Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
(математика – 1)

Методические указания и контрольная работа № 3
для студентов 1-го курса заочной формы обучения

Санкт-Петербург
2012

Составители: Н.А.Вешев, Головачев Г.М., Ю.А.Гусман.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г.Фарафонов

Методические указания и контрольная работа № 3 предназначены для студентов 1-го курса экономического факультета ГУАПа заочной формы обучения.

Подготовлены к публикации кафедрой высшей математики и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Редактор

Верстальщик

Сдано в набор Подписано к печати

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. Л.

Уч.- изд. Л. Тираж экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр ГУАП

190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., д. 67

Общие методические указания

Общий курс математики является фундаментом математического образования. Его изучение необходимо для успешного усвоения в дальнейшем общенаучных и специальных дисциплин.

Основной формой обучения студента заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В помощь студентам-заочникам в университете организовано чтение лекций и практические занятия. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача экзаменов.

Курс высшей математики (математика – 1) изучается студентами 1-го курса экономического факультета в первом и втором семестре. В первом семестре студенты сдают два экзамена: первый – по линейной алгебре и аналитической геометрии; второй – по дифференциальному и интегральному исчислению одной переменной. Во втором семестре студенты изучают теорию рядов и функций нескольких переменных.

Для изучения теоретического материала и решения задач по этим темам рекомендуется следующая литература:

1. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-Пресс, 2000.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учебник для втузов в 2-х т. М.: Интеграл-Пресс, 2009, 544 с.
3. Высшая математика для экономистов. Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера. М.: «Юнити», 2003.
4. Математика для экономистов. М.С.Красс, Б.П.Чупрунов. – СПб.: «Питер», 2007.

В процессе изучения курса высшей математики студенты должны выполнить на первом курсе 3 контрольные работы. В первом семестре студенты выполняют две контрольные работы по математике. Данное пособие посвящено теории рядов и функций нескольких переменных; выполнение 3-й контрольной работы покажет степень усвоения этой темы.

Указания по выполнению контрольных работ

Студент должен выполнять контрольные работы по заданным задачам конкретного варианта, присвоенному ему в деканате.

При оформлении и выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. В начале работы должны быть ясно написаны фамилия студента, инициалы, номер студенческого билета, шифр, номер контрольной работы и дата отсылки работы в университет.
2. Контрольная работа выполняется в тетради, а не на листах, обязательно чернилами или шариковой ручкой (но не красными) с полями для замечаний рецензента.
3. Решения задач контрольной работы располагаются в порядке номеров, указанных в контрольных работах; перед решением задачи должно быть записано полностью ее условие, исходя из данных своего варианта задания. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными из своего варианта.
4. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращений слов; чертежи можно выполнять от руки.

Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново целиком, либо должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом. Зачтенные контрольные работы предъявляют преподавателю на экзамене.

Краткие теоретические сведения

1. Ряды

1.1 Числовые ряды

1.1.1 Сходимость и расходимость числовых рядов

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Выражение вида

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1.1)$$

называется числовым рядом, а сами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - членами ряда. Удобно также вместо (1.1), пользуясь знаком суммы, писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.2)$$

Введем обозначения

$S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2, \ldots, S_n= a_1+a_2+\ldots+a_n$, где S_n – n-я частичная сумма ряда (1.1).

Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (1.1) сходится, и его сумма равна S.

Если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что ряд (1.1) расходится и суммы не имеет.

Пример 1.1

Решение: Рассмотрим ряд из членов геометрической прогрессии:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots \qquad (1.3)$$

Его частичная сумма при $q \neq 1$ вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$.

Поэтому при $|q| < 1$ ряд (1.3) сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$. В противном случае (при $|q| \geq 1$) имеем расходящейся ряд.

Изложим три простые, но важные теоремы о сходящихся рядах.

Если ряд

$a_1+a_2+…+a_n+…$ (1.4)

сходится и его сумма равна S, то ряд

$ca_1+ca_2+…+ca_n+…$ (1.5)

где c - какое-либо фиксированное число, также сходится и его сумма равна $\underline{S}$=cS.

Если ряды

$a_1+a_2+…+a_n+…$ и $b_1+b_2+…+b_n+…$

сходятся и их суммы, соответственно равны S и $\underline{S}$, то ряды

$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+…+(a_n+b_n)+…$

И

$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+…+(a_n-b_n)+…$

также сходятся и их суммы, соответственно, равны S+$\underline{S}$ и S-$\underline{S}$.

Если ряд

$a_1+a_2+…+a_n+…$ (1.6)

сходится, то ряд, полученный из данного отбрасыванием или добавлением конечного числа членов, также сходится.

1.1.2 Необходимый признак сходимости рядов

При исследовании рядов одним из основных вопросов является вопрос о том, сходится ли данный ряд или расходится. Рассмотрим необходимый признак сходимости, то есть установим условие, при невыполнении которого ряд расходится.

Если ряд

$a_1+a_2+…+a_n+…$ (1.7)

сходится, то его n-й член стремится к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если n-й член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Отметим, что данный признак является только необходимым, но не достаточным, так как из того, что n-й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится – он может и расходится.

1.1.3 Сходимость положительных рядов

Рассмотрим вопрос об установлении сходимости или расходимости рядов. Проще всего этот вопрос решается для рядов, члены которых неотрицательны; для краткости такие ряды будем называть положительными. Сходимость или расходимость многих положительных рядов чаще всего устанавливается путем сравнения с другими рядами, заведомо сходящимися или расходящимися. В основе такого сравнения лежат теоремы сравнения рядов.

Пусть даны два положительных ряда:

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1.8)

и

$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ (1.9).

Если $a_n \le b_n$ для любого n, то из сходимости ряда (1.9) следует сходимость ряда (1.8), а из расходимости ряда (1.8) следует расходимость ряда (1.9).

Пример 1.2 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)5^n}=1+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)5^n}+\cdots \qquad (1.10)$$

Решение: Сравним данный ряд с «большим» рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}+\cdots.$$

Так как данный ряд сходится (см. пример 1.1) и его сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$, то сходится и ряд (1.10) и его сумма не превосходит 5/4.

Другими признаками более простыми и, естественно, чаще применяемыми являются признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1.11)

существует конечный предел l отношения (n+1)-го члена к n-му,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, то при l<1 ряд сходится, при l>1 ряд расходится.

Отметим, что в случае l=1 ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Пример 1.3 Исследовать сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ по признаку Даламбера.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Ряд сходится.

Аналогично используется и признак Коши.

Признак Коши.

Если для ряда с положительными членами

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1.12)

величина $\sqrt[n]{a^n}$ имеет конечный предел

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=l$, то при l<1 ряд сходится, при l>1 ряд расходится.

Отметим, что в случае l=1 ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Несмотря на то, что признаки Даламбера и Коши наиболее просты и удобны при выяснении сходимости или расходимости рядов с положительными членами, они часто не дают ответа. Более сложным, но всегда дающим ответ является интегральный признак.

Интегральный признак.

Пусть дан положительный ряд

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,$

члены которого монотонно убывают. Предположим, что существует функция f(x), удовлетворяющая следующим условиям:

f(x) определена и непрерывна при $x \geq 1$;

$f(x)>0$ и монотонно убывает при $x \geq 1$;

$f(n)=a_n$, n=1, 2, 3….

Тогда несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A} f(x)dx,$$

и данный ряд сходится или расходится одновременно.

Например, применяя данный признак к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \qquad (1.13)$$

получим, что (1.13) сходится при $p>1$ и расходится при $p \leq 1$.

Заметим, что при p=1 расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \qquad (1.14)$$

называется гармоническим.

1.1.4 Знакопеременные ряды

Ранее рассматривались ряды, члены которых были неотрицательны. Рассмотрение рядов, члены которых имеют различные знаки, начнем со знакочередующихся, то есть рядов, которые имеют вид:

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots, \qquad (1.15)$$

где u_1, u_2, u_3,…,u_n… положительны. При исследовании знакочередующихся рядов полезным является:

Признак Лейбница.

Если в знакочередующимся ряде

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots, \text{ где } u_n>0, \qquad (1.16)$$

члены таковы, что $u_1>u_2>u_3>\ldots$

и $\lim_{n\to\infty} u_{n=0,}$ то ряд (1.16) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Пример 1.4

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

По теореме Лейбница этот ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит 1.

При выяснении сходимости произвольного знакопеременного ряда теорема Лейбница не работает. Однако в этом случае можно воспользоваться следующим утверждением, верным для любого знакопеременного ряда, в том числе и для знакочередующегося.

Если знакопеременный ряд

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ (1.17)

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots$ (1.18)

сходится, то и данный знакопеременный ряд (1.17) сходится.

Признак сходимости, изложенный выше, является достаточным, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды которые сами сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин расходятся. В.связи с этим удобно ввести понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов и на их основе классифицировать знакопеременные ряды.

Знакопеременный ряд

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ (1.19)

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots$ (1.20)

Если же знакопеременный ряд (1.19) сходится, а ряд (1.20), составленный из абсолютных величин расходится, то ряд (1.19) называется условно сходящимся.

Пример 1.5

Так ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

сходится условно (по теореме Лейбница), так как гармонический ряд расходится.

1.2 Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots,$ (1.21)

где c_0, c_1, $c_2,\ldots,c_n,\ldots$- постоянные числа.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал.

Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал от -R до R, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд (1.21) сходится, и притом абсолютно, а для x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называют радиусом сходимости степенного ряда.

На концах интервала (при $x=\mp R$) вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается индивидуально.

Укажем несколько способов определения радиуса сходимости степенного ряда.

Пользуясь признаком Даламбера, можно получить:

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$ (1.22)

По признаку Коши:

$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$ (1.23)

Пример 1.6

Найти область сходимости ряда

$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + \cdots$

Решение. Применим признак Даламбера

R=$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}}{(-1)^{n+2}\frac{2^{n+2}}{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$

При x=1/2 имеем числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$

который сходится по теореме Лейбница. При x=-1/2 получаем гармонический ряд, умноженный на (-1), который расходится. Таким образом, заданный степенной ряд сходится при -$\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$.

1.2.1 Ряды Тейлора и Маклорена

Известно, что в интервале сходимости степенной ряд является функцией, имеющей производные любого порядка. Возможна и обратная задача: представить заданную функцию, имеющую производные любого порядка как сумму некоторого ряда.

Чтобы это сделать, сначала для функции f(x),имеющей производные любого порядка в окрестности точки x=a, напишем формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \rho_n(x), \qquad (1.24)$$

где $\rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$

Если допустить, что остаточный член $\rho_n(x)$ формулы Тейлора в интервале сходимости a-R<x<a+R стремится к нулю, то переходя в (1.24) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots. \qquad (1.25)$$

Правая часть равенства называется рядом Тейлора для функции f(x) относительно точки a. При a=0 ряд (1.25)

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (1.26)$$

Называется рядом Маклорена для f(x), а его коэффициенты – коэффициентами Маклорена функции f(x).

Итак, чтобы функцию f(x), имеющую в окрестности x=a любое число производных, записать в виде ряда Тейлора (1.25) или Маклорена (1.26), надо найти коэффициенты Тейлора (Маклорена), определить область сходимости получившегося ряда и убедиться, что в области сходимости ряда его остаточный член стремится к нулю.

1.2.2 Разложение элементарных функций в степенные ряды

Запишем разложение элементарных функций в ряд Маклорена

1. $$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots,\quad -\infty<x<\infty. \qquad (1.27)$$

2. $$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty. \qquad (1.28)$$

3. $$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty. \qquad (1.29)$$

4. $$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\ldots,\quad -1<x<1. \qquad (1.30)$$

5. $$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots,\quad -1<x<1. \qquad (1.31)$$

Приведем пример использования стандартных разложений:

Пример 1.7

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение:

Известно разложение в ряд Маклорена функции e^x (1.27):

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots,\quad -\infty<x<\infty.$$

Заменяя x на ($-x^2$), получим:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

2. Функции двух переменных

Если каждой паре значений (x,y) двух независимых переменных x и y поставлено в соответствие определенное значение некоторой величины z, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y. Обозначается z=z(x,y) или z=f(x,y).

2.1 Частные производные

2.1.1 Частные производные первого порядка

Частной производной функции z=f(x,y) по переменной x называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Частная производная по x от функции z=f(x,y) обозначается одним из следующих символов:

$$z'_x; \quad f'_x(x,y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Аналогичным образом вычисляется частная производная функции z=f(x,y) по переменной y:

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}. \tag{2.2}$$

Пример 2.1

Найти частные производные функции $z=x^y$.

Решение:

При вычислении частной производной по x вторая переменная y считается фиксированной, то есть надо пользоваться правилом дифференцирования степенной функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$.

Когда же вычисляем производную по y, то уже переменная x будет считаться постоянной величиной, и мы должны пользоваться правилом дифференцирования показательной функции: $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

2.1.2 Частные производные второго порядка

Пусть функция z=f(x,y) дифференцируема в некоторой области D. Значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, вообще говоря, зависят от точки (x,y), в которой они вычислены, то есть частные производные также представляют собой функции от переменных x и y. Дифференцируя эти функции, получаем вторые частные производные от функции f(x,y).

Частная производная по переменной x от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, называется частной производной второго порядка от функции f(x,y) и обозначается символом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Аналогичным образом находится частная производная второго порядка от функции f(x,y) по переменной y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Смешанной производной от функции f(x,y) называется частная производная по переменной x от частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ или частная производная по переменной y от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Отметим, что если имеет непрерывные частные производные второго порядка, то разные смешанные производные равны.

Пример 2.2

Найти вторые частные производные функции $z=\sin(xy^2)$.

Решение:

Сначала вычисляем первые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\cos\ xy^2\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy\cos\ xy^2\ ,$$

а затем, дифференцируя их, находим вторые

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^4\sin\ xy^2\ ,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x\cos\ xy^2\ -4x^2y^2\sin\ xy^2\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2y\cos\ xy^2\ -2xy^3\sin\ xy^2\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2y\cos\ xy^2\ -2xy^3\sin\ xy^2\ .$$

2.2 Скалярное поле

Пусть в пространстве (x,y,z) имеется область , в которой задана скалярная функция $u=u(x,y,z)$.В этом случае говорят, что в области D задано скалярное поле.

Рассмотрим точки области D, в которых функция $u(x,y,z)$ имеет постоянное значение c: $u(x,y,z)=c$. Совокупность этих точек образует некоторую поверхность. Если возьмем другое значение c, то получим другую поверхность. Эти поверхности называются поверхностями уровня.

2.2.1 Производная по направлению

Рассмотрим в области D функцию $u=u(x,y,z)$ и точку M(x,y,z).

Проведем из точки M вектор **s**, направляющие косинусы которого ($\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$).

Тогда производной по данному направлению называется

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) следует, что, зная частные производные, легко найти производные по любому направлению. Сами частные производные являются частным случаем производной по направлению.

Так например, при **s=OX**:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

2.2.2 Градиент

В каждой точке области D, в которой задана функция u=u(x,y,z), определим вектор, проекциями которого на осях координат являются значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \qquad (2.4)$$

Этот вектор называется градиентом функции u(x,y,z).

Из определения понятно, что производная по направлению некоторого вектора равняется проекции градиента на этот вектор.

Сформулируем простейшие свойства градиента:

Производная в данной точке по направлению вектора **S** имеет наибольшее значение, если направление вектора **S** совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно модулю градиента.

Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору gradu, равна нулю.

Gradu направлен перпендикулярно к линии уровня u(x,y)=c, лежащей в плоскости Oxy и проходящей через соответствующую точку.

Пример 2.3

Определить градиент функции $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ в точке M(2,4).

Решение:

Здесь $\frac{\partial u}{\partial x}=(x)_M=2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{2}{3}y\right)_M=\frac{8}{3}.$

Следовательно, gradu=2**i**+8/3**j**.

Уравнение линии уровня, проходящей через данную точку, будет

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3}.$

2.3 Производная функции, заданной неявно

Пусть функция y от x задана неявно, то есть уравнением F(x,y)=0.

Тогда верна следующая формула:

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (2.5)$$

Пример 2.4

Найти производную y'_x, если $x^2+y^2=a^2$.

Решение:

В искомом примере функция задана неявно, с помощью уравнения $F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$.

Сначала найдем частные производные

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,$

а затем: $y'_x=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$

Пусть функция z от переменных x, y задана неявно, то есть уравнением F(x,y,z)=0.

Тогда частные производные могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (2.6)$$

2.4 Максимум и минимум функции двух переменных

Аналогично случаю для функции одной переменной экстремумами функции называются максимумы и минимумы функции в данной точке.

2.4.1 Необходимые условия экстремума

Если функция z=f(x,y) достигает экстремума при $x=x_0, y=y_0$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

Это утверждение не является достаточным для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума. В противном случае требуется дополнительное исследование.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (или не существует), называются критическими точками функции z=f(x,y).

Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то это может случиться только в критической точке.

Для исследования функции в критических точках сформулируем условия экстремума функции двух переменных.

2.4.2 Достаточные условия экстремума

Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка; пусть, кроме того, точка $M_0(x_0,y_0)$ является критической точкой функции f(x,y), то есть

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Обозначим $A = \frac{\partial^2 f\ x_0, y_0}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f\ x_0, y_0}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f\ x_0, y_0}{\partial y^2}.$

Тогда при $x=x_0$, $y=y_0$:

1) f(x,y) имеет максимум, если $AC-B^2>0$ и $A<0$;
2) f(x,y) имеет минимум, если $AC-B^2>0$ и $A>0$;
3) f(x,y) не имеет ни максимума, ни минимума, если $AC-B^2<0$;

если $AC-B^2=0$, то экстремум может быть и может не быть (требуется дополнительное исследование).

Пример 2.5

Исследовать на максимум и минимум функцию

$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

Решение:

Находим критические точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Критическая точка имеет координаты (-4/3;1/3).

Находим производные второго порядка в критической точке и определяем характер критической точки:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - \ -1\ ^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке (-4/3;1/3) данная функция имеет минимум, а именно $z_{min}=-4/3$.

2.4.3 Нахождение наибольших и наименьших значений

При нахождении наибольших и наименьших значений функции в заданной области следует пользоваться следующими установками. Найдем экстремальные точки внутри данной области и вычислим значения функции в них. Далее найдем наибольшее и наименьшее значение функции на границе области. Из конечного числа полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее значение функции в заданной области.

3 Решение типового варианта

Вариант № 0

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\;n+2}.$$

   Решение.

   Данный ряд расходится, так как получен из гармонического ряда отбрасыванием двух членов и умножением на постоянный множитель (см. теоремы 1.1.1).

   Ответ: расходится.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1^{\,n}\;2^{n+1}}{3^{n-1}}$.

   Решение.

   Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного знакопеременного ряда (см. 1.1.1)

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{3^{n}}=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}.$$

   Полученный ряд сходится (см. пример 1.1), поэтому искомый знакопеременный ряд сходится абсолютно.

   Ответ: абсолютно сходится.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1^{\,n}\;x^{n}}{3^{2n-1}}$.

   Решение.

   Найдем радиус сходимости данного ряда по признаку Даламбера (см. 1.22)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{c_n}{c_{n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3^{2n-1}}}{\frac{1}{3^{2n+1}}}\right|=9.'$$

При $x=\pm 9$ ряд расходится по невыполнению необходимого признака (см. 1.1.2), поэтому область сходимости степенного ряда -9<x<9.

Ответ: -9<x<9.

4. Разложить в ряд по степеням (x-1) функцию x^3-3x^2+4x-5.

Решение.

Воспользуемся формулой Тейлора (1.25); в данном случае достаточно взять первые 4 члена ряда.

Итак, $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$.

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Вычислим значения функции и ее производных в точке 1.

f(1)=1-3+4-5=-3;

$f'(x)=3x^2-6x+4$, $f'(1)=1$;

$f''(x)=6x-6$, $f''(1)=0$;

$f'''(x)=6$, $f'''(1)=6$.

Таким образом, $f(x)=-3+(x-1)+(x-1)^3.$

Ответ: $f(x)=-3+(x-1)+(x-1)^3.$

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sin x^3 y}{x+y}.$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x^3y^2}{x+y}\right)=\frac{(\cos x^3y^2)\cdot 3x^2y^2(x+y)-\sin x^3y^2}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin x^3y^2}{x+y}\right)=\frac{(\cos x^3y^2)\cdot 2x^3y(x+y)-\sin x^3y^2}{(x+y)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(\cos x^3y^2)\cdot 3x^2y^2(x+y)-\sin x^3y^2}{(x+y)^2},$
$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(\cos x^3y^2)\cdot 2x^3y(x+y)-\sin x^3y^2}{(x+y)^2}.$

6. Вычислить производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции

$$z=\frac{x^3y}{x+y}.$$

Решение.

Сначала вычислим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y}{x+y}\right)=\frac{3x^2y\,(x+y)-x^3y}{(x+y)^2}=\frac{x^2y\,(2x+3y)}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y}{x+y}\right)=\frac{x^3\,(x+y)-x^3y}{(x+y)^2}=\frac{x^4}{(x+y)^2}.$$

Производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y\,(2x+3y)}{(x+y)^2}\right)=x^2\,\frac{(2x+6y)(x+y)^2-y\,(2x+3y)\cdot 2\,(x+y)}{(x+y)^4}=$$

$$=x^2\,\frac{2x^2+8xy+6y^2-4xy-6y^2}{(x+y)^3}=\frac{2x^4+4x^3y}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4}{(x+y)^2}\right)=\frac{4x^3(x+y)^2-x^4\cdot 2\,(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{2x^4+4x^3y}{(x+y)^3}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2x^4+4x^3y}{(x+y)^3},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{2x^4+4x^3y}{(x+y)^3}.$

7. В точке (1;2) найти gradz и производную в направлении вектора (-1;-2), если $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}.$

Решение.

Найдем координаты вектора gradz (см. (2.4):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2},\quad \frac{\partial z(1;2)}{\partial x}=\frac{1}{2}-\frac{2}{1}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z(1;2)}{\partial y}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

И gradz=(-3/2)**i**+(1/4)**j**.

Направляющие косинусы вектора (-1;-2) (см. (2.4)):

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

И производная в направлении данного вектора:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta = \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: gradz=(-3/2)**i**+(1/4)**j**, $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной

функции $x^4+y^4-x^2+y+z+\sin z=5$.

Решение.

Пусть $F(x,y,z)=x^4+y^4-x^2+y+z+\sin z-5=0$.

Найдем частные производные F(x,y,z):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \cos z.$$

Теперь найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной

функции (см.(2.6)):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{4x^3 - 2x}{1+\cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{4y^3+1}{1+\cos z}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x^3 - 2x}{1+\cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y^3+1}{1+\cos z}.$

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+8y^2-x+y+3$.

Решение.

Найдем частные производные и критические точки исследуемой

функции (см. 2.4.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 16y + 1.$$

$$\begin{cases} 2x-1=0, \\ 16y+1=0, \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Проверим достаточные условия существования экстремума в найденной критической точке (см. 2.4.2):

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0, \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=16,$$
$$AC-B^2=2\cdot 16-0=32>0, \quad A>0.$$

Таким образом, в критической точке минимум:

$$z_{\min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\left(-\frac{1}{16}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+3=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+3=-\frac{9}{32}+3=\frac{87}{32}.$$

Ответ: $z_{\min}=\dfrac{87}{32}.$

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции z=xy в области, ограниченной кривыми y=x^2 и $y=\sqrt{x}.$

Решение.

Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} y=x^2, \\ y=\sqrt{x}, \end{cases} \to \begin{cases} y=x^2, \\ x^2=\sqrt{x}, \end{cases} \to \begin{cases} x_1=0, y_1=0, \\ x_2=1, y_2=1. \end{cases}$

Вычислим критические точки функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x,$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \end{cases} \to \begin{cases} y=0, \\ x=0. \end{cases}$$

Единственная критическая точка функции принадлежит границе области, значит (см. 2.4.3) наибольшее и наименьшее значение функции z=xy находится на границе области.

При y=x^2 z=x^3 и при x=0 функция принимает наименьшее значение, при x=1 функция принимает наибольшее значение.

Аналогично и при $y=\sqrt{x}.$

Ответ: $z_{\min}=0, \quad z_{\max}=1.$

4 Контрольная работа № 3

Вариант № 1

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^{2n+1}}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-1) функцию x^3-3x^2-8x-5.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sin x^3 y}{x^2+y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$.

7. В точке (1;2) найти gradz и производную в направлении вектора (1;2), если $z=\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$x^4+y^3-x^2+y=5$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+8y^2-2x+4y+3$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции z=4xy в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 2

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\sqrt{n}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n}$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+1)$ функцию x^3-3x^2+4x-5.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\cos xy^2}{x+y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\frac{xy^2}{x-y}$.

7. В точке (2;1) найти gradz и производную в направлении вектора (1;2), если $z=\frac{x^2}{y}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $2x^4-y^4-x+y^2=1$.

9. Найти точки экстремума функции $z=2x^2+3y^2-2x+5$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x+y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 3

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1+\sin n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\sqrt{n}}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-2) функцию $2x^3+5x^2+7x-3$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{e^{x-y}}{x+y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\sin(x-y^2)$.

7. В точке (-1;1) найти gradz и производную в направлении вектора (1;1), если $z=x^2y^3$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $\sin(xy)+y=1$.

9. Найти точки экстремума функции $z=2x^2-3y^2-2xy+x+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x-y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 4

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{\ln(1+n)}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-3) функцию $2x^3-5x^2+4x-3$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x-y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\arcsin(xy)$.

7. В точке (-1;0) найти gradz и производную в направлении вектора (0;1), если $z=\cos(\pi x+y)$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $\sin(xy^2)+e^y=0$.

9. Найти точки экстремума функции $z=2x^2+y^2-2xy-x+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x-y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 5

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}.$$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^n}{2^{\sqrt{n}}}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-4) функцию $3x^3+5x^2+4x-3$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sqrt{x+x^5y^2}}{x^2-y^2}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\arcsin(x-y)$.

7. В точке (1;3) найти gradz и производную в направлении вектора (1;-1), если $z=\cos(\pi xy)$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$e^{yx}+\cos y=0$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+3y^2-5xy-x-y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x-2y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 6

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3n-2}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n^3+1)(n^2-2)}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+3}}$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+1)$ функцию $2x^3-2x^2+3x-1$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sqrt{xy+x-y^2}}{x^3-y^3}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ функции $z=e^{xy}$.

7. В точке (-3;1) найти gradz производную в направлении вектора (0;1), если $z=\sin(\pi y-x)$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $\cos(y+\sqrt{x^2+y^2})=\sqrt{2}$.

9. Найти точки экстремума функции $z=2x^2+y^2-3xy+x-y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 7

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^2+3n-2)(n^2+3)}};$$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n^n}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^{2n+1}}$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+2)$ функцию $2x^3+4x^2+7x-1$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sqrt{\arcsin(x-y)}}{x}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=xe^{x-y}$.

7. В точке (-2;2) найти gradz и производную в направлении вектора (3;1), если $z=e^x y^3$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2-4x}=\sqrt{2}$.

9. Найти точки экстремума функции $z=-x^2-2y^2-xy+x-y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 8

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1000n+5}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi n}{4})}{n^5}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n!}$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+3)$ функцию $2x^3-4x^2+7x-5$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\arcsin x}{\cos^{-1} y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=e^x\sin y$.

7. В точке (0;1) найти gradz и производную в направлении вектора (-1;1), если $z=x\arcsin y$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$\frac{\arcsin x}{\cos y}+\sqrt{y}=3$.

9. Найти точки экстремума функции $z=-3x^2-2y^2-4xy+x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 9

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n\sqrt{n}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{n}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-5) функцию $3x^3-2x^2+7x-3$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\arcsin(x-y)}{\cos(y-x)}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=e^{x-y}\sin x$.

7. В точке (0;-1) найти gradz и производную в направлении вектора (1;-1), если $z=x+\arcsin y$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $\sqrt{y}\sqrt{x}+\sqrt{y-x}=4$.

9. Найти точки экстремума функции $z=-3x^2-y^2-2xy+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x+y^2$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 10

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2n^2-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^{2n}}{n^2}$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+5)$ функцию $3x^3+4x^2+7x-2$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{e^{x-y}}{yx^2-xy^2}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\sin(x^2y)$.

7. В точке (-2;1) найти gradz и производную в направлении вектора (1;4), если $z=x^4y^2$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $e^y\sqrt{y-x}=1$.

9. Найти точки экстремума функции $z=-x^2-y^2-xy+x+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x-y^2$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 11

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{2^{2n-1}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n n^2}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-1) функцию $3x^3-x^2-x-2$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sin(x^3+y^2)}{x-y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\cos(x^2-y)$.

7. В точке (-3;2) найти gradz и производную в направлении вектора (2;1), если $z=xy^2+x^2y$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{xy}=1$.

9. Найти точки экстремума функции $z=2x^2+3y^2-7xy+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x-y^2$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 12

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n!}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{3n}}{3^{n+1}n^3}$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+1)$ функцию $3x^3-x+2$.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\cos(x-y^2)}{x^2-y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\cos(x^2)\sqrt{y}$.

7. В точке (2;1) найти gradz и производную в направлении вектора (1;0), если $z=e^{x+y}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $y+\frac{\cos(x-y^2)}{x^2-y}=3$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+4y^2-6xy-x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x+y^2$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 13

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{200n+1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n!}}{(n+1)!}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 2^n}{n+1}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-2) функцию x^3-2x+2.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{e^{xy}}{xy}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\frac{\cos(x^2)}{x+y}$.

7. В точке (1;1) найти gradz и производную в направлении вектора (2;-1), если $z=e^{xy}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $y+\sin^{-1}(x-y)=8$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2-4y^2-2xy-y-x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+2y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 14

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n-1}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-3) функцию x^3-x+4.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{e^{xy}}{x\sin y}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\frac{\cos(x^2)}{\ln y}$.

7. В точке (1;2) найти gradz и производную в направлении вектора (2;3), если $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$yx+\sin(x^2y)=2$;

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+4y^2-2xy-4y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-2y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 15

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{(n+1)^2}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(\sqrt{2})^n(2n+1)}$.

4. Разложить в ряд по степеням (x-4) функцию x^3-3x^2+4.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\ln(xy-\sqrt{2})$.

7. В точке (1;2) найти gradz и производную в направлении вектора (1;5), если $z=\sqrt{xy}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$\sqrt{\frac{x-y}{2x+y}}+xy=3$.

9. Найти точки экстремума функции $z=2x^2+3y^2-3xy-y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=xy+x$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 16

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{\sqrt{n}}}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{\sqrt{n^5+5}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+2)$ функцию x^3+x^2+1.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\frac{\sqrt{xy^2}}{x-y+xy}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ функции $z=\ln(x^2 y - y)$.

7. В точке (-3;1) найти gradz и производную в направлении вектора (3;1), если $z=\sqrt{x+y}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $xy+\sqrt{x^2+2y^2}=3$.

9. Найти точки экстремума функции $z=3x^2+5y^2-7xy+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=xy-x$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 17

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{\sqrt{n^3+2}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+3)$ функцию x^3-x^2+21.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\sqrt{x^2+\frac{x-\sqrt{y}}{2}}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\mathrm{tg}(x-y)$.

7. В точке (1;1) найти gradz и производную в направлении вектора (1;3), если $z=\sqrt{xy}-\frac{1}{2}x$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$x\sqrt{x^2+2y^2}+\frac{y}{2}=0$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+2y^2-3xy+y-x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=xy-2y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 18

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-1}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^n x^n$.

4. Разложить в ряд по степеням ($x+4$) функцию x^3-x.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\sqrt{\frac{x-\sqrt{y}}{2x+\sqrt{y}}}$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)$.

7. В точке (2;2) найти gradz и производную в направлении вектора (0;1), если $z=x\sqrt[3]{y}$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\arcsin y}{x}=10$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+2y^2-3y-x+8$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2xy+y$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 19

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n\sqrt{n}+1}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

4. Разложить в ряд по степеням (*x*-7) функцию x^3+x.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\sin(xe^{x/y})\cos y$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=y\arcsin(x)$.

7. В точке (-1;2) найти gradz и производную в направлении вектора (1;4), если $z=x^2y+y^2x$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$\sqrt{y+x}+\frac{\arcsin y}{x}=2$.

9. Найти точки экстремума функции $z=3x^2+2y^2-3yx-x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2xy+x$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант № 20

Часть 1 – Ряды

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{3^{n-1}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n(2n-25)$.

4. Разложить в ряд по степеням $(x+6)$ функцию x^3+6.

Часть 2 – Функции двух переменных

5. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\sin(x+\sqrt{y})\cos y$.

6. Найти производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z=\arcsin(x-y)$.

7. В точке (0;1) найти gradz и производную в направлении вектора (2;1), если $z=xe^y$.

8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции

$\sqrt{y+x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=5$.

9. Найти точки экстремума функции $z=x^2+y^2-yx-x+y$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2xy-x$ в области, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Содержание