сечения  $i$ -й фигуры до оси  $z$ ,  
 $n$  – число простых фигур;  $A_i$  – площадь  $i$ -й фигуры.

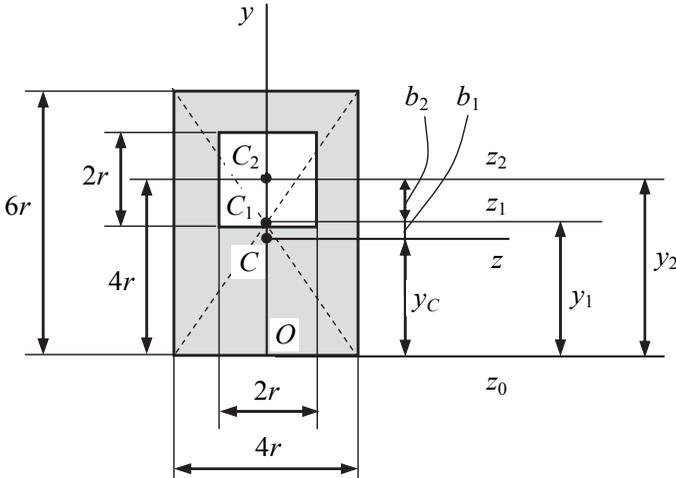


Рис. 4.10. Определение центра тяжести  $C$  сложного сечения

В нашем случае, полагая, что прямоугольник имеет положительную площадь  $A_1$ , а квадрат (отверстие) – отрицательную  $A_2$ , имеем:

$$\sum_{i=1}^n y_{C_i} A_i = y_1 A_1 + y_2 A_2 = 3r(4r \cdot 6r) - 4r(2r \cdot 2r) = 56r^3,$$

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_1 - A_2 = 4r \cdot 6r - 2r \cdot 2r = 20r^2.$$

Таким образом, координата центра тяжести  $C$  определится как

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{56r^3}{20r^2} = 2,8r = 2,8 \cdot 30 = 84 \text{ мм}.$$

2. Осевой момент инерции сложного поперечного сечения относительно нейтральной оси  $z$ :

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}.$$

Моменты инерции составляющих фигур  $I_z^{(1)}$ ,  $I_z^{(2)}$  вычисляются по формуле перехода к осям, параллельным центральным осям, т.е.

$$\begin{aligned} I_z^{(1)} &= I_{z_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 = \frac{4r(6r)^3}{12} + (0,2r)^2 24r^2 = 72,96r^4 = \\ &= 72,96(30 \cdot 10^{-3})^4 = 5909,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z^{(2)} &= -\left( I_{z_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 \right) = -\left( \frac{2r(2r)^3}{12} + (1,2)^2 4r^2 \right) = -7,093r^4 = \\ &= -7,0939(30 \cdot 10^{-3})^4 = -574,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \end{aligned}$$

$$I_z = 5909,8 \cdot 10^{-8} - 574,5 \cdot 10^{-8} = 5335,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Здесь для вычисления осевого момента инерции простой фигуры в форме прямоугольника (квадрата) использовалась формула

$$I_z = \frac{bh^3}{12},$$

где  $b$  – сторона, параллельная оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Момент инерции  $I_z$  является главным моментом инерции поперечного сечения балки (см. рис. 4.10).

**Рациональное расположение сечения.** Наибольший изгибающий момент действует в сечении  $L$  и равен  $M_z^{(L)}_{\max} = 1,125ql^2$  (см. рис. 4.9). Так как значение момента положительно, то нижние волокна сечения растягиваются, а верхние – сжимаются.

■ В связи с тем что материал балки лучше работает на сжатие ( $[\sigma]_c > [\sigma]_p$ ) и поперечное сечение является несимметричным относительно оси  $z$ , то рациональным расположением сечения будет такое,

при котором наиболее удаленные от нейтральной оси волокна оказываются в сжатой зоне.

В нашем случае рациональное расположение сечения показано на рис. 4.11.

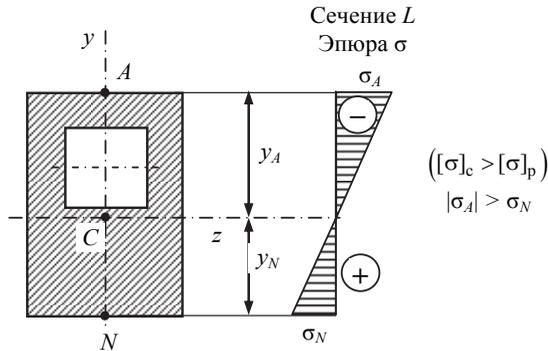


Рис. 4.11. Рациональное расположение сечения

**Определение допустимой нагрузки из условия прочности.** Так как сечение балки несимметрично относительно оси  $z$ , то расчет на прочность необходимо провести для точки  $N$ , расположенной в растянутой зоне, и точки  $A$ , расположенной в сжатой зоне. Предварительно определим осевые моменты сопротивления:

$$W_z^{(N)} = \frac{I_z}{y_N} = \frac{5335,3 \cdot 10^{-8}}{84 \cdot 10^{-3}} = 63,515 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$W_z^{(A)} = \frac{I_z}{y_A} = \frac{5335,3 \cdot 10^{-8}}{(180 - 84)10^{-3}} = 55,576 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

В растянутой зоне (точка  $N$ ):

$$\sigma_N = \frac{M_z^{(L)}_{\max}}{W_z^{(N)}} = \frac{1,125ql^2}{W_z^{(N)}} \leq [\sigma]_p;$$

$$q \leq \frac{[\sigma]_p W_z^{(N)}}{1,125l^2} \leq \frac{40 \cdot 63,515 \cdot 10^{-5}}{1,125 \cdot 1^2} \leq 22,6 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м.}$$

В сжатой зоне (точка  $A$ ):

$$\sigma_A = \frac{M_z^{(L)} \max}{W_z^{(A)}} = \frac{1,125ql^2}{W_z^{(A)}} \leq [\sigma]_c;$$

$$q \leq \frac{[\sigma]_c W_z^{(A)}}{1,125l^2} \leq \frac{120 \cdot 55,576 \cdot 10^{-5}}{1,125 \cdot 1^2} \leq 59,3 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м.}$$

Для окончательного выбора значения нагрузки необходимо произвести расчет на прочность по наибольшим растягивающим напряжениям в сечении  $K$  (см. рис. 4.9). Хотя в сечении  $K$  изгибающий момент меньше максимального, но сечение балки расположено нерационально – растянуты верхние волокна (рис. 4.12):

сечение  $K$ , точка  $A$  (растяжение)

$$\sigma_A = \frac{M_z^{(K)} \max}{W_z^{(A)}} = \frac{ql^2}{W_z^{(A)}} \leq [\sigma]_p;$$

$$q \leq \frac{[\sigma]_p W_z^{(A)}}{l^2} \leq \frac{40 \cdot 55,576 \cdot 10^{-5}}{1^2} \leq 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м.}$$

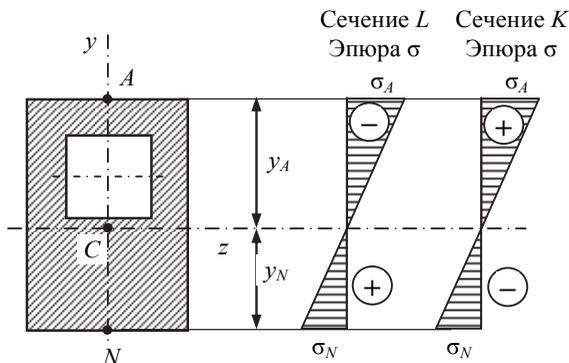


Рис. 4.12. К расчету на прочность сечения  $K$

Следовательно, окончательно принимаем

$$q = 22,2 \text{ кН/м.}$$

Ответ

### Задача 4.3. Расчет на прочность двутавровой балки

Для стальной балки (Ст3) при заданных исходных данных (табл. 4.3) и расчетной схеме (рис. 4.13):

- из условия полной проверки на статическую прочность подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля;
- построить эпюры углов поворота (в градусах) и прогибов (в миллиметрах).

При расчете принять: допустимое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа, модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Таблица 4.3

**Исходные данные к задаче 4.3**

Номер строки	Схема, рис. 4.13	Нагрузка		
		$q$ , кН/м	$F/ql$	$M/ql^2$
1	1	15	1	1
2	2	16	2	2
3	3	17	3	3
4	4	18	3	1
5	5	19	2	2
6	6	20	1	3
7	7	21	1	1
8	8	22	2	2
9	9	23	3	3
0	10	24	3	2
	е	д	г	

#### *Пример расчета и оформления задачи*

Для стальной балки при заданных исходных данных  $q = 22,2$  кН/м,  $F/ql = 1$ ,  $M/ql^2 = 1$  и расчетной схеме (рис. 4.14):

- из условия полной проверки на статическую прочность подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля;
- построить эпюры углов поворота (в градусах) и прогибов (в миллиметрах).

При расчете принять:  $F = 22,2$  кН,  $M = 22,2$  кН·м допустимое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

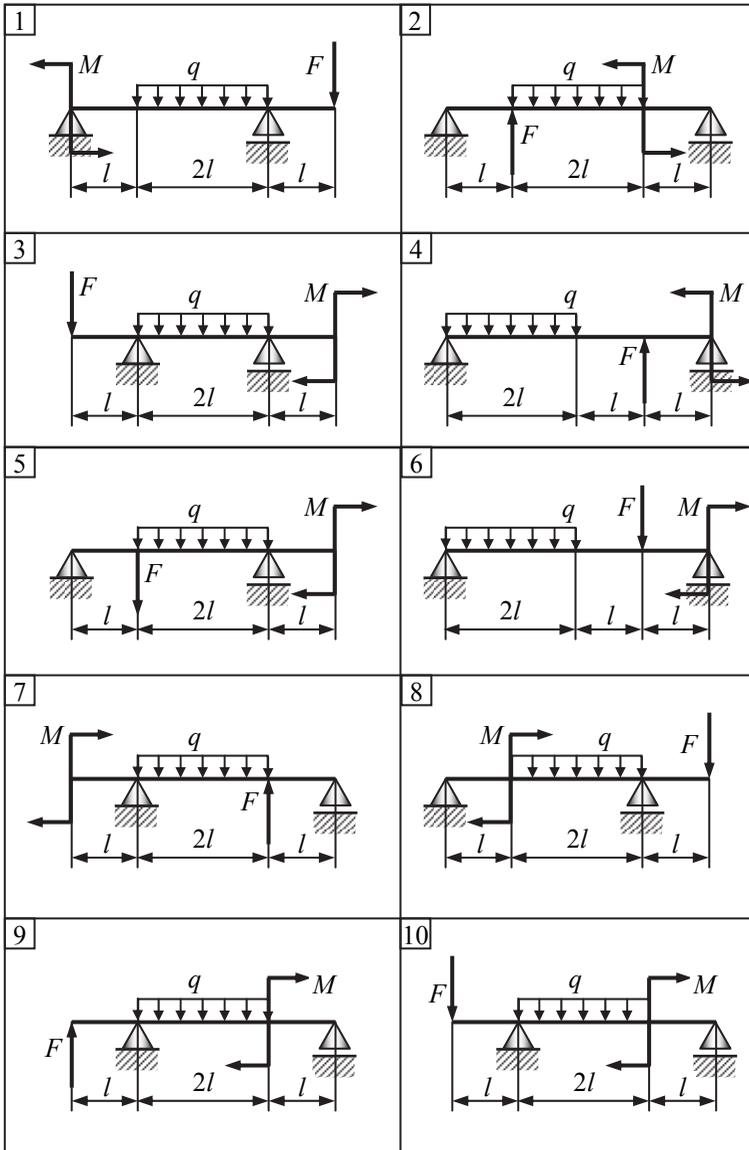


Рис. 4.13. Расчетные схемы к задаче 4.3

## Решение

Эпюры  $Q_y$ ,  $M_z$ . На рис. 4.14 представлена расчетная схема балки и эпюры  $Q_y$ ,  $M_z$  (см. построение эпюр в задаче 4.2).

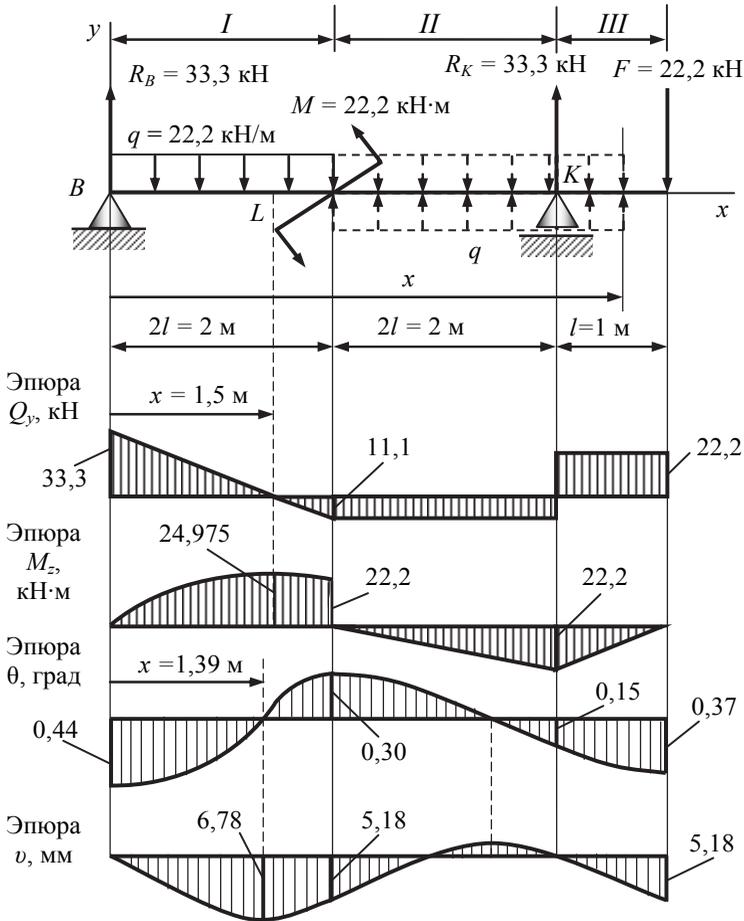


Рис. 4.14. Расчетная схема балки и эпюры

**Расчет балки на полную статическую прочность.** Материал балки (сталь) одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, в связи с чем  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ . Согласно исходным данным задачи  $[\sigma] = 160$  МПа.

■ Номер двутаврового сечения балки определяем из расчета на прочность по максимальным нормальным напряжениям. Для опасного сечения  $L$  (рис. 4.13) из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

определяем требуемый осевой момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{z\max}}{[\sigma]} \geq \frac{24,975 \cdot 10^{-3}}{160} \geq 0,156 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 156 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8239–89) определяем номер двутаврового сечения, который имеет момент сопротивления, равный или больше расчетного. Принимаем двутавр № 20:

$$W_{z\text{табл}} = 184 \text{ см}^3 > 156 \text{ см}^3.$$

В этом случае наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_{z\text{табл}}} = \frac{24,975 \cdot 10^{-3}}{184 \cdot 10^{-6}} = 136 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Схематично поперечное сечение изображено на рис. 4.15. Характеристики двутаврового профиля № 20 следующие.

Номер профиля	Размеры, мм				$I_z, \text{ см}^4$	$W_z, \text{ м}^3$	$S_z, \text{ см}^3$
	$h$	$b$	$d$	$t$			
20	200	100	5,2	8,4	1840	184	104

■ Выполняем проверку прочности двутавра № 18а по максимальным касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau].$$

В сечении  $B$  с максимальным значением перерезывающей силы  $Q_y = 33,3 \text{ кН}$  проверяем прочность в точке 3 поперечного сечения балки (рис. 4.15):

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 96 \text{ МПа}, b = d = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, S_{z\max}^* = S_z = 104 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

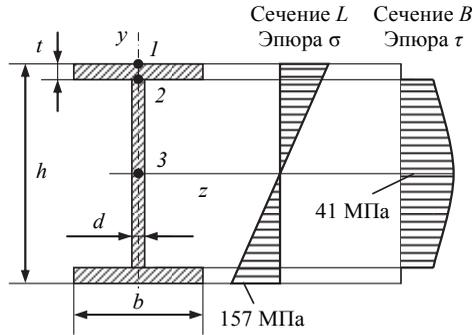


Рис. 4.15. Поперечное сечение

$$\tau_{\max} = \frac{33,3 \cdot 10^{-3} \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 5,2 \cdot 10^{-3}} = 36 \text{ МПа} < [\tau] = 96 \text{ МПа} .$$

Условие прочности по максимальным касательным напряжениям в точке 3 выполняется.

■ Проверяем прочность поперечного сечения в точке 2, где  $\sigma$  и  $\tau$  одновременно достигают больших значений (см. рис. 4.15). Для их вычисления берутся значения  $M_z$  и  $Q_y$  для сечения K (см. рис. 4.14), где  $M_z$  и  $Q_y$  достигают значений, несколько меньших наибольших значений:  $M_z = 22,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $Q_y = 22,2 \text{ кН}$ . Расчет ведем по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] .$$

Вычисляем:

• статический момент отсеченной части (полки), расположенной выше т. 2:

$$\begin{aligned} S_{z(2)}^* &= bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \\ &= 100 \cdot 10^{-3} \cdot 8,4 \cdot 10^{-3} \left( \frac{200}{2} - \frac{8,4}{2} \right) 10^{-3} = 80,47 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 , \end{aligned}$$

где величина  $\left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$  – расстояние от центра тяжести полки до оси z;

- расстояние т. 2 до оси z:

$$y_{(2)} = (h/2) - t = ((200/2) - 8,4)10^{-3} = 91,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

- нормальное и касательное напряжения в т. 2:

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_z^{(K)}}{I_z} y_{(2)} = \frac{22,2 \cdot 10^{-3}}{1840 \cdot 10^{-8}} 91,6 \cdot 10^{-3} = 110,52 \text{ МПа},$$

$$\tau_{(2)} = \frac{Q_y^{(K)} S_z^*}{I_z d} = \frac{22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 80,47 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 5,2 \cdot 10^{-3}} = 18,67 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение в т. 2

$$\sigma_{\text{эKB}} = \sqrt{110,52^2 + 3 \cdot 18,67^2} = 115,2 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

т. е. прочность поперечного сечения в точке 2 обеспечена.

Таким образом, расчет балки на полную статическую прочность показал, что выбранный двутавр № 20 может быть оставлен в конструкции балки.

*Ответ*

**Расчет углов поворота и прогибов балки.** Для определения углов поворота и прогибов балки воспользуемся универсальным уравнением упругой линии, которое для балки с постоянным поперечным сечением имеет вид

$$EI_z \nu'' = M_z(x).$$

Составляем уравнение изгибающих моментов  $M_z(x)$  для участка III балки (см. рис. 4.14). При этом считаем:

- распределенная нагрузка продлена до конца балки и на участках II, III приложена компенсирующая нагрузка, как показано на рис. 4.14;
  - сосредоточенный момент умножается на плечо в нулевой степени.
- Тогда

$$M_z(x) = R_B x - q \frac{x^2}{2} - M(x-2l)^0 + q \frac{(x-2l)^2}{2} + R_K(x-4l).$$

Дифференциальное уравнение упругой линии балки имеет вид

$$EI_z \nu'' = R_B x - q \frac{x^2}{2} - M(x-2l)^0 + q \frac{(x-2l)^2}{2} + R_K(x-4l). \quad (1)$$

Интегрируем выражение (1) без раскрытия скобок и получаем уравнение для углов поворота сечений:

$$EI_z \nu' = EI_z \theta = R_B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} - M(x-2l) + q \frac{(x-2l)^3}{6} + R_K \frac{(x-4l)^2}{2} + C. \quad (2)$$

Интегрируя выражение (1) второй раз, получаем уравнение прогибов:

$$EI_z \nu = R_B \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - M \frac{(x-2l)^2}{2} + q \frac{(x-2l)^4}{24} + R_K \frac{(x-4l)^3}{6} + Cx + D. \quad (3)$$

Значения постоянных  $C$  и  $D$  определяем из граничных условий:

$$\text{при } x = 0 \quad \nu = 0;$$

$$x = 4l \quad \nu = 0.$$

Подставляя первое граничное условие в уравнение (3), получаем  $D = 0$ .

Подставляя второе условие в уравнение (3), имеем

$$0 = R_B \frac{(4l)^3}{6} - q \frac{(4l)^4}{24} - M \frac{(4l-2l)^2}{2} + q \frac{(4l-2l)^4}{24} + C(4l),$$

откуда  $C = -ql^3$ .

Окончательно имеем:

- уравнение углов поворота сечений балки

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} - M(x-2l) \Big|_{x>2l} + q \frac{(x-2l)^3}{6} \Big|_{x>2l} + R_K \frac{(x-4l)^2}{2} \Big|_{x>4l}; \quad (4)$$

- уравнение прогибов сечений балки

$$EI_z \nu = -ql^3 x + R_B \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - M \frac{(x-2l)^2}{2} \Big|_{x>2l} + q \frac{(x-2l)^4}{24} \Big|_{x>2l} + R_K \frac{(x-4l)^3}{6} \Big|_{x>4l}. \quad (5)$$

Для построения эпюр углов поворота и прогибов балки следует в полученные уравнения (4), (5) подставить характерные значения абсцисс сечений (см. рис. 4.14).

Эпюра углов поворота сечений балки на основе уравнения (4):

- $x = 0 \rightarrow EI_z \theta = -ql^3 \rightarrow$

$$\theta = -\frac{ql^3}{EI_z} = -\frac{22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00776 \text{ рад} = -0,44^\circ;$$

- $x = 2l \rightarrow EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{(2l)^2}{2} - q \frac{(2l)^3}{6} = 0,667ql^3 \rightarrow$

$$\theta = \frac{0,667ql^3}{EI_z} = \frac{0,667 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,00518 \text{ рад} = 0,30^\circ;$$

на участке I определим сечение, где эпюра пересекает ось абсцисс

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} = 0 \rightarrow x = 1,39l = 1,39 \text{ м};$$

- $x = 4l \rightarrow$

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{(4l)^2}{2} - q \frac{(4l)^3}{6} - M(4l - 2l) \Big|_{x>2l} +$$

$$+ q \frac{(4l - 2l)^3}{6} \Big|_{x>2l} = -0,333ql^3 \rightarrow$$

$$\theta = -\frac{0,333ql^3}{EI_z} = -\frac{0,333 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00258 \text{ рад} = -0,15^\circ;$$

- $x = 5l \rightarrow$

$$EI_z \theta = -ql^3 + R_B \frac{(5l)^2}{2} - q \frac{(5l)^3}{6} - M(5l - 2l) \Big|_{x>2l} +$$

$$+ q \frac{(5l - 2l)^3}{6} \Big|_{x>2l} + R_K \frac{(5l - 4l)^2}{2} \Big|_{x>4l} = -0,833ql^3 \rightarrow$$

$$\theta = -\frac{0,833ql^3}{EI_z} = -\frac{0,833 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00647 \text{ рад} = -0,37^\circ.$$

Эпюра прогибов сечений балки на основе уравнения (5):

- $x = 0 \rightarrow EI_z v = 0 \rightarrow v = 0;$
- $x = 1,39l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3(1,39l) + R_B \frac{(1,39l)^3}{6} - q \frac{(1,39l)^4}{24} = -0,874ql^4 \rightarrow$$

$$v = -\frac{0,874ql^4}{EI_z} = -\frac{0,874 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00678 \text{ м} = -6,78 \text{ мм};$$

- $x = 2l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3(2l) + R_B \frac{(2l)^3}{6} - q \frac{(2l)^4}{24} = -0,667ql^4 \rightarrow$$

$$v = -\frac{0,667ql^4}{EI_z} = -\frac{0,667 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00518 \text{ м} = -5,18 \text{ мм};$$

- $x = 4l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3(4l) + R_B \frac{(4l)^3}{6} - q \frac{(4l)^4}{24} - M \frac{(4l-2l)^2}{2} + q \frac{(4l-2l)^4}{24} = 0$$

$$\rightarrow v = 0;$$

- $x = 5l \rightarrow$

$$EI_z v = -ql^3(5l) + R_B \frac{(5l)^3}{6} - q \frac{(5l)^4}{24} - M \frac{(5l-2l)^2}{2} +$$

$$+ q \frac{(5l-2l)^4}{24} + R_K \frac{(5l-4l)^3}{6} = -0,667ql^4 \rightarrow$$

$$v = -\frac{0,667ql^4}{EI_z} = -\frac{0,667 \cdot 22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00518 \text{ м} = -5,18 \text{ мм}.$$

Эпюры углов поворота и прогибов сечений балки приведены на рис. 4.14.

## 5. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

### Задача. Расчет вала редуктора с цилиндрическими косозубыми колесами

Промежуточный вал (материал – сталь) косозубой цилиндрической передачи опирается на два подшипника (рис. 5.1) и при равномерном вращении передает заданную мощность. При работе в месте зацепления зубчатых колес возникает усилие, составляющие которого показаны на расчетной схеме. Исходные данные приведены в таблице.

Требуется определить диаметр вала сплошного сечения из условия статической прочности. При определении диаметра вала продольной силой и пренебрегающими силами пренебречь.

#### Исходные данные к задаче

Номер строки	Схема, рис. 5.1	Допускаемое напряжение	Мощность	Скорость вращения	Осевое усилие	Радиальное усилие	Диаметры зубчатых колес		Линейные размеры		
		[ $\sigma$ ]	$N$	$n$	$F_a$	$F_r$	$D_1$	$D_2$	$a$	$b$	$c$
		МПа	кВт	мин <sup>-1</sup>	–	–	м		м		
1	1	60	30	200	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,2	0,4	0,2	0,4	0,3
2	2	70	35	240	$0,2F_t$	$0,3F_t$	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3
3	3	80	40	280	$0,1F_t$	$0,4F_t$	0,4	0,5	0,2	0,3	0,2
4	4	90	45	300	$0,2F_t$	$0,4F_t$	0,5	0,4	0,3	0,4	0,2
5	5	60	50	340	$0,2F_t$	$0,3F_t$	0,3	0,4	0,3	0,3	0,3
6	6	70	55	380	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,5	0,2	0,4	0,4	0,4
7	7	80	60	400	$0,2F_t$	$0,4F_t$	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2
8	8	90	40	420	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2
9	9	70	45	450	$0,1F_t$	$0,4F_t$	0,3	0,2	0,4	0,2	0,3
0	10	80	50	250	$0,1F_t$	$0,3F_t$	0,4	0,2	0,4	0,3	0,4
	е	г	д		е		д		е		

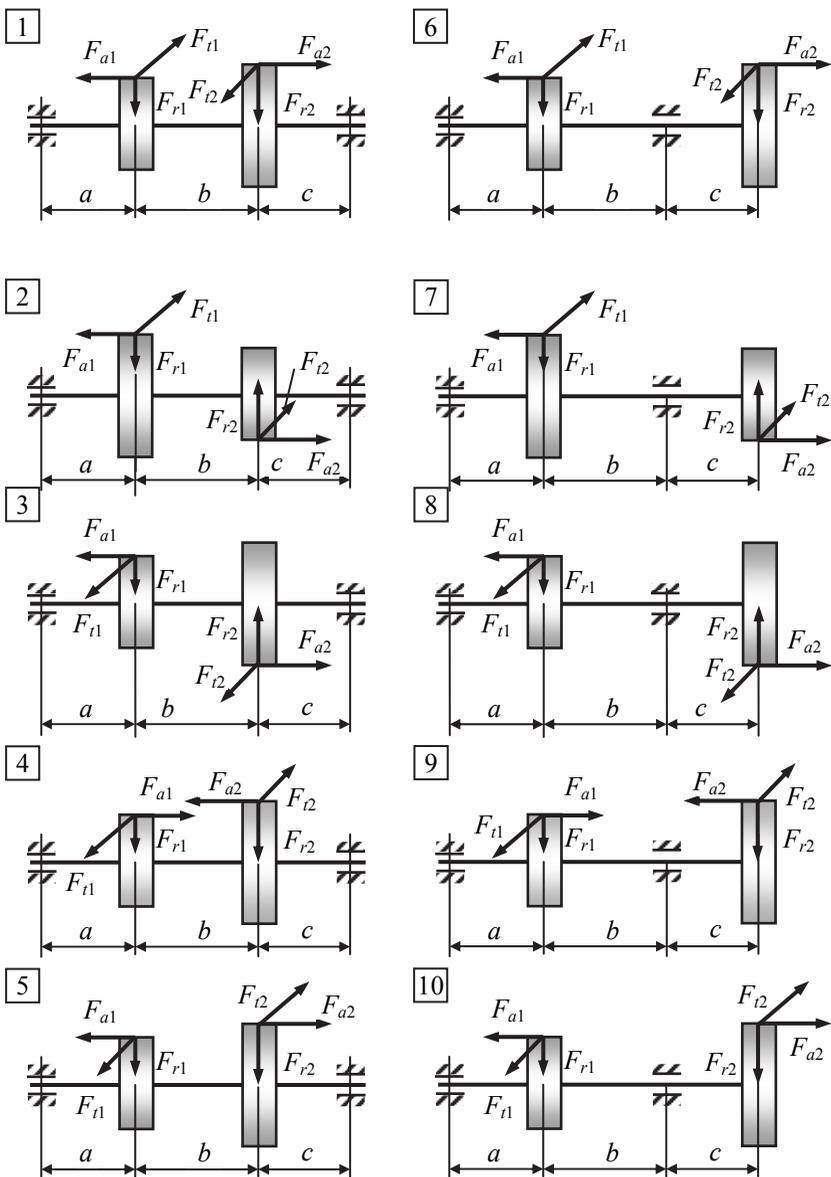


Рис. 5.1. Расчетные схемы к задаче

### Пример решения и оформления задачи

Промежуточный вал (материал – сталь) косозубой цилиндрической передачи опирается на два подшипника и при равномерном вращении передает заданную мощность. При работе в месте зацепления зубчатых колес возникает усилие, составляющие которого показаны на расчетной схеме (рис. 5.2, а). Исходные данные:  $P = 47$  кВт,  $n = 258$  об/мин,  $F_a = 0,1F_t$ ,  $F_r = 0,4F_t$ ,  $D_1 = 0,5$  м,  $D_2 = 0,4$  м,  $a = 0,2$  м,  $b = 0,3$  м,  $c = 0,2$  м,  $[\sigma] = 80$  МПа.

Требуется определить диаметр вала сплошного сечения из условия статической прочности. При определении диаметра вала продольной силой и перерезывающими силами пренебречь.

#### Решение

**Определение внешней нагрузки.** Определяем момент, передаваемый валом:

$$M_e = 9554 \frac{P}{n} = 9554 \frac{47}{258} = 1740 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определяем усилия, действующие на зубчатые колеса:

- окружные усилия:

$$F_{t1} = \frac{M}{(D_1/2)} = \frac{1740}{0,5/2} = 6960 \text{ Н}, \quad F_{t2} = \frac{M}{(D_2/2)} = \frac{1740}{0,4/2} = 8700 \text{ Н},$$

- радиальные и осевые усилия:

На первом колесе	На втором колесе
$F_{a1} = 0,1F_{t1} = 696 \text{ Н}$	$F_{a2} = 0,1F_{t2} = 870 \text{ Н}$
$F_{r1} = 0,4F_{t1} = 2784 \text{ Н}$	$F_{r2} = 0,4F_{t2} = 3480 \text{ Н}$

На рис. 5.2, б изображена расчетная схема вала, на которой все внешние нагрузки приведены к оси вала. При приведении нагрузок к оси вала от осевых сил дополнительно возникают сосредоточенные моменты, приложенные в местах крепления колес:

$$M_1 = F_{a1}D_1 / 2 = 174 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad M_2 = F_{a2}D_2 / 2 = 174 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

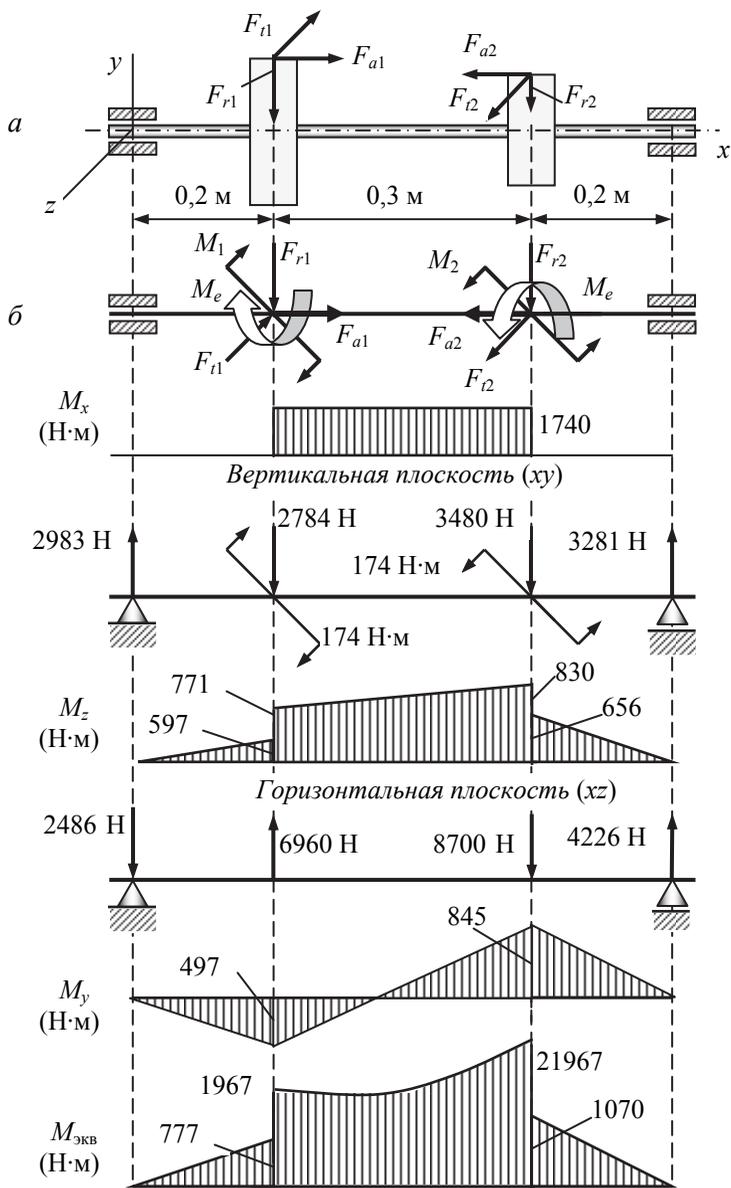


Рис.5.2. Расчетная схема вала и эпюры

**Определение опасного сечения.** Для данной расчетной схемы (рис. 5.2, б) рассматриваем отдельно:

- кручение от моментов  $M_e$  (внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_x$ );
- изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях:
  - *вертикальной плоскости  $xу$*  от сил  $F_r$  и моментов  $M_1, M_2$  (внутренний силовой фактор – изгибающий момент  $M_z$ ),
  - *горизонтальной плоскости  $xz$*  от сил  $F_t$  (внутренний силовой фактор – изгибающий момент  $M_y$ ; при построении эпюры  $M_y$  горизонтальная плоскость  $xz$  повернута в вертикальную).

Для перечисленных выше внутренних силовых факторов строим эпюры.

Для определения опасного сечения строим эпюру эквивалентного момента, используя формулу

$$M_{\text{экр}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2}.$$

По эпюре эквивалентного момента определяем (см. рис. 5.2):

$$M_{\text{экр max}} = 2105 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

**Расчет на прочность** (определение диаметра вала). Из условия прочности

$$\sigma_{\text{экр max}} = \frac{M_{\text{экр max}}}{W_z} \leq [\sigma]$$

с учетом  $W_z = \pi d^3 / 32 \approx 0,1 d^3$  определяем диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экр max}}}{0,1[\sigma]}} \geq \sqrt[3]{\frac{2105 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 80}} \geq 0,064 \text{ м} = 64 \text{ мм}. \quad \text{Ответ}$$

**Оценка влияния нормальной силы.** Размер вала  $d = 64$  мм получен без учета нормальной (продольной) силы, вызываемой силой  $F_a$ . Для оценки влияния нормальной силы рассмотрим две схемы опирания вала и установим наиболее неблагоприятное расположение опор (рис. 5.3).

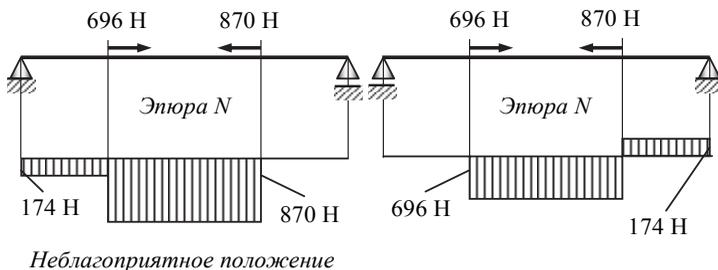


Рис. 5.3. Расчетные схемы вала для учета влияния нормальной силы

Как видно из рис. 5.3, для наиболее неблагоприятного расположения опор имеем  $N_{\max} = 870 \text{ Н}$ .

Определяем нормальные напряжения с учетом деформаций изгиба и растяжения (сжатия) для наиболее опасного сечения:

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} + \frac{N}{A} = \frac{\sqrt{830^2 + 845^2} \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 0,064^3} + \frac{870 \cdot 10^{-6}}{(3,14 \cdot 0,064^2 / 4)} =$$

$$= 45,2 + 0,27 = 45,47 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения от кручения:

$$\tau = \frac{M_x}{W_p} = \frac{1740 \cdot 10^{-6}}{0,2 \cdot 0,064^3} = 33,2 \text{ МПа}.$$

Эквивалентные напряжения по критерию наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 80,5 \text{ МПа} > [\sigma] = 80 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

Перегрузка составляет

$$[(80,5 - 80) / 80] 100 \% = 0,6 \%,$$

что допустимо.

## 6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

### Задача. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил

Стальная плоская рама, изготовленная из балок двутаврового профиля, имеет опорные устройства в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 6.1). Изгибная жесткость поперечных сечений вертикальных стержней равна  $2EI$ , горизонтальных стержней  $EI$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma]=160$  МПа, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Исходные данные приведены в таблице.

**Исходные данные к задаче**

Номер строки	Расчетная схема, рис. 6.1	Тип опоры			Длина $l$ , м	Нагрузка		
		$B$	$C$	$D$		$q$ , кН/м	$F$	$M$
1	1				1,0	15	$ql$	$ql^2$
2	2				1,2	20	$2ql$	$2ql^2$
3	3				1,4	15	$3ql$	$3ql^2$
4	4				1,6	20	$2ql$	$ql^2$
5	5				1,8	25	$3ql$	$ql^2$
6	6				2,0	30	$ql$	$2ql^2$
7	7				1,3	35	$ql$	$3ql^2$
8	8				1,5	40	$2ql$	$3ql^2$
9	9				1,8	20	$3ql$	$2ql^2$
0	10				2,0	30	$2ql$	$ql^2$
	е	д			г	е	д	

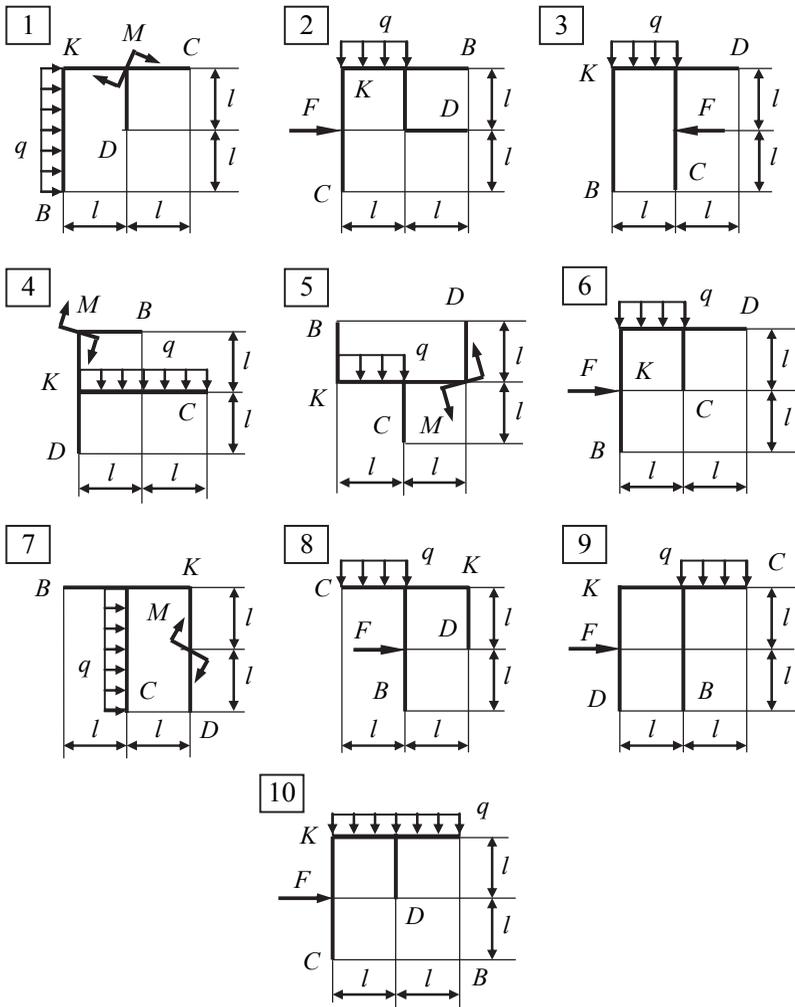


Рис. 6.1. Расчетные схемы к задаче

Требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость рамы методом сил и построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2) обосновать правильность раскрытия статической неопределимости рамы статической и деформационной проверками;

- 3) подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239–89;
- 4) определить угол поворота сечения  $K$ ;
- 5) исследовать напряженное состояние рамы при повреждении каждой из шарнирных опор.

**Указание.** Влиянием продольных и перерезывающих сил пренебречь.

### Пример расчета и оформления задачи

Стальная плоская рама, изготовленная из балок двутаврового профиля, имеет опорные устройства в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 6.2). Изгибная жесткость поперечных сечений вертикальных стержней равна  $2EI$ , горизонтальных стержней  $EI$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma]=160$  МПа, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Исходные данные представлены ниже в таблице.

Тип опоры			Длина $l, \text{ м}$	Нагрузка		
$B$	$C$	$D$		$q, \text{ Н/м}$	$F$	$M$
			1,0	20	$2ql$	$4ql^2$

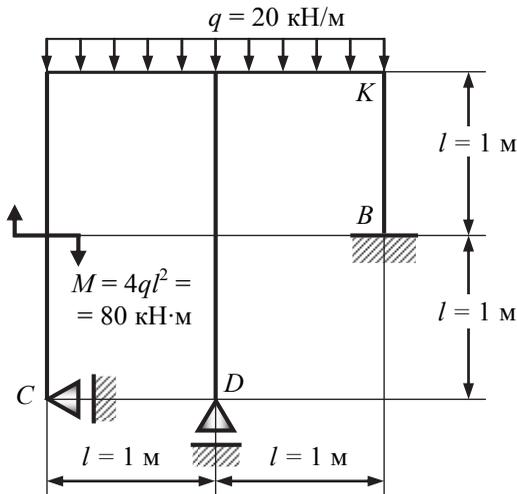


Рис. 6.2. Заданная плоская рама

Требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость рамы методом сил и построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2) обосновать правильность раскрытия статической неопределимости рамы статической и деформационной проверками;
- 3) подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239–89;
- 4) определить угол поворота сечения  $K$ ;
- 5) исследовать напряженное состояние рамы при повреждении каждой из шарнирных опор.

## Решение

**Анализ степени статической неопределимости.** Степень статической неопределимости системы равна числу лишних связей, т.е. связей, наложенных дополнительно сверх необходимых связей для обеспечения геометрической неизменяемости системы и ее равновесия при приложении нагрузки. Возникающие в лишних связях усилия – это лишние неизвестные.

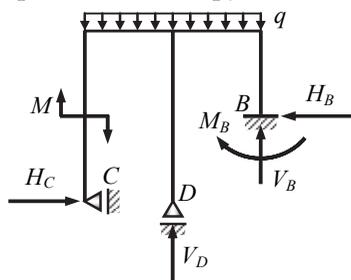


Рис. 6.3. Плоская рама с реакциями опор

Для определения положения плоской рамы как жесткого целого требуется наложение трех связей. В приведенном примере рама (рис. 6.3) имеет неподвижную опору  $B$  с защемлением, эквивалентную трем связям, и шарнирно-подвижные опоры  $C$  и  $D$ , эквивалентные каждая в отдельности одной связи. Следовательно, в совокупности для рамы имеем пять связей и соответственно этому пять реакций опор –  $H_B$ ,  $V_B$ ,  $M_B$ ,  $H_C$ ,  $V_D$ , а уравнений равновесия можно составить только три. Таким образом, степень статической неопределимости рамы

$$n = 5 - 3 = 2.$$

## Метод сил.

**Основная система.** За основную принимаем систему, показанную на рис. 6.4, а, которая получается из заданной системы путем отбрасывания двух лишних связей – шарнирно-подвижные опоры  $C$  и  $D$ .

**Эквивалентная система** (рис. 6.4, б). Для этого загружаем основную систему внешними нагрузками и лишними неизвестными  $X_1$  и  $X_2$ , действующими в направлении отброшенных связей  $H_C$  в опоре  $C$  и  $V_D$  в опоре  $D$  (см. рис. 6.3).

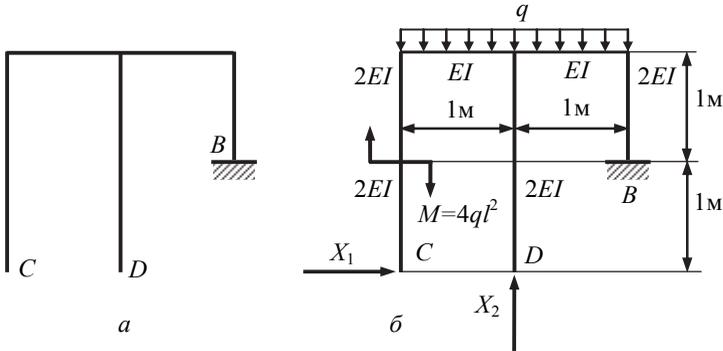


Рис. 6.4. Основная (а) и эквивалентная (б) системы

Канонические уравнения метода сил. Для дважды статически неопределимой системы эти уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$  представляют собой *перемещения* в основной системе от *единичных сил*, т.е. от  $\bar{X}_1 = 1$  и  $\bar{X}_2 = 1$  в месте их приложения (см. рис. 6.5, а, б). Свободные члены  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}$  — это перемещения от заданной нагрузки в направлении лишних неизвестных  $X_1$  и  $X_2$  в том месте, где приложены последние. Величины  $\delta_{ik}, \Delta_{iF}$  определяются с помощью интегралов Мора

$$\delta_{ik} = \sum_l \int \frac{M_i(x)M_k(x)}{EI} dx, \quad \Delta_{iF} = \sum_l \int \frac{M_i(x)M_F(x)}{EI} dx$$

с заменой операции интегрирования по способу Верещагина:

$$\delta = \sum \frac{1}{EI} \omega M_1^{(C)}.$$

Используя основную систему, строим:

- эпюры изгибающих моментов ( $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ ) от единичных нагрузок  $\bar{X}_1 = 1$  и  $\bar{X}_2 = 1$ , приложенных в точках C и D соответственно (рис. 6.5, а, б);

- эпюры изгибающих моментов ( $\overline{M}_F$ ) от действующей нагрузки (рис. 6.5, в).

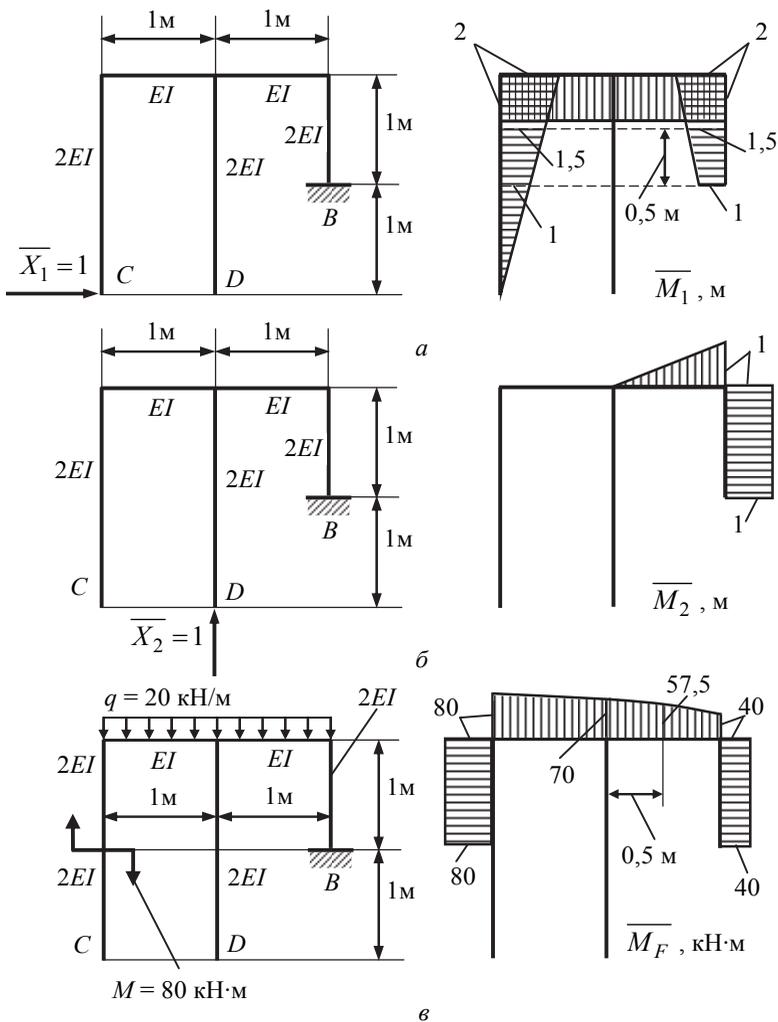
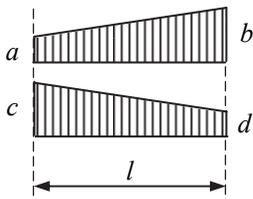


Рис. 6.5. Расчетные схемы и эпюры от единичных (а, б) и внешних (в) нагрузок

■ **Примечание**

Для вычислений по способу Верещагина в данной задаче используются следующие формулы для перемножения эпюр:

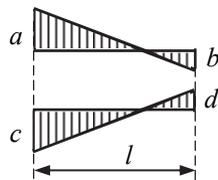


1) перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции:

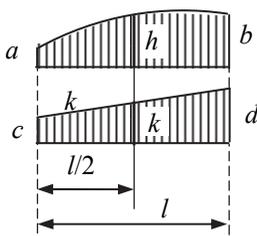
$$\omega M_1^{(C)} = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc)$$

Произведение ординат, имеющих одинаковые знаки, берутся со знаком плюс, а разные – со знаком минус. Например:

$$\omega M_1^{(C)} = \frac{l}{6}(-2ac - 2bd + ad + bc);$$



2) одна из эпюр очерчена по квадратной параболе (от равномерно распределенной нагрузки  $q$ ), другая – трапецидальная:



$$\omega M_1^{(C)} = (l/6)(ac + 4hk + bd)$$

или

$$\omega M_1^{(C)} = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc) - \frac{ql^3}{12} \frac{c+d}{2}$$

Используя способ Верещагина, находим значения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] + \frac{1}{EI} [2 \cdot 2 \cdot 2] + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \right] = \frac{63}{6EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] + \frac{1}{2EI} [1 \cdot 1 \cdot 1] = \frac{5}{6EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} [2 \cdot 1(-0,5)] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{6} (-2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) \right] = -\frac{7}{4EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{2EI} [80 \cdot 1 \cdot (-1,5)] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{6} (-80 \cdot 2 - 4 \cdot 70 \cdot 2 - 40 \cdot 2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} [40 \cdot 1(-1,5)] = -\frac{1070}{3EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{6} (70 \cdot 0 + 4 \cdot 57,5 \cdot 0,5 + 40 \cdot 1) \right] + \frac{1}{2EI} [40 \cdot 1 \cdot 1] = \frac{275}{6EI}.$$

Подставляя коэффициенты в канонические уравнения метода сил, получаем следующую систему уравнений:

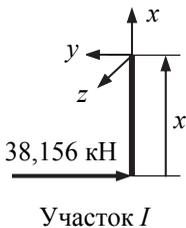
$$\frac{63}{6EI} X_1 - \frac{7}{4EI} X_2 - \frac{1070}{3EI} = 0;$$

$$-\frac{7}{4EI} X_1 + \frac{5}{6EI} X_2 + \frac{275}{6EI} = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$X_1 = 38,156 \text{ кН}, \quad X_2 = 25,128 \text{ кН}.$$

**Построение эпюр внутренних силовых факторов.** Предварительно выпишем уравнения равновесия для силовых участков рамы I–VI (рис. 6.6), используя скользящую систему координат:



участок I ( $0 \leq x \leq 1$  м):

$$N = 0,$$

$Q_y = 38,156$  кН (строим по направлению внешней силы),

$M_z = -38,156 x$  (строим на сжатом волокне, т. е. справа);

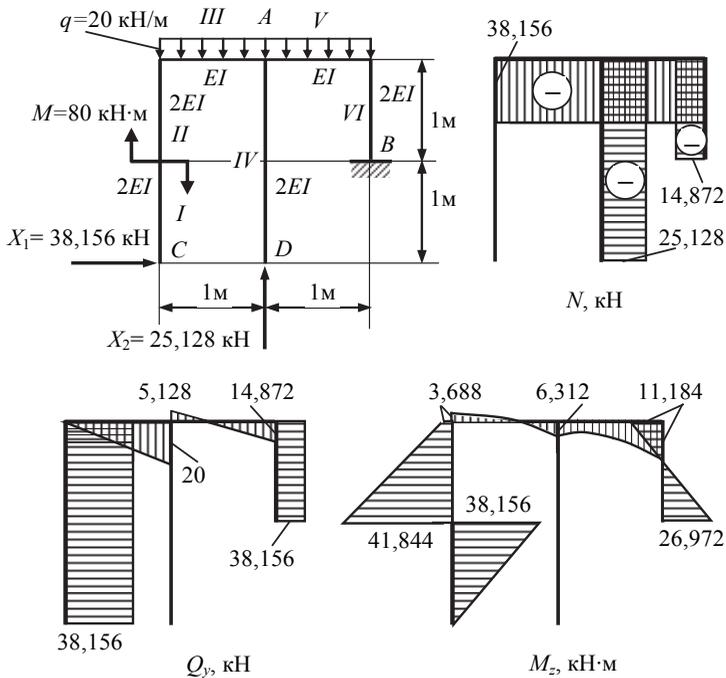


Рис. 6.6. Эпюры внутренних силовых факторов

участок II ( $1 \leq x \leq 2$  м):

$$N = 0,$$

$$Q_y = 38,156 \text{ кН},$$

$$M_z = -38,156x + M = -38,156x + 80;$$

участок III ( $0 \leq x \leq 1$  м):

$$N = -38,156 \text{ кН (сжатие)},$$

$Q_y = qx = 20x$  (строим по направлению внешней нагрузки  $q$ ),

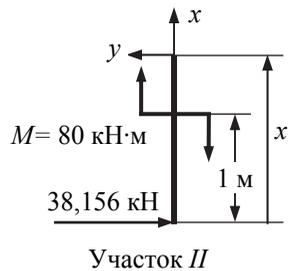
$$M_z = -38,156 \cdot 2 + M - qx^2/2 = 3,688 - 10x^2;$$

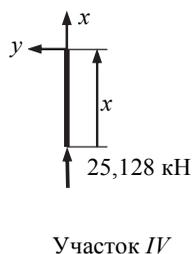
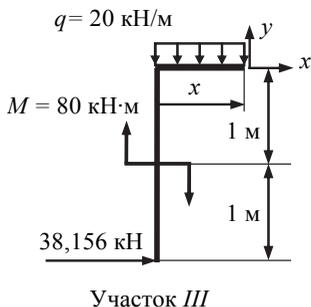
участок IV ( $0 \leq x \leq 2$  м):

$$N = -25,128 \text{ кН},$$

$$Q_y = 0,$$

$$M_z = 0;$$





участок V ( $1 \leq x \leq 2$  м):

$$N = -38,156 \text{ кН},$$

$$Q_y = 25,128 - qx,$$

$$M_z = -38,156 \cdot 2 + M - qx^2/2 + 25,128(x - 1) =$$

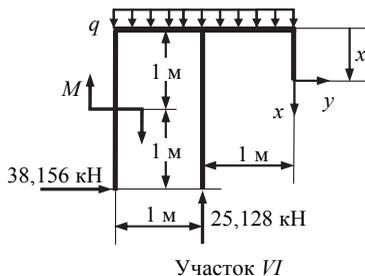
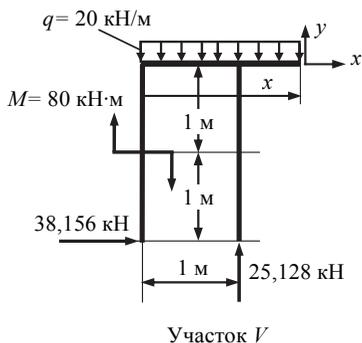
$$= 3,688 - 10x^2 + 25,128(x - 1);$$

участок VI ( $0 \leq x \leq 1$  м):

$$N = 25,128 - q \cdot 2 = -14,872 \text{ кН}, \quad Q_y = 38,156 \text{ кН},$$

$$M_z = -38,156(2 - x) + M - q \cdot 2 \cdot 1 + 25,128 \cdot 1 =$$

$$= -38,156(2 - x) + 65,128.$$



По полученным аналитическим выражениям построены эпюры внутренних силовых факторов, показанные на рис. 6.6.

**Проверка правильности раскрытия статической неопределимости рамы.**

■ *Статическая проверка* заключается в проверке равновесия некоторой отсеченной части рамы под действием приложенных к ней внешних сил и внутренних силовых факторов (берутся с эпюр  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_z$ , рис. 6.6), заменяющих действие отброшенных частей рамы на оставленную часть.

Рассмотрим, например, равновесие узла  $A$  (см. рис. 6.6). Из рис. 6.7 следует, что узел  $A$  находится в равновесии: сумма проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси, а также сумма моментов всех сил относительно точки  $A$  равны нулю.

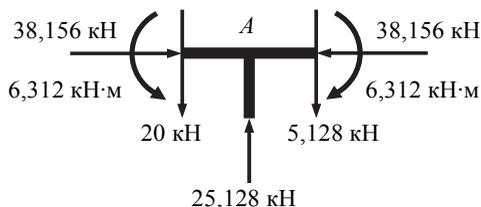


Рис. 6.7. Статическая проверка равновесия узла  $A$

■ *Деформационная проверка* заключается в определении перемещений в заданной системе, значения которых известны. Проверим, например, равен ли нулю угол поворота  $\theta_B$  в сечении  $B$  рамы (см. рис. 6.6). Для этого выберем другую основную систему, в которой угол поворота в сечении  $B$  возможен, и построим единичную эпюру  $\overline{M}_1$  (рис. 6.8). Для определения угла поворота в сечении  $B$  перемножим эпюру  $\overline{M}_1$  (рис. 6.8) с окончательной эпюрой  $M_z$  (см. рис. 6.6) по способу Верещагина:

$$\begin{aligned} \theta_B &= -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{6} (6,312 \cdot 0 + 4 \cdot 6,248 \cdot 0,5 + 11,184 \cdot 1) \right] + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{6} (-2 \cdot 11,184 \cdot 1 + 2 \cdot 26,972 \cdot 1 - 11,184 \cdot 1 + 26,972 \cdot 1) \right] = \\ &= -\frac{3,947}{EI} + \frac{3,947}{EI} = 0, \end{aligned}$$

т. е. статическая неопределимость рамы раскрыта правильно.

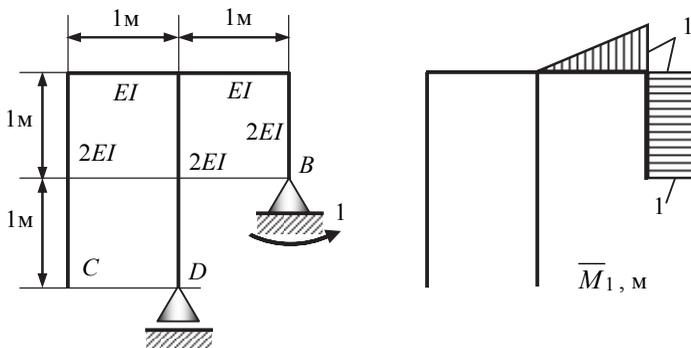


Рис. 6.8. Расчетная схема рамы при деформационной проверке и эпюра изгибающего момента от единичной нагрузки

**Подбор двутаврового профиля.** Подбор сечения проводится из условия прочности на изгиб

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

по формуле  $W_z \geq \frac{M_{z \max}}{[\sigma]}$ .

■ Вертикальные стержни выполнены из двух профилей двутаврового сечения с  $W_z^{\text{верт}} = 2W_z$ . Тогда

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}^{\text{верт}}}{2[\sigma]} \geq \frac{41,844 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 160} \geq 0,131 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 131 \text{ см}^3.$$

■ Горизонтальные стержни выполнены из одного профиля двутаврового сечения с  $W_z^{\text{гор}} = W_z$ . Тогда

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}^{\text{гор}}}{[\sigma]} \geq \frac{11,184 \cdot 10^{-3}}{160} \geq 0,0699 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 69,9 \text{ см}^3.$$

Из двух значений  $W_z$  выбираем наибольшее значение, соответствующее условию прочности на вертикальных стержнях. По ГОСТ 8239–72

выбираем двутавровую балку № 18 с  $W_z = 143 \text{ см}^3$ ,  $I_z = 1290 \text{ см}^4$ . При этом максимальные напряжения в раме

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\text{верт}}}{2W_z} = \frac{41,844 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = 146,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

**Вычисление угла поворота в сечении K.** Для вычисления угла поворота рамы в сечении K используется основная система (рис. 6.9). В сечении K прикладывается единичный момент и строится эпюра  $\bar{M}_1$ . Далее по способу Верещагина эта единичная эпюра перемножается с окончательной эпюрой  $M_z$  (см. рис. 6.6):

$$\begin{aligned} \theta_K &= \frac{1}{2EI_z} \left[ \frac{1}{6} (-2 \cdot 11,184 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 26,972 \cdot 10^{-3} \cdot 1 - \right. \\ &\quad \left. - 11,184 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + 26,972 \cdot 10^{-3} \cdot 1) \right] = \\ &= \frac{7,894 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}^2}{2(2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(1290 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4)} = 0,00153 \text{ рад} \frac{180^\circ}{\pi} = 0,0877^\circ \end{aligned}$$

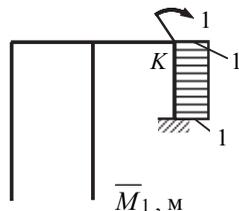


Рис. 6.9. Расчетная схема рамы для вычисления угла поворота в сечении K

Так как в результате расчета получили положительное значение угла поворота, то, следовательно, направление угла поворота в сечении K совпадает с направлением единичного момента, показанного на рис. 6.9.

**Исследование напряженного состояния рамы в случае повреждения опор.** В процессе работы конструкции одна из опор может быть повреждена. Так как система является статически неопределимой, то в этом случае напряжения в раме перераспределятся и при заданном значении  $q$  могут превысить допусаемые. Для оценки возможности работы рамы при повреждении шарнирно-подвижных опор рассмотрим следующие ситуации.

■ **Повреждена опора D.** Расчетная схема рамы для этой ситуации приведена на рис. 6.10. В этом случае в системе канонических уравне-

ний следует положить неизвестное  $X_2 = 0$  и рассмотреть решение уравнения

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

При известных  $\delta_{11} = \frac{63}{6EI}$ ,  $\Delta_{1F} = -\frac{1070}{3EI}$  находим  $X_1 = 33,97$  кН.

На рис. 6.10 построена эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры  $D$ .

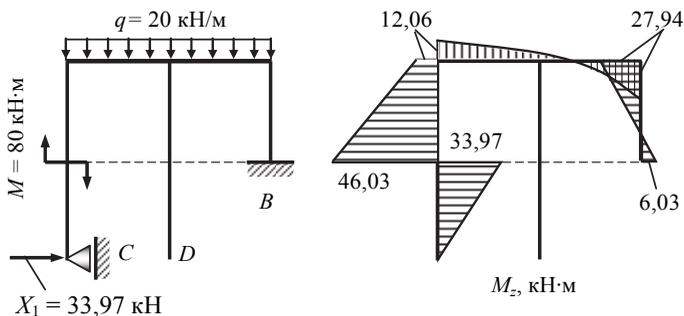


Рис. 6.10. Расчетная схема и эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры  $D$

Вычисляем напряжения для принятого поперечного сечения из двутаврового профиля № 18:

- вертикальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{верт}} = \frac{M_{z \max}^{\text{верт}}}{2W_z} = \frac{46,03 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = 160,9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

- горизонтальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{гор}} = \frac{M_{z \max}^{\text{гор}}}{W_z} = \frac{27,94 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 195,4 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Из расчетов видно, что при повреждении опоры  $D$  максимальные напряжения составляют 195,4 МПа, что в  $195,4/160 = 1,22$  раза превышает допусаемые напряжения. Следовательно, для безопасной эксплуатации поврежденной конструкции необходимо во столько же раз снизить эксплуатационную нагрузку. При этом она будет

$$[q] = 20/1,22 = 16,4 \text{ кН/м},$$

и соответственно

$$M = 4ql^2 = 65,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

■ *Повреждена опора C.* Расчетная схема рамы для этой ситуации приведена на рис. 6.11. В этом случае в системе канонических уравнений следует положить неизвестное  $X_1 = 0$  и рассмотреть решение уравнения

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

При известных  $\delta_{22} = \frac{5}{6EI}$ ,  $\Delta_{2F} = \frac{275}{6EI}$  определяем  $X_2 = -55 \text{ кН}$ .

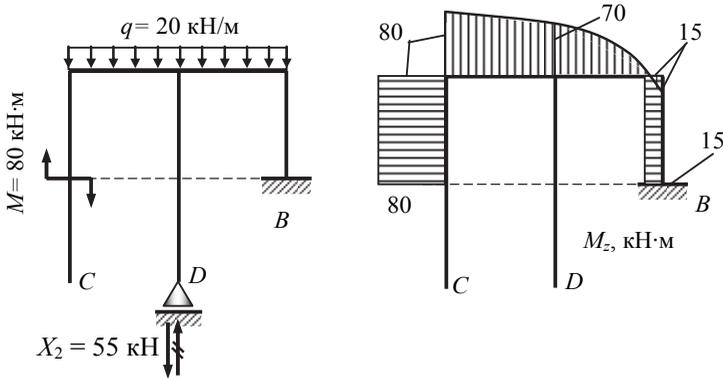


Рис. 6.11. Расчетная схема рамы и эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры  $D$

На рис. 6.11 построена эпюра изгибающих моментов в случае повреждения опоры  $C$ .

Вычисляем напряжения для принятого поперечного сечения из двутаврового профиля № 18:

- вертикальные стержни

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{верт}} = \frac{M_{z \text{ max}}^{\text{верт}}}{2W_z} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = 279,7 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

- горизонтальные стержни

$$\sigma_{\max}^{\text{гор}} = \frac{M_{z \max}^{\text{гор}}}{W_z} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 559,4 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа} .$$

Таким образом, при повреждении опоры  $D$  максимальные напряжения составляют 559,4 МПа, что в  $559,4/160 = 3,496$  раза превышает допускаемые напряжения. Поэтому допускаемая эксплуатационная нагрузка будет

$$[q] = 20/3,496 = 5,72 \text{ кН/м},$$

и соответственно

$$M = 4ql^2 = 22,88 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

## 7. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

### Задача. Расчет стержня, сжатого центральной продольной силой

Задана стойка, сжатая центральной продольной силой  $F$  (рис.7.1,*а*). Стойка имеет различную компоновку поперечного сечения (рис.7.1,*б*). Исходные данные приведены в табл.7.1 и 7.2.

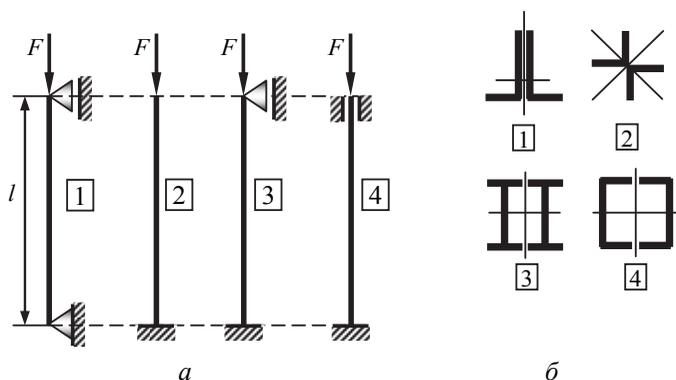


Рис. 7.1. Расчетные схемы(*а*) и типы сечений (*б*) стержня:

1 – неравнобокий уголок; 2 – равнобокий уголок; 3 – двутавр;  
4 – швеллер

Требуется определить:

- 1) размеры поперечного сечения;
- 2) коэффициент запаса, соответствующий принятым размерам сечения.

#### Указания

- При решении задачи использовать график зависимости  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ , построив его по данным своего варианта.

- Принятое сечение изобразить в масштабе, указать размеры, показать главные центральные оси и численные значения моментов инерции относительно этих осей.

Таблица 7.1

### Механические характеристики материалов

Материал	Предел текучести, $\sigma_T$	Предел пропорциональности, $\sigma_{пц}$	Модуль упругости, $E$ , $10^5$	Коэффициенты в формуле Ясинского		Коэффициент запаса прочности $[n]$
				$a$	$b$	
МПа						–
Сталь Ст 3	240	200	2,0	310	1,14	1,7
Сталь 20	260	220	2,0	330	1,11	1,6
Сталь 45	360	300	2,1	450	1,67	1,5
Сплав Д16Т	321	256	0,7	406	2,83	1,8

Таблица 7.2

### Исходные данные к задаче

Номер строки	Материал	Расчетная схема (рис.7.1, а)	Тип сечения (рис.7.1, б)	Нагрузка $F$ , кН	Длина $l$ , м	Коэффициент запаса по устойчивости $[n_y]$
1	Ст3	1	1	50	2,0	2,4
2	Сталь 20	2	2	80	2,5	2,5
3	Сталь 45	3	3	100	3,0	2,6
4	Д16Т	4	4	120	4,0	2,7
5	Сталь 20	2	1	150	5,0	2,8
6	Д16Т	1	2	180	6,0	2,4
7	Ст3	3	3	200	2,0	2,5
8	Сталь 20	4	4	230	2,5	2,6
9	Сталь 45	1	1	250	3,0	2,7
0	Ст3	4	2	300	4,0	2,8
	г	е	д	е	д	г

### Примеры решения и оформления задачи

Задана стойка, сжатая центральной продольной силой  $F$  (рис.7.2). Исходные данные (см. табл. 7.2): материал – сталь Ст3, расчетная схема 3 (рис. 7.2), тип сечения – рис. 7.1, б (здесь рассматриваются все сечения), нагрузка  $F = 200$  кН, длина  $l = 4,0$  м, коэффициент запаса по

устойчивости  $[n_y] = 3,0$ . Механические характеристики материала (см. табл. 7.1):  $\sigma_T = 240$  МПа,  $\sigma_{\text{пц}} = 200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициенты в формуле Ясинского –  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа, коэффициент запаса прочности  $[n] = 1,5$ .

Требуется определить:

- 1) размеры поперечного сечения;
- 2) коэффициент запаса, соответствующий принятым размерам сечения.

#### Указания

- При решении задачи использовать график зависимости  $\sigma_{\text{кр}} = f(\lambda)$ , построив его по данным своего варианта.

- Принятое сечение изобразить в масштабе, указать размеры, показать главные центральные оси и численные значения моментов инерции относительно этих осей.

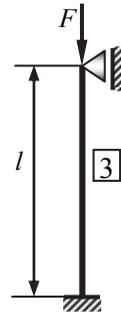


Рис. 7.2. Расчетная схема к задаче

#### Решение

**Построение графика**  $\sigma_{\text{кр}} = f(\lambda)$ . Характерные точки графика (рис. 7.3):

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3 \approx 99;$$

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_T}{b} = \frac{310 - 240}{1,14} = 61,4 \approx 61.$$

При построении кривой Эйлера используется формула

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

**Определение размеров поперечного сечения.** Для определения размеров поперечного сечения используется метод последовательных приближений.

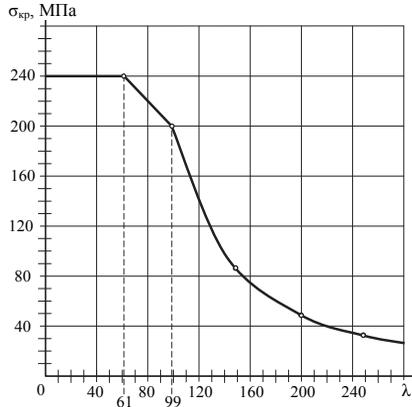


Рис. 7.3. График критических напряжений  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$

### Сечение из двух швеллеров (рис. 7.1, б)

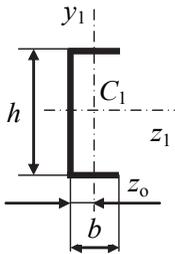
#### Первое приближение

- Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]},$$

$$A \geq \frac{F \cdot [n]}{\sigma_T} \geq \frac{(200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}) \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух швеллеров, то площадь одного швеллера  $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$ . По таблице сортамента ГОСТ 8240–97 выбираем швеллер № 6,5У с  $A' = 7,51 \text{ см}^2$ . Швеллер имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:



$$h = 65 \text{ мм}$$

$$b = 36 \text{ мм}$$

$$X_0 = z_0 = 1,24 \text{ см}$$

$$I_{z_1} = 48,6 \text{ см}^4$$

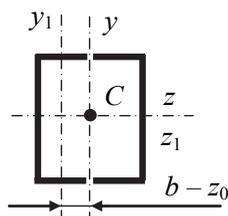
$$I_{y_1} = 8,7 \text{ см}^4.$$

Для сложного сечения (два швеллера) моменты инерции относительно главных центральных осей  $y, z$ :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 48,6 = 97,2 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \left[ I_{y_1} + (b - z_0)^2 A' \right] =$$

$$= 2 \left[ 8,7 + (3,6 - 1,24)^2 7,51 \right] = 101,06 \text{ см}^4.$$



Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения

$$I_{\min} = I_z = 97,2 \text{ см}^4.$$

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = \sqrt{97,2 / (2 \cdot 7,51)} = 2,54 \text{ см}.$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 2,54 = 110,2,$$

где  $\mu = 0,7$  – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (см. рис. 7.2).

- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 110$  имеем  $\sigma_{кр} = 163$  МПа.
- Действительное напряжение

$$\sigma_d = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 7,51 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 133,2 \text{ МПа}.$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{163}{133,2} = 1,22 < [n_y] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

*Второе приближение:* выбираем больший номер швеллера, например № 14У, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z_1}, \text{ см}^4$	$I_{y_1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
15,6	491	45,4	58	1,67

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

• моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух швеллеров:

$$I_z = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[45,4 + (5,8 - 1,67)^2 \cdot 15,6] = 623 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_y = 623 \text{ см}^4.$$

$$\bullet \quad i_{\min} = \sqrt{623 / (2 \cdot 15,6)} = 4,47 \text{ см.}$$

$$\bullet \quad \lambda = 0,7 \cdot 400 / 4,47 = 62,6 \approx 63.$$

• По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 63$  имеем  $\sigma_{кр} = 238$  МПа.

$$\bullet \quad \sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = 64,1 \text{ МПа.}$$

$$\bullet \quad n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{238}{64,1} = 3,7 > [n_y] = 3,0,$$

что превышает требуемый запас по устойчивости на

$$[(3,7 - 3,0) / 3,0] \cdot 100 \% = 23,3 \%.$$

*Третье приближение:* выбираем швеллер меньшего размера – № 12У:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
13,3	304	31,2	52	1,54

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

• моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух швеллеров:

$$I_z = 2 \cdot 304 = 608 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[31,2 + (5,2 - 1,54)^2 \cdot 13,3] = 418,7 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_y = 418,7 \text{ см}^4.$$

- $i_{\min} = \sqrt{418,7/(2 \cdot 13,3)} = 3,97 \text{ см.}$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400/3,97 = 70,5 \approx 71.$
- По графику  $\sigma_{\text{кр}} = f(\lambda)$  (рис. 7.3) для  $\lambda = 71$  имеем  $\sigma_{\text{кр}} = 230 \text{ МПа.}$
- $\sigma_{\text{д}} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 13,3 \cdot 10^{-4}} = 75,2 \text{ МПа.}$
- $n_{\text{у}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{д}}} = \frac{230}{75,2} = 3,06 > [n_{\text{у}}] = 3,0.$

Полученное превышение запаса устойчивости

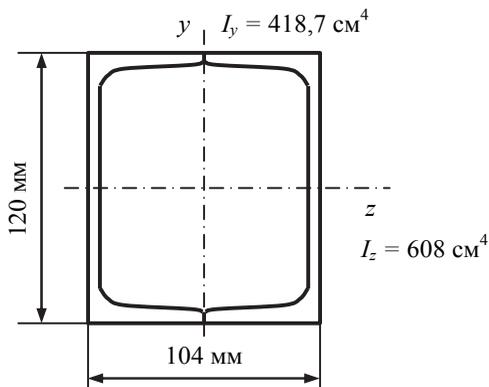
$$[(3,06 - 3,0) / 3,0] \cdot 100 \% = 2 \%$$

невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух швеллеров № 12У.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер швеллера	$A, \text{ см}^2$	$I_z, \text{ см}^4$	$I_y, \text{ см}^4$	$I_{\min}, \text{ см}^4$	$i_{\min} \text{ см}$	$\lambda$	$\sigma_{\text{кр}}, \text{ МПа}$ (график)	$\sigma_{\text{д}} = F/A, \text{ МПа}$	$n_{\text{д}} = \sigma_{\text{кр}}/\sigma_{\text{д}}$
1	6,5	2·7,51	97,2	101,1	97,2	2,54	110	162	133,2	1,2 < 3
2	14	2·15,6	982	623	623	4,47	63	238	64,1	3,7 > 3
3	12	2·13,3	608	418,7	418,7	3,97	71	230	75,2	3,06 > 3

### Поперечное сечение – 2 швеллера № 12



## Сечение из двух двутавров (рис. 7.1, б)

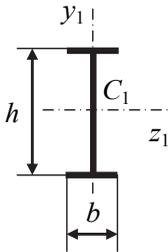
### Первое приближение

• Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]},$$

$$A \geq \frac{F \cdot [n]}{\sigma_T} \geq \frac{(200 \cdot 10^{-3} \text{ МН})1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух двутавров, то площадь одного двутавра  $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$ . По таблице сортамента ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 10 с  $A' = 12 \text{ см}^2$ . Двутавр имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:



$$\begin{aligned} h &= 100 \text{ мм} \\ b &= 55 \text{ мм} \\ I_{z_1} &= 198 \text{ см}^4 \\ I_{y_1} &= 17,9 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Для сложного сечения (два двутавра) моменты инерции относительно главных центральных осей  $y, z$ :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 198 = 396 \text{ см}^4,$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \left[ I_{y_1} + (b/2)^2 A' \right] = \\ &= 2 \left[ 17,9 + (5,5/2)^2 \cdot 12 \right] = 217,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения

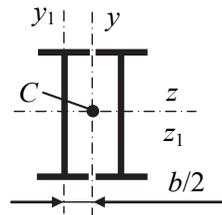
$$I_{\min} = I_y = 217,3 \text{ см}^4.$$

• Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = \sqrt{217,3/(2 \cdot 12)} = 3 \text{ см}.$$

• Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 3 = 93,3 \approx 93,$$



где  $\mu = 0,7$  – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (см. рис. 7.2).

- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 93$  имеем  $\sigma_{кр} = 204$  МПа.
- Действительное напряжение

$$\sigma_d = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 83,3 \text{ МПа} .$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{204}{83,3} = 2,45 < [n_y] = 3,0 ,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

*Второе приближение:* выбираем больший номер двутавра, например № 12, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$
14,7	350	27,9	64

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух двутавров:

$$I_z = 2 \cdot 350 = 700 \text{ см}^4 ,$$

$$I_y = 2[27,9 + (6,4/2)^2 \cdot 14,7] = 356,9 \text{ см}^4 ,$$

$$I_{\min} = I_y = 356,9 \text{ см}^4 .$$

- $i_{\min} = \sqrt{356,9 / (2 \cdot 14,7)} = 3,48 \text{ см}.$
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,48 = 80,5 \approx 81 .$
- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (рис. 7.3) для  $\lambda = 81$  имеем  $\sigma_{кр} = 218$  МПа.

- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 14,7 \cdot 10^{-4}} = 68 \text{ МПа}.$

- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{218}{68} = 3,2 > [n_y] = 3,0 .$

Превышение составляет

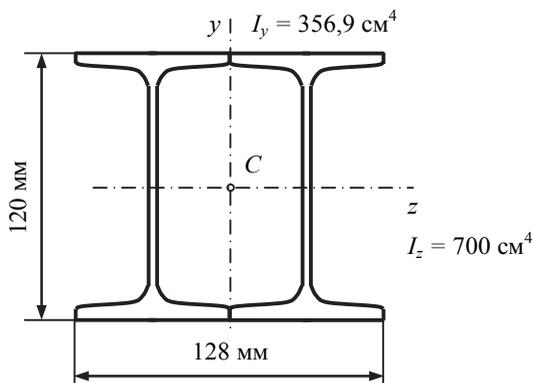
$$[(3,2 - 3,0) / 3,0] \cdot 100\% = 6,7\%,$$

что невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух двутавров № 12.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер двутавра	$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$I_{\min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{\min}$ , см	$\lambda$	$\sigma_{кр}$ , МПа (график)	$\sigma_d = F/A$ , МПа	$n_d = \sigma_{кр}/\sigma_d$
1	10	2·12	396	217,3	217,3	3,0	93	204	83,3	2,5 < 3
2	12	2·14,7	700	356,9	356,9	3,48	81	218	68	3,2 > 3

### Поперечное сечение – 2 двутавра № 12



### Сечение из двух неравнобоких уголков (рис. 7.1, б)

*Первое приближение*

• Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]},$$

$$A \geq \frac{F \cdot [n]}{\sigma_T} \geq \frac{(200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}) \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух уголков, то площадь одного уголка  $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$ . По таблице сортамента ГОСТ 8510–72 выбираем уголок № 8/5 с  $A' = 6,36 \text{ см}^2$ . Неравнобокий уголок имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:

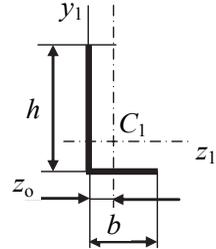
$$h = 80 \text{ мм}$$

$$b = 50 \text{ мм}$$

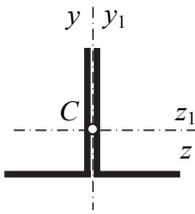
$$z_0 = 1,13 \text{ см}$$

$$I_{z_1} = 41,6 \text{ см}^4$$

$$I_{y_1} = 20,8 \text{ см}^4.$$



Для сложного сечения (два уголка) моменты инерции относительно главных центральных осей  $y, z$ :



$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 41,6 = 83,2 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2I_{y_1} = 41,6 \text{ см}^4.$$

Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения  $I_{\min} = I_y = 41,6 \text{ см}^4$ .

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = \sqrt{41,6/(2 \cdot 6,36)} = 1,8 \text{ см}.$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 1,8 = 155,6 \approx 156,$$

где  $\mu = 0,7$  – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (см. рис. 7.2).

- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 156$  имеем  $\sigma_{кр} = 81 \text{ МПа}$ .
- Действительное напряжение

$$\sigma_d = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 6,36 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 157,2 \text{ МПа}.$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{81}{157,2} = 0,52 < [n_y] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

*Второе приближение:* выбираем больший номер неравнобокого уголка, например № 14/9, с характеристиками:

$A', \text{см}^2$	$I_{z1}, \text{см}^4$	$I_{y1}, \text{см}^4$	$h, \text{мм}$	$b, \text{мм}$
18	364	194	140	90

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

- моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков:

$$I_z = 2 \cdot 364 = 728 \text{ см}^4, I_y = 2 \cdot 194 = 388 \text{ см}^4, I_{\min} = I_y = 388 \text{ см}^4.$$

- $i_{\min} = \sqrt{388 / (2 \cdot 18)} = 3,28 \text{ см}.$

- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,28 = 85,4 \approx 85.$

- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (рис. 7.3) для  $\lambda = 85$  имеем  $\sigma_{кр} = 213 \text{ МПа}.$

- $\sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 18 \cdot 10^{-4}} = 55,6 \text{ МПа}.$

- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{213}{55,6} = 3,8 > [n_y] = 3,0,$

что превышает требуемый запас по устойчивости на

$$[(3,8 - 3,0) / 3,0] \cdot 100\% = 26,7\%.$$

*Третье приближение:* выбираем уголок меньшего размера, например № 12,5/8:

$A', \text{см}^2$	$I_{z1}, \text{см}^4$	$I_{y1}, \text{см}^4$	$h, \text{мм}$	$b, \text{мм}$
16	256	137	125	80

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

• моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков

$$I_z = 2 \cdot 256 = 512 \text{ см}^4, I_y = 2 \cdot 137 = 274 \text{ см}^4, I_{\min} = I_y = 274 \text{ см}^4.$$

$$\bullet \quad i_{\min} = \sqrt{274 / (2 \cdot 16)} = 2,93 \text{ см.}$$

$$\bullet \quad \lambda = 0,7 \cdot 400 / 2,93 = 95,6 \approx 96.$$

По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 96$  имеем  $\sigma_{кр} = 203$  МПа.

$$\bullet \quad \sigma_d = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 62,5 \text{ МПа.}$$

$$\bullet \quad n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_d} = \frac{203}{62,5} = 3,2 > [n_y] = 3,0.$$

Полученное превышение запаса устойчивости

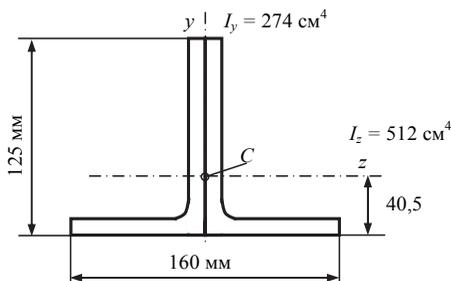
$$[(3,2 - 3,0) / 3,0] \cdot 100\% = 6,67\%$$

невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух неравнобоких уголков № 12,5/8.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер уголка	$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$I_{\min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{\min}$ , см	$\lambda$	$\sigma_{кр}$ , МПа (график)	$\sigma_d = F/A$ , МПа	$n_d = \sigma_{кр} / \sigma_d$
1	8/5	2·6,36	83,2	41,6	41,6	1,8	156	81	157,2	0,52 < 3
2	14/9	2·18	728	388	388	3,28	85	213	55,6	3,8 > 3
3	12,5/8	2·16	512	274	274	2,93	96	203	62,5	3,2 > 3

### Поперечное сечение – 2 неравнобоких уголка № 12,5/8



## Сечение из двух равнобоких уголков (рис. 7.1, б)

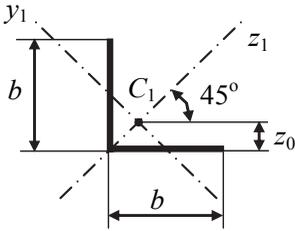
### Первое приближение

- Минимальный размер сечения определяем из условия прочности на сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]},$$

$$A \geq \frac{F \cdot [n]}{\sigma_T} \geq \frac{(200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}) \cdot 1,5}{240 \text{ МПа}} \geq 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из двух уголков, то площадь одного уголка  $A' \geq 6,25 \text{ см}^2$ . По таблице сортамента ГОСТ 8509–72 выбираем равнобокий уголок № 7,5 с  $A' = 7,39 \text{ см}^2$ . Уголок имеет следующие параметры, необходимые далее в расчете:



$$b = 75 \text{ мм}$$

$$z_0 = 2,02 \text{ см}$$

$$I_{z_1} = 62,6 \text{ см}^4$$

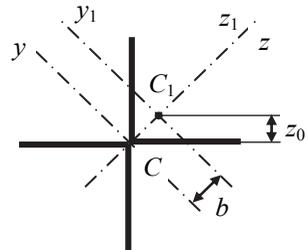
$$I_{y_1} = 16,4 \text{ см}^4.$$

Для сложного сечения (два уголка) моменты инерции относительно главных центральных осей  $y, z$ :

$$I_z = 2I_{z_1} = 2 \cdot 62,6 = 125,2 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \left[ I_{y_1} + b^2 A' \right] =$$

$$= 2 \left[ 16,4 + \left( \frac{2,02}{\sqrt{2}/2} \right)^2 \cdot 7,39 \right] = 153,4 \text{ см}^4.$$



Здесь  $b = z_0 / \sin 45^\circ$ .

Из двух полученных значений выбираем минимальный момент инерции поперечного сечения  $I_{\min} = I_z = 125,2 \text{ см}^4$ .

- Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min}/A} = \sqrt{125,2/(2 \cdot 7,39)} = 2,91 \text{ см.}$$

- Гибкость стержня:

$$\lambda = \mu l / i_{\min} = 0,7 \cdot 400 / 2,91 = 96,$$

где  $\mu = 0,7$  – коэффициент приведения длины для данной расчетной схемы (см. рис. 7.2).

• По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 96$  имеем  $\sigma_{кр} = 202$  МПа.

- Действительное напряжение

$$\sigma_{д} = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 7,39 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 135,3 \text{ МПа.}$$

- Действительный коэффициент запаса устойчивости

$$n_{у} = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{д}} = \frac{202}{135,3} = 1,49 < [n_{у}] = 3,0,$$

т. е. условие устойчивости не выполняется.

*Второе приближение:* выбираем больший номер уголка, например № 11, с характеристиками:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
15,2	279	72,7	110	2,96

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

• моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков

$$I_z = 2 \cdot 279 = 558 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2[71,7 + (2,96 \cdot 2 / \sqrt{2})^2 \cdot 15,2] = 678 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_z = 558 \text{ см}^4.$$

- $i_{\min} = \sqrt{558/(2 \cdot 15,2)} = 4,29 \text{ см.}$

- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 4,29 = 65$ .
- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (см. рис. 7.3) для  $\lambda = 65$  имеем  $\sigma_{кр} = 235$  МПа.
- $\sigma_{д} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 15,2 \cdot 10^{-4}} = 65,8$  МПа.
- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{д}} = \frac{235}{65,8} = 3,6 > [n_y] = 3,0$ ,

что превышает требуемый запас по устойчивости на

$$[(3,6 - 3,0) / 3,0] \cdot 100\% = 20\%.$$

*Третье приближение:* выбираем равнобокий уголок меньшего размера, например № 10:

$A', \text{ см}^2$	$I_{z1}, \text{ см}^4$	$I_{y1}, \text{ см}^4$	$b, \text{ мм}$	$z_0, \text{ см}$
13,8	207	54,2	100	2,71

Далее вновь проводим расчет на устойчивость:

• моменты инерции относительно главных центральных осей для сечения из двух уголков:

$$I_z = 2 \cdot 207 = 414 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2 \left[ 54,2 + (2,71 \cdot 2\sqrt{2})^2 \cdot 13,8 \right] = 513,8 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_z = 414 \text{ см}^4.$$

- $i_{\min} = \sqrt{414 / (2 \cdot 13,8)} = 3,87$  см.
- $\lambda = 0,7 \cdot 400 / 3,87 = 72,4 \approx 72$ .
- По графику  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  (рис. 7.3) для  $\lambda = 72$  имеем  $\sigma_{кр} = 227$  МПа.
- $\sigma_{д} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 13,8 \cdot 10^{-4}} = 72,5$  МПа.
- $n_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{д}} = \frac{227}{72,5} = 3,13 > [n_y] = 3,0$ .

Полученное превышение запаса устойчивости

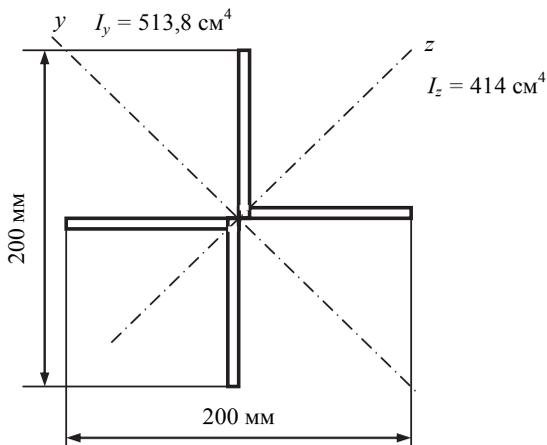
$$[(3,13 - 3,0) / 3,0] \cdot 100 \% = 4,3\%$$

невелико и, следовательно, принимаем окончательно поперечное сечение стержня, составленное из двух равнобоких уголков № 10.

Основные результаты расчета сводим в таблицу.

Номер приближения	Номер уголка	$A_2$ см <sup>2</sup>	$I_{z,4}$ см <sup>4</sup>	$I_{y,4}$ см <sup>4</sup>	$I_{\min,4}$ см <sup>4</sup>	$i_{\min,4}$ см	$\lambda$	$\sigma_{кр}$ , МПа (график)	$\sigma_{д} =$ $= F/A$ МПа	$n_{д} =$ $= \sigma_{кр}/\sigma_{д}$
1	7,5	2·7,39	125,2	153,4	125,2	2,91	96	202	135,3	1,49 < 3
2	11	2·15,2	558	678	558	4,29	65	235	65,8	3,6 > 3
3	10	2·13,8	414	513,8	414	3,87	72	227	72,5	3,13 > 3

Поперечное сечение – 2 равнобоких уголка № 10



## 8. ДИНАМИКА

### Задача 8.1. Учет сил инерции

С круглым стальным валом (рис. 8.1) жестко соединен ломаный стержень такого же диаметра ( $d = 2R$ , где  $R$  – радиус). Ломаный стержень имеет сосредоточенные массы. Вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Требуется:

- 1) построить эпюры внутренних усилий;
- 2) определить из условия прочности на изгиб допускаемую угловую скорость вращения вала.

**Указание.** Учесть только инерционные нагрузки (от сосредоточенных и распределенных масс). Принять  $m = \rho \pi R^2 l = \rho A l$ , где  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$  – плотность стали.

Т а б л и ц а 8.1

Исходные данные к задаче 8.1

Номер строки	Номер схемы по рис. 8.1	Радиус сечения $R$	Линейный размер			Сосредоточенная масса		Допускаемое напряжение $[\sigma]$
			$l$	$b$	$c$	$m_1$	$m_2$	
		мм			кг		МПа	
1	1	25	200	$l$	$l$	$m$	0	100
2	2	30	250	$2l$	$2l$	0	$m$	120
3	3	35	280	$1,5l$	$1,5l$	$0,5m$	0	140
4	4	40	300	$1,8l$	$1,8l$	0	$0,5m$	160
5	5	45	320	$1,2l$	$1,2l$	$0,6m$	0	180
6	6	50	350	$0,5l$	$0,5l$	0	$0,8m$	200
7	7	55	400	$1,5l$	$l$	$1,5m$	0	220
8	8	60	450	$l$	$1,5l$	0	$1,5m$	240
9	9	65	480	$2l$	$l$	$1,2m$	0	260
0	10	70	500	$l$	$0,5l$	0	$1,2m$	280
	е	г	д			е		д

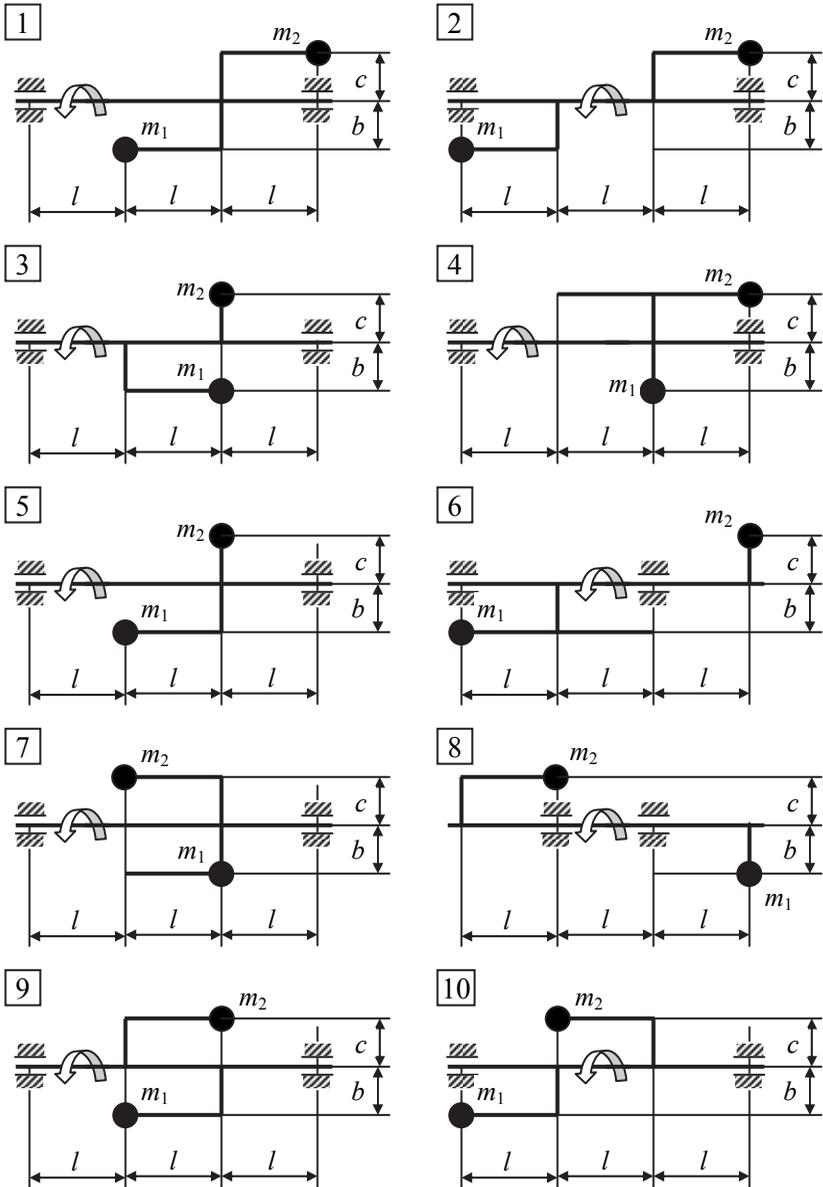


Рис. 8.1. Расчетные схемы к задаче 8.1

### Пример расчета и оформления задачи

С круглым стальным валом (рис. 8.2) жестко соединен ломаный стержень такого же диаметра ( $d = 2R$ , где  $R$  – радиус). Ломаный стержень имеет сосредоточенную массу. Вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Исходные данные к задаче:

Радиус сечения	Линейный размер			Сосредоточенная масса		Допускаемое напряжение [ $\sigma$ ]
	$l$	$b$	$c$	$m_1$	$m_2$	
$R$	мм			кг		МПа
20	500	$l$	$l$	0	$m$	150

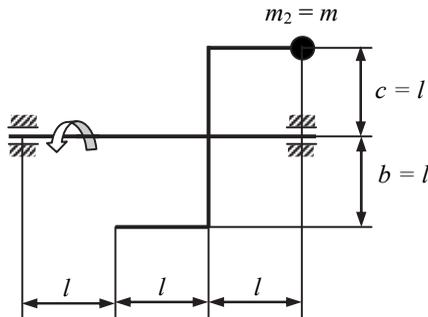


Рис. 8.2. Заданная схема конструкции

Требуется:

- 1) построить эпюры внутренних усилий;
- 2) определить из условия прочности на изгиб допускаемую угловую скорость вращения вала.

**Указание.** Учесть только инерционные нагрузки (от сосредоточенных и распределенных масс). Принять  $m = \rho\pi R^2 l = \rho A l$ , где  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  – плотность стали.

#### Решение

**Определение сил инерции.** При решении задачи используется принцип Даламбера. Силы инерции при вращательном движении сосредоточенной массы  $m$  определяются по формуле

$$F_{\text{и}} = ma_n = m\omega^2 r,$$

где  $a_n = \omega^2 r$  – нормальное ускорение;  $r$  – расстояние от массы до оси вращения.

В случае системы с распределенными параметрами (распределенной массой) элементарная сила инерции вычисляется по формуле

$$dF_{\text{и}} = dm\omega^2 r = \rho A dx \omega^2 r,$$

откуда интенсивность сил инерции

$$q_{\text{и}} = dF_{\text{и}}/dx = \rho A \omega^2 r.$$

Вычислим интенсивность сил инерции  $q_{\text{и}}$  по участкам ломаного стержня  $KLDM$  (рис. 8.3, а):

$$\text{участок } KL \ (0 \leq x \leq l): (q_{\text{и}})_{KL} = \rho A \omega^2 l;$$

$$\text{участок } LD \ (0 \leq x \leq l): (q_{\text{и}})_{LD} = \rho A \omega^2 x \rightarrow x = 0 \ (q_{\text{и}})_{LD} = 0,$$

$$x = l \ (q_{\text{и}})_{LD} = \rho A \omega^2 l;$$

на участке  $LD$  силы инерции изменяются по линейному закону и направлены вдоль участка  $LD$  (рис. 8.3, б);

$$\text{участок } DO \ (0 \leq x \leq l): (q_{\text{и}})_{DO} = \rho A \omega^2 x \rightarrow x = 0 \ (q_{\text{и}})_{DO} = 0,$$

$$x = l \ (q_{\text{и}})_{DO} = \rho A \omega^2 l;$$

на участке  $DO$  силы инерции изменяются по линейному закону и направлены вдоль участка  $DO$  (рис. 8.3, б);

$$\text{участок } OM \ (0 \leq x \leq l): (q_{\text{и}})_{OM} = \rho A \omega^2 l.$$

Кроме того, в точке  $M$  действует сила инерции от сосредоточенной массы  $m - F_{\text{и}}(m_2) = m\omega^2 l = \rho A \omega^2 l^2$ .

На рис. 8.3, б показаны эпюры сил инерции. На рис. 8.4 приведены эпюры внутренних силовых факторов для ломаного стержня  $KLDM$ .

**Определение допускаемой угловой скорости вращения вала.** Расчетная схема вала  $BC$  показана на рис. 8.5. Внешней нагрузкой для вала являются внутренние силовые факторы ломаного стержня, имеющие место в сечении  $D$  (см. рис. 8.4):

$$N = 2,5\rho A \omega^2 l^2 - 1,5\rho A \omega^2 l^2 = \rho A \omega^2 l^2,$$

$$M = 1,5\rho A \omega^2 l^3 + 0,5\rho A \omega^2 l^3 = 2\rho A \omega^2 l^3.$$

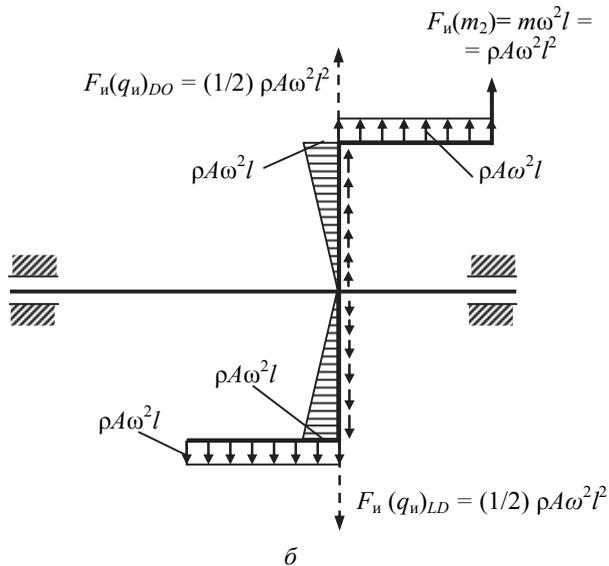
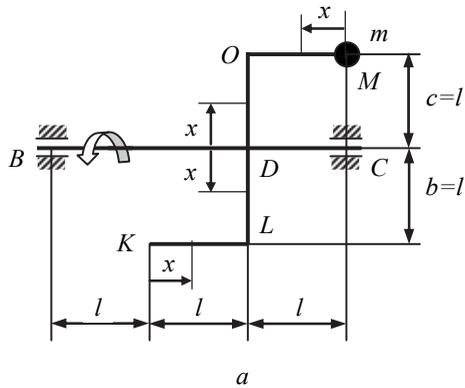


Рис. 8.3. Схема конструкции для расчета сил инерции (а) и распределение сил инерции по ломаному стержню (б)

Определяем реакции опор (рис. 8.5):

$$\sum m_B = 0 \quad R_C(3l) + 2\rho A \omega^2 l^3 + \rho A \omega^2 l^2(2l) = 0 \rightarrow R_C = -(4/3) \rho A \omega^2 l^2,$$

т. е. реакция опоры направлена в противоположную сторону;

$$\sum m_C = 0 \quad R_B(3l) - 2\rho A \omega^2 l^3 + \rho A \omega^2 l^2 \cdot l = 0 \rightarrow R_B = (1/3) \rho A \omega^2 l^2.$$

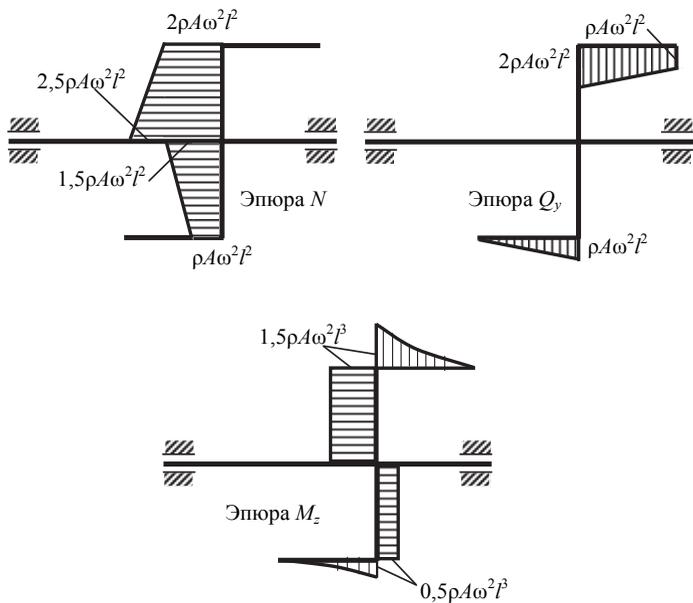


Рис. 8.4. Эпюры внутренних силовых факторов для ломаного стержня

Далее строим эпюру изгибающего момента (см. рис. 8.5) и по эпюре определяем значение максимального изгибающего момента:  $M_z \max = (4/3)\rho A \omega^2 l^3$ .

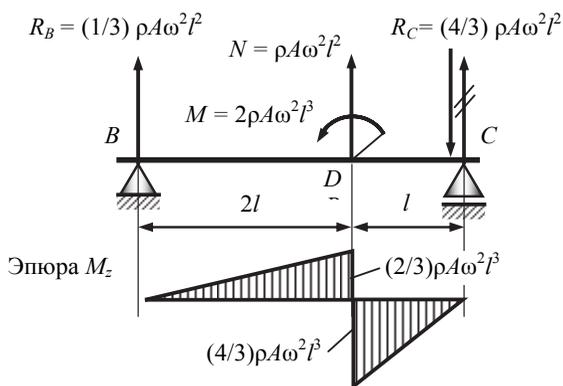


Рис. 8.5. Эпюра изгибающего момента  $M_z$

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Здесь  $W_z = \pi d^3/32 = \pi R^3/4$ . Из условия прочности определяем допускаемую угловую скорость вала:

$$\frac{(4/3)\rho A \omega^2 l^3}{\pi R^3/4} \leq [\sigma],$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot 3R}{16\rho l^3}} \leq \sqrt{\frac{150 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3}} \leq 24 \text{ с}^{-1}. \quad \text{Ответ}$$

## Задача 8.2. Удар

На стальную балку двутаврового поперечного сечения с высоты  $h$  падает груз весом  $G$  (рис. 8.6). Исходные данные приведены в табл. 8.2. При расчете принять: допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа, модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Требуется:

- 1) определить наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, жесткость которой равна «с»;
- 3) сравнить полученные результаты;
- 4) проверить прочность балки.

Таблица 8.2

Исходные данные к задаче 8.2

Номер строки	Схема по рис. 8.6	Номер двутавра	Вес $G$ , кН	Длина $l$ , м	Высота $h$ , мм	Жесткость пружины $c$ , кН/м
1	1	20	3	2	30	500
2	2	24	4	3	40	400
3	3	27	5	4	50	300
4	4	30	6	4	60	200
5	5	33	7	3	80	600
6	6	36	8	2	90	500
7	7	40	2	2	100	400
8	8	30	3	3	40	300
9	9	36	4	4	50	500
0	10	40	5	1	60	600
	е	д	е	д	г	д

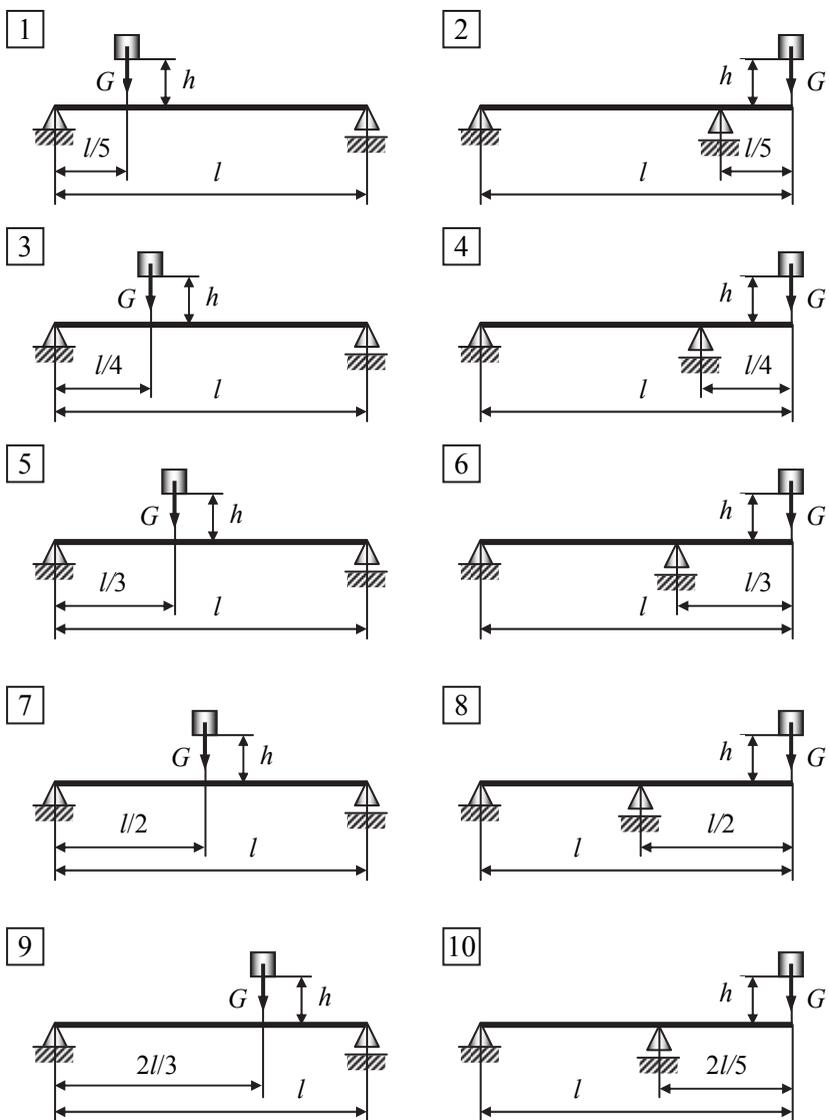


Рис. 8.6. Расчетные схемы к задаче 8.2

### Пример решения и оформления задачи

На стальную балку двутаврового поперечного сечения с высоты  $h$  падает груз весом  $G$  (рис. 8.7). При расчете принять: модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, допустимое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Исходные данные к задаче:

Номер двутавра	Вес $G$ , кН	Длина $l$ , м	Высота $h$ , мм	Жесткость пружины $c$ , кН/м
24	4	2	40	500

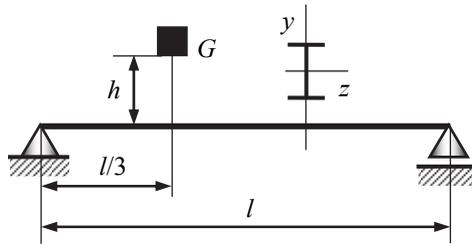


Рис. 8.7. К задаче 8.2

Требуется:

- 1) определить наибольшее нормальное напряжение в балке,
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, жесткость которой равна « $c$ »,
- 3) сравнить полученные результаты,
- 4) проверить прочность балки.

### Решение

**1. Определение наибольшего напряжения в балке на двух жестких опорах.** Наибольшие напряжения в балке при изгибающем ударе определяются по формуле

$$\sigma_{д \max} = k_d \sigma_{ст \max} ,$$

где  $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$  – коэффициент динамичности;  $\sigma_{ст \max} = \frac{M_{z \max}}{W_z}$  –

наибольшее напряжение в балке при статическом приложении нагрузки.

Для определения наибольшего изгибающего момента  $M_{z \max}$  от статически приложенной силы  $G$  строится эпюра изгибающего момента для расчетной схемы, изображенной на рис. 8.8, а, и определяется  $M_{z \max} = 16/9$  кН·м.

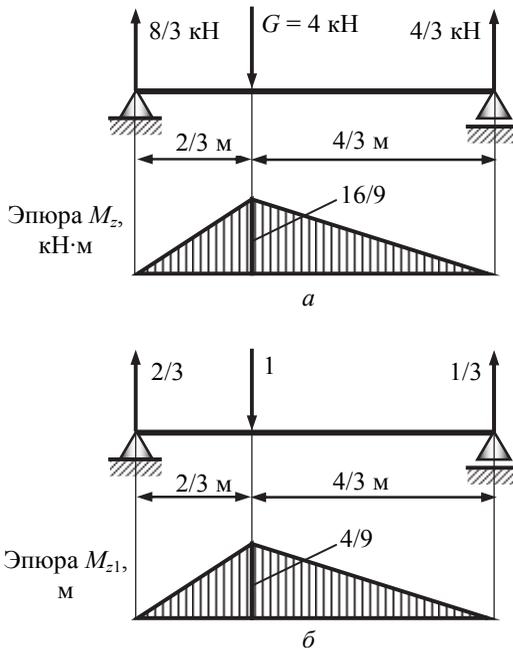


Рис. 8.8. Расчетные схемы балки:

а – для определения  $\sigma_{\text{ст max}}$ ; б – единичное состояние для определения  $\Delta_{\text{ст}}$

Тогда наибольшее напряжение в балке при статическом приложении нагрузки

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{M_{z \max}}{W_z} = \frac{(16/9)10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}}{289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 6,15 \text{ МПа},$$

где  $W_z = 289 \text{ см}^3$  (для двутавра № 24, таблица сортамента).

Для вычисления  $\Delta_{\text{ст}}$  по способу Верещагина необходимо изобразить единичное состояние для системы и построить эпюру изгибающего

момента  $M_{z1}$  от единичной нагрузки (рис. 8.8, б). Далее, перемножая эпюры  $M_z$  и  $M_{z1}$ , получаем

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{ст}} &= \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{1}{2} \frac{16}{9} \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{2} \frac{16}{9} \frac{4}{3} \left( \frac{2}{3} \frac{4}{9} \right) \right] = \frac{0,5267}{EI_z} = \\ &= \frac{0,5267 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}^3}{(2 \cdot 10^5 \text{ МПа})(3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4)} = 0,761 \cdot 10^{-4} \text{ м},\end{aligned}$$

где  $I_z = 3460 \text{ см}^4$  (двутавр № 24, таблица сортамента).

Коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,04}{0,761 \cdot 10^{-4}}} = 33,4.$$

Наибольшие напряжения в балке при ударе:

$$\sigma_{\text{дmax}} = k_d \sigma_{\text{стmax}} = 33,4 \cdot 6,15 (\text{МПа}) = 205,4 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

**2. Определение наибольшего напряжения в балке при условии, что правая опора заменена пружиной.** В случае опирания правого конца балки на пружину (рис. 8.9) при действии на балку статической силы  $G$  пружина под влиянием опорной реакции, равной  $G/3$ , укоротится на величину

$$a = G/(3c),$$

где  $c = 500 \text{ кН/м}$  – жесткость пружины. Правый конец балки при этом опустится на величину  $a$ , а сечение балки в месте падения груза – на величину

$$a/3 = G/(9c) = 4/(9 \cdot 500) = 8,889 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Полное вертикальное перемещение балки от статического действия силы  $G$  в месте падения груза равно сумме величин прогиба, найденного при расчете балки без пружины, и перемещения, вызванного сжатием пружины, т. е.

$$\Delta'_{\text{ст}} = 0,761 \cdot 10^{-4} + 8,889 \cdot 10^{-4} = 9,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

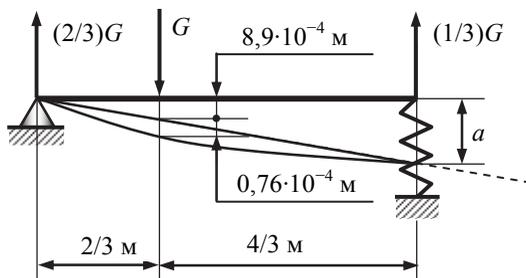


Рис. 8.9. Расчетная схема балки с пружиной

Коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2(0,04 \text{ м}) / (9,65 \cdot 10^{-4} \text{ м})} = 10,16.$$

Наибольшее напряжение от статической силы  $G$  в данном случае такое же, как и для балки, не опертой на пружину, т. е.  $\sigma_{\text{ст max}} = 6,15 \text{ МПа}$ .

Наибольшие напряжения при ударе

$$\sigma_{\text{д max}} = k_d \sigma_{\text{ст max}} = 10,16 \cdot (6,15 \text{ МПа}) = 62,5 \text{ МПа}. \quad \text{Ответ}$$

Таким образом, установка пружины под один конец балки уменьшила наибольшие напряжения при ударе в 3,29 раза.

**Проверка прочности балки.** Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{д max}} = k_d \sigma_{\text{ст max}} \leq [\sigma].$$

Для балки без пружины

$$\sigma_{\text{д max}} = 205,4 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}, \quad \text{Ответ}$$

т. е. условие прочности не выполняется. Для его выполнения необходимы изменения в конструкции, например, взять больший номер двутавра.

Для балки с пружиной

$$\sigma_{\text{д max}} = 62,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}, \quad \text{Ответ}$$

т. е. условие прочности выполняется, но балка существенно недогружена. Требуется изменения в конструкции.

### Задача 8.3. Колебания упругих систем

На двух стальных балках двутаврового сечения установлен двигатель массой  $m$  (рис. 8.10). Ротор двигателя массой  $m_0$  вращается с постоянной частотой  $n$  (об/мин) и имеет эксцентриситет  $e$ . Исходные данные приведены в табл. 8.3.

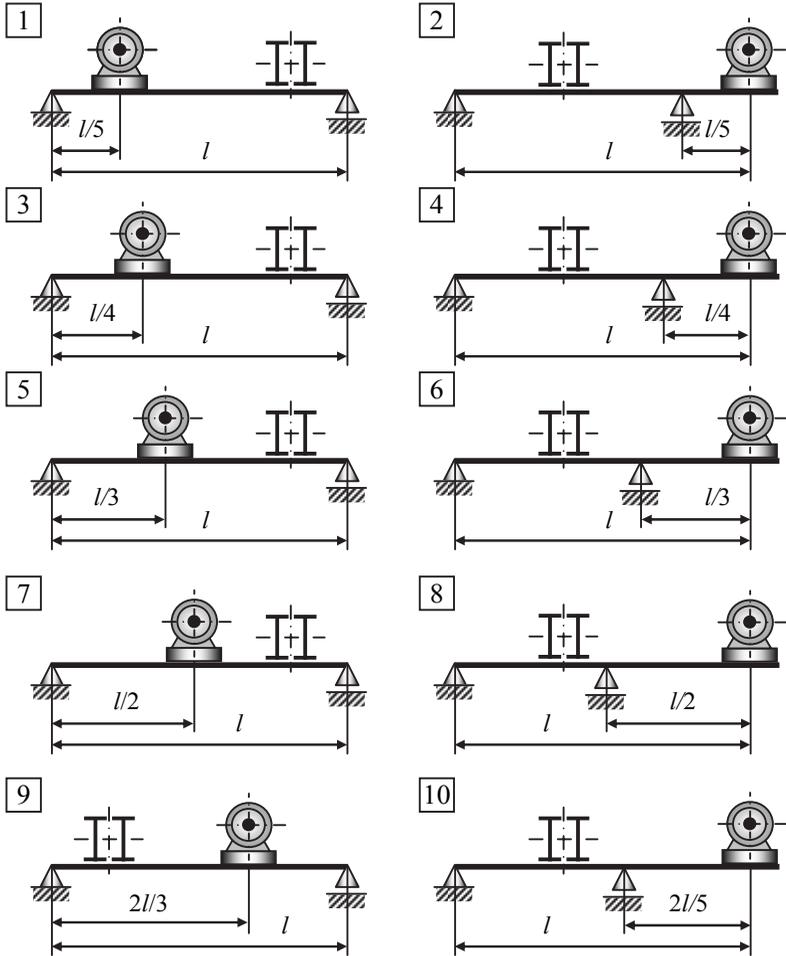


Рис. 8.10. Расчетные схемы к задаче 8.3

Требуется:

- 1) произвести проверку конструкции на резонанс;
- 2) определить наибольшие напряжения в конструкции.

**Указания**

1. Собственный вес балки и силы сопротивления не учитывать.
2. Если при расчете конструкции имеет место резонанс, необходимо предусмотреть соответствующие мероприятия, обеспечивающие его отсутствие.

Таблица 8.3

**Исходные данные к задаче 8.3**

Номер строки	Расчетная схема по рис. 8.10	Номер двутавра	Длина $l$ , м	Масса двигателя $m$ , кг	Масса ротора $m_0$ , кг	Эксцентриситет $e$ , мм	Частота вращения ротора $n$ , об/мин
1	1	10	1,0	200	100	5	300
2	2	16	1,2	220	110	4	400
3	3	18	1,4	240	120	3	500
4	4	20	1,6	260	130	2	600
5	5	24	1,8	280	140	1	700
6	6	12	2,0	300	150	5	800
7	7	14	2,2	320	160	4	900
8	8	16	2,4	340	170	3	1000
9	9	18	2,6	360	180	2	1200
0	10	20	3,0	380	200	1	900
	е	д	г	е		д	г

*Пример расчета и оформления задачи*

На двух стальных балках двутаврового сечения установлен двигатель массой  $m$  (рис. 8.11). Ротор двигателя массой  $m_0$  вращается с постоянной частотой  $n$  (об/мин) и имеет эксцентриситет  $e$ . Исходные данные:

Номер двутавра	Длина $l$ , м	Масса двигателя $m$ , кг	Масса ротора $m_0$ , кг	Эксцентриситет $e$ , мм	Частота вращения ротора $n$ , об/мин
10	2,0	300	100	2	945

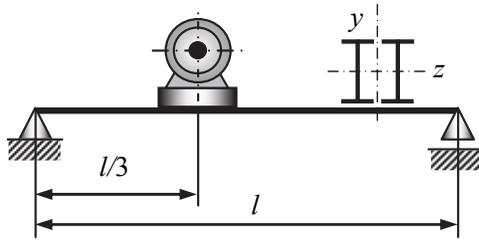


Рис. 8.11. Расчетная схема конструкции

Требуется:

- 1) произвести проверку конструкции на резонанс;
- 2) определить наибольшие напряжения в конструкции.

**Указания**

- 1) Собственный вес балки и силы сопротивления не учитывать.
- 2) Если при расчете конструкции имеет место резонанс, необходимо предусмотреть соответствующие мероприятия, обеспечивающие его отсутствие.

**Решение**

**Проверка системы на резонанс.** Круговая частота возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 945}{30} = 98,91 \text{ с}^{-1}.$$

Круговая частота собственных колебаний системы

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}.$$

Для определения  $\delta_{11}$  необходимо построить расчетную схему с внешней нагрузкой, равной единице, и эпюру изгибающего момента от этой единичной силы (рис. 8.12). Находим  $\delta_{11}$  по способу Верещагина, умножая эпюру  $M_{z1}$  саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot 2I_z} \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{4}{9} \frac{2}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \frac{4}{9} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{4}{9} \frac{4}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \frac{4}{9} \right) \right] = \frac{0,1317}{EI_z}.$$

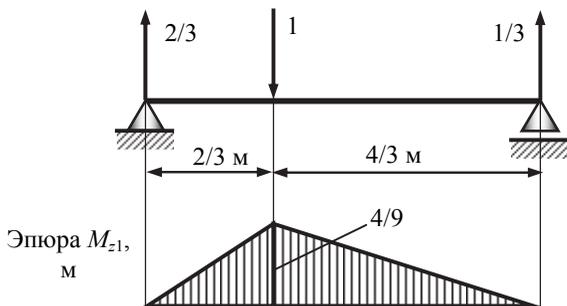


Рис. 8.12. Схема нагружения системы единичной силой

Тогда

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{EI_z}{m \cdot 0,1317}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}}{300 \cdot 0,1317}} = 100,1 \text{ c}^{-1},$$

где  $I_z = 198 \text{ см}^4$  – осевой момент инерции двутавра № 10 (таблица сортамента).

Отношение частот

$$\frac{\omega}{p} = \frac{98,91}{100,1} = 0,988$$

Ответ

находится в зоне резонанса  $0,7 < \omega/p < 1,3$ .

**Отстройка от резонанса.** Наиболее простым выходом из этого положения является замена профиля другим номером по стандарту, т. е. изменение жесткости системы. Возьмем, например, двутавр №12 с  $I_z = 350 \text{ см}^4$ ; в этом случае

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}{300 \cdot 0,1317}} = 133,2 \text{ c}^{-1};$$

$$\frac{\omega}{p} = \frac{98,91}{133,2} = 0,743,$$

также возможен резонанс.

Для следующего номера двутавра №14 с  $I_z = 572 \text{ см}^4$  имеем

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}}{300 \cdot 0,1317}} = 170,2 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\omega}{p} = \frac{98,91}{170,2} = 0,58, \quad \text{Ответ}$$

что находится вне зоны резонанса.

Определяем коэффициент динамичности по формуле, используемой вне зоны резонанса:

$$k_d = \pm \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} = \pm \frac{1}{1 - \frac{98,91^2}{170,16^2}} = 1,51.$$

**Напряжения.** Определяем наибольшее значение возмущающей силы

$$F_0 = m_0 \omega^2 e = 100 \cdot 98,91^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1956,6 \text{ Н}.$$

Напряжение, возникающее в системе под действием этой силы, при условии ее статического приложения (рис. 8.13) будет

$$\sigma_{\text{ст max}}(F_0) = \frac{M_{z \text{ max}}(F_0)}{2W_z} = \frac{869,6 \cdot 10^{-6} \text{ МН} \cdot \text{м}}{2 \cdot 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 5,32 \text{ МПа},$$

где  $W_z = 81,7 \text{ см}^3$  – осевой момент сопротивления двутавра №14). Напряжение при вынужденных колебаниях равно

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\text{ст max}}(F_0) = 1,51 \cdot 5,32 = 8,03 \text{ МПа}.$$

Напряжения  $\sigma_d$  накладываются на постоянные напряжения от собственного веса двигателя  $G = mg = 3000 \text{ Н}$ :

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{M_{z \text{ max}}(G)}{2W_z} = \frac{1333,3 \cdot 10^{-6} \text{ МН} \cdot \text{м}}{2 \cdot 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 8,16 \text{ МПа},$$

где  $M_{z \text{ max}}(G) = 1333,3 \text{ Н} \cdot \text{м}$  – наибольший изгибающий момент с эюры  $M_z(G)$  (рис. 8.14).

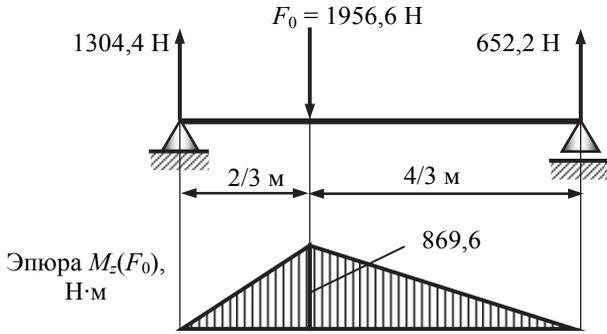


Рис. 8.13. Схема нагружения системы возмущающей силой  $F_0$

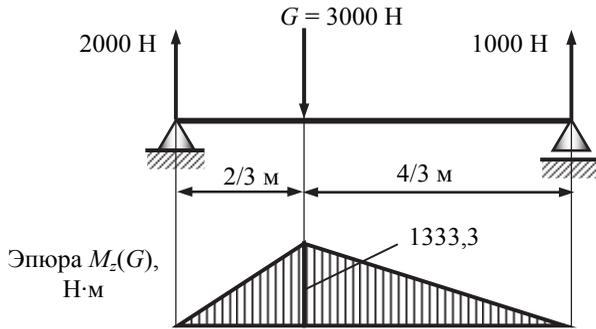


Рис. 8.14. Схема нагружения системы от веса двигателя  $G$

Наибольшие напряжения, возникающие в упругой системе,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_{\text{стmax}}(G) + \sigma_{\text{дmax}}(F_0) = \\ &= 8,16 + 8,03 = 16,19 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

Ответ

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Учебники

1. *Атапин В. Г.* Сопротивление материалов / В. Г. Атапин. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 342 с. – Серия: Бакалавр. Академический курс.
2. *Атапин В. Г.* Сопротивление материалов. Базовый курс. Дополнительные главы / В. Г. Атапин, А. Н. Пель, А. И. Темников. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 508 с. – Серия «Учебники НГТУ».
3. *Атапин В. Г.* Сопротивление материалов: учебник / В.Г. Атапин, А.Н. Пель, А.И. Темников. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 556 с. – Серия «Учебники НГТУ».
4. *Вольмир А. С.* Сопротивление материалов / А. С. Вольмир, Ю. П. Григорьев, А. И. Станкевич. – М.: Дрофа, 2007. – 591 с.
5. *Дарков А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1969. – 734 с. (Имеются переиздания)
6. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов.– 5-е изд. – М.: Наука, 1970. – 544 с. (Имеются переиздания)

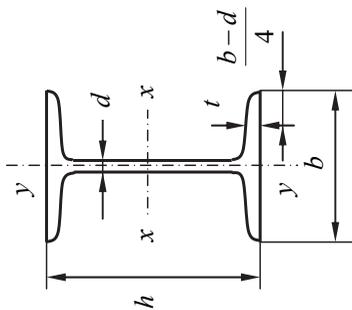
### Учебные пособия, сборники задач

9. *Ицкович Г.М.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров. – М.: Высшая школа, 1999. – 592 с.
10. *Атапин В. Г.* Сборник заданий по сопротивлению материалов / В.Г. Атапин [и др]. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 288 с.
11. *Атапин В.Г.* Практикум по сопротивлению материалов: учеб. пособие/ В.Г. Атапин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 216 с.
12. *Атапин В.Г.* Сопротивление материалов. Краткий теоретический курс: учеб. пособие / В.Г. Атапин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 204 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П

## ДУГАТAVРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ГОСТ 8239–89)

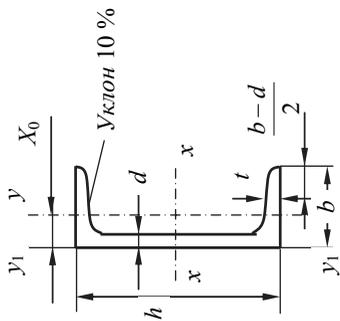


Номер профиля	Размеры				Площадь сечения	Масса 1 пог. м	$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88

Номер профиля	Размеры				Масса 1 пог. м	$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$	
	$h$	$b$	$d$	$t$									Площадь сечения
					см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	
40	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	

Таблица П2

**ШВЕДЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ГОСТ 8240-97)**



**Выдержка из ГОСТа**

Номер швеллера У	Размеры			Площадь сечения	Масса 1 пог. м	Справочные величины для осей								
	h	b	d			t	x-x			y-y				
							$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$	$X_0$
	мм			см <sup>2</sup>	кг	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см	
5У	50	32	4,4	7,0	6,16	4,8	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5У	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10У	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12У	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54

Окончание табл. П2

Номер швеллера $\nabla$	Размеры			Площадь сечения $S_x$	Масса 1 пог. м	Справочные величины для осей							
	$h$	$b$	$d$			$t$	$x-x$			$y-y$			
							$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$
	мм				кг	$cm^4$	$cm^3$	см	$cm^3$	$cm^4$	$cm^3$	см	см
14У	140	58	4,9	8,1	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

**Нормальные линейные размеры (мм)  
Основные ряды по ГОСТ 6636-69 (выдержка из ГОСТ)**

Интервал размеров, мм	Ряды размеров																			
	Ra5			Ra10			Ra20			Ra40										
От 1,0 до 500	1,0	1,6	2,5	4,0	6,3	8,0	10	12	10	11	12	14	10	10,5	1,1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,5
	1,6	2,0	2,5	4,0	6,3	8,0	10	12	16	18	20	22	16	17	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,4
	2,5	3,2	4,0	5,0	6,3	8,0	10	12	16	18	20	22	16	17	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
	4,0	5,0	6,3	8,0	10	12	16	20	25	28	32	36	25	26	4,5	4,8	5,0	5,3	5,6	6,0
	6,3	8,0	10	12	16	20	25	32	40	45	50	56	40	42	7,1	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5
	10	12	16	20	25	32	40	50	63	71	80	90	63	67	11	11,5	12	13	14	15
	16	20	25	32	40	50	63	80	100	110	125	140	100	105	18	19	20	21	22	24
	25	32	40	50	63	80	100	125	160	180	200	220	160	170	28	30	32	34	36	38
	40	50	63	80	100	125	160	200	250	280	320	360	250	260	45	48	50	53	56	60
	63	80	100	125	160	200	250	320	400	450	500	500	400	420	71	75	80	85	90	95
100	125	160	200	250	320	400	500	630	710	800	900	630	670	110	120	125	130	140	150	
160	200	250	320	400	500	630	800	1000	1100	1250	1400	1000	1050	180	190	200	210	220	240	
250	320	400	500	630	800	1000	1250	1600	1800	2000	2200	1600	1700	280	300	320	340	360	380	
400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	2800	3200	3600	2500	2600	450	480	500	530	560	600	

При выборе размеров рядам с более крупной градацией и входящим в них размерам должно отдаваться предпочтение: ряд Ra5 следует предпочитать ряду Ra10, ряд Ra10 – ряду Ra20, ряд Ra20 – ряду Ra40.

Кроме основных рядов размеров, указанных в табл. ПЗ, допускается применять производные ряды (табл. П4).

Дополнительные линейные размеры (мм) по ГОСТ 6636-69

1,25	4,9	16,5	62	205	730	2430	8250
1,35	5,2	17,5	65	215	775	2580	8750
1,45	5,5	18,5	70	230	825	2720	9250
1,55	5,8	19,5	73	270	875	2900	9750
1,65	6,2	20,5	78	290	925	3070	10300
1,75	6,5	21,5	82	310	975	3250	10900
1,85	7,0	23	88	315	1030	3450	11500
1,95	7,3	27	92	330	1090	3650	12200
2,05	7,8	29	98	350	1150	3870	12800
2,15	8,2	31	102	370	1220	4120	13600
2,3	8,8	33	108	390	1280	4370	14500
2,7	9,2	35	112	410	1360	4620	15500
2,9	9,8	37	115	440	1450	4870	16500
3,1	10,2	39	118	460	1550	5150	17500
3,3	10,8	41	135	490	1650	5450	18500
3,5	11,2	44	145	515	1750	5800	19500
3,7	11,8	46	155	545	1850	6150	
3,9	12,5	49	165	580	1950	6500	
4,1	13,5	52	175	615	2060	6900	
4,4	14,5	55	185	650	2180	7300	
4,6	15,5	58	195	690	2300	7750	

Таблица П5

**Единицы измерения механических величин  
в Международной системе (СИ)**

Наименование величин	Наименование единиц	Обозначения	Соотношения единиц
Сила, груз	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс};$ $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$
Погонная интенсивность нагрузки		Н/м	$1 \text{ Н/м} \approx 0,1 \text{ кгс/м}$
Напряжение	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2$ $1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2$
Модуль упругости	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2;$
Момент силы		Н·м	$1 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 0,1 \text{ кгс} \cdot \text{м}$
Работа, энергия	Джоуль	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 0,1 \text{ кгс} \cdot \text{м}$
Мощность	Ватт	Вт	$1 \text{ Вт} \approx 0,1 \text{ кгс/м} \cdot \text{с}$
Длина	Метр	м	$1 \text{ м} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$
Масса	Килограмм	кг	
Плотность (удельная масса)		кг/м <sup>3</sup>	
Удельный вес		Н/м <sup>3</sup>	

Таблица П6

**Кратные и дольные единицы**

Кратные единицы						
Наименования	Тера	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека
Обозначения	Т	Г	М	к	г	да
Множители	$10^{12}$	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^2$	10
Дольные единицы						
Наименования	Деци	Санتي	Милли	Микро	Нано	Пико
Обозначения	д	с	м	мк	н	п
Множители	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$

**Атапин Владимир Григорьевич**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СБОРНИК ЗАДАНИЙ  
С ПРИМЕРАМИ ИХ РЕШЕНИЯ**

**Учебное пособие**

Редактор *Л.Н. Ветчакова*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 12.04.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная  
Тираж 200 экз. Уч.-изд. л. 8,6. Печ. л. 9,25. Изд. 43. Заказ № 584  
Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20