

№ 3639      МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»  
  
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ  
  
Кафедра электротехники и информационно-измерительных систем

О.Л. Дудченко

# **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»**

для студентов направлений 23.05.01 «Наземные  
транспортно-технические средства»  
и 13.03.02 «Энергетика и электротехника»

Рекомендовано редакционно-издательским  
советом университета



Москва 2020

УДК 621.3:622  
Д81

Рецензент  
д-р техн. наук, проф. *Вознесенский А.С.*

**Дудченко О.Л.**

Д81      Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Теоретические основы электротехники» : метод. указания / О.Л. Дудченко. – М. : Издательский Дом НИТУ «МИСиС», 2020. – 63 с.

Курсовая работа по ТОЭ выполняется в пятом семестре и имеет своей целью глубокое усвоение важных и то же время наиболее трудных для понимания разделов курса: «Цепи трехфазного тока», «Переходные процессы в линейных электрических цепях» и «Электрическое поле в проводящих средах».

Приведены методики расчета трехфазных цепей в различных режимах переходных процессов классическим и операторным методами и исследование простейшего электрического поля в проводящей среде. Приведены числовые примеры.

Для студентов направления 21.05.04 «Горное дело», специализация «Электрификация и автоматизация горного производства».

**УДК 621.3:622**

# СОДЕРЖАНИЕ

Задание на курсовую работу .....	4
Методические указания к решению задач.....	12
1. Рекомендуемый порядок расчета токов переходного процесса в разветвленных цепях .....	34
Числовые примеры .....	37
2. Рекомендации к практическому использованию операторного метода.....	52
3. Электрическое поле постоянного тока в однородных и неоднородных средах .....	55
Список использованных источников.....	62

# ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

I. К цепи присоединяется три однофазных приемника. Комплексные сопротивления равны, линейные напряжения на входе трехфазной цепи симметричны.

1. Вычислить фазные и линейные токи при схемах соединения *звезда* и *треугольник*.
2. Вычислить активные и реактивные мощности для схем *звезда* и *треугольник* на входе цепи.
3. Найти напряжения смещения нейтрали при соединении *звездой*:
  - а) короткое замыкание в фазе (№ варианта);
  - б) обрыв в фазе (№ варианта).

В общих случаях вычислить токи и напряжения для всех фаз и определить показания амперметров. Построить топографические диаграммы всех напряжений и отдельно диаграммы всех токов.

4. При соединении *треугольником* найти линейные и фазные токи и напряжения при обрыве:
  - а) линейного провода (№ варианта);
  - б) при обрыве в фазе (№ варианта).

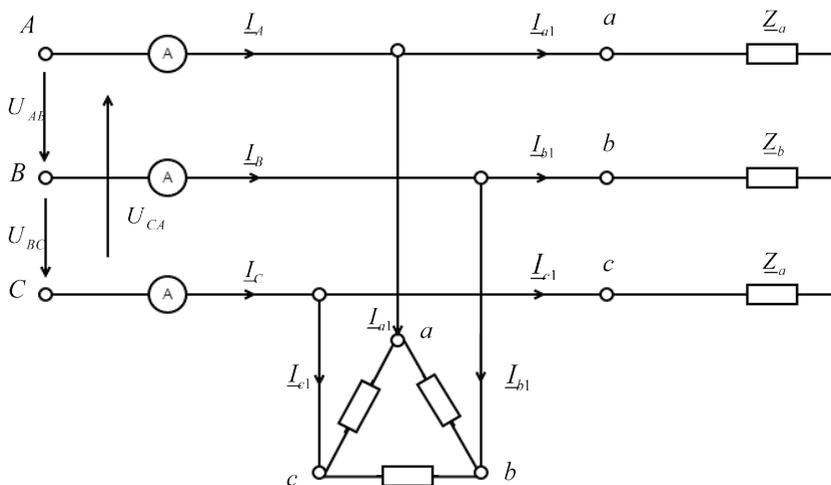


Рисунок 1

Вариант	$U_{\text{л}}$	$Z$	Звезда К.З.	Звезда Обрыв	Треугольник обрыв линей- ного провода	Треугольник обрыв в фазе
1	380	10–10j	A	B	C	A
2	440	5–7j	B	C	A	B
3	550	2–j	C	A	B	C
4	660	3–4j	A	B	C	A
5	770	7–6j	B	C	A	B
6	880	5–11j	C	A	B	C
7	990	9–2j	A	B	C	A
8	1100	12–21j	B	C	A	B
9	400	15–4j	C	A	B	C
10	500	5–14j	A	B	C	A
11	600	6–j	B	C	A	B
12	700	4–8j	C	A	B	C
13	800	5–5j	A	B	C	A
14	900	9–15j	B	C	A	B
15	1000	15–11j	C	A	B	C
16	420	14–3j	A	B	C	A
17	520	13–8j	B	C	A	B
18	620	12–4j	C	A	B	C
19	720	18–9j	A	B	C	A
20	820	10–3j	B	C	A	B
21	920	9–7j	C	A	B	C
22	1020	9–16j	A	B	C	A
23	480	8–19j	B	C	A	B
24	580	10–8j	C	A	B	C
25	680	11–19j	A	B	C	A
26	780	20–10j	B	C	A	B
27	880	10–20j	C	A	B	C
28	990	6–21j	A	B	C	A
29	1050	23–4j	B	C	A	B
30	1080	21–21j	C	A	B	C

II. К трехфазной цепи присоединены нагрузки из трех сопротивлений,  $Z_{bc}$  и  $Z_{ca}$ , соединенных в треугольник, а также два однофазных приемника. Линейные напряжения на входе цепи симметричны (рисунок 2).

1. Вычислить линейные и фазные токи, построить топографическую диаграмму напряжений и отдельно векторную диаграмму токов.
2. Найти показания двух ваттметров.
3. Удостовериться в балансе активных мощностей.
4. Разложить все токи на симметричные составляющие.

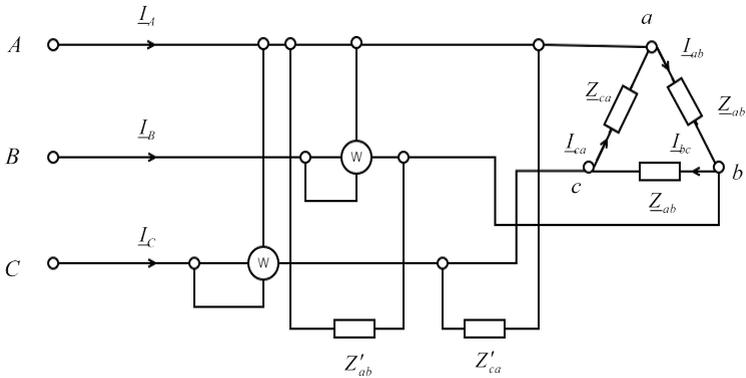


Рисунок 2

Вариант	$U_{\Delta}$	$Z_{ab}$	$Z_{bc}$	$Z_{ca}$	$Z'_{ab}$	$Z'_{bc}$
1	380	$10-5j$	45	$j3$	5	$j15$
2	440	$11-6j$	40	$j5$	10	$j17$
3	550	$12-7j$	35	$j7$	15	$j19$
4	660	$13-8j$	30	$j9$	20	$j21$
5	770	$14-9j$	25	$j11$	25	$j23$
6	880	$15-10j$	20	$j13$	30	$j25$
7	990	$16-11j$	15	$j15$	35	$j27$
8	1100	$17-12j$	10	$j17$	40	$j29$
9	400	$18-13j$	5	$j19$	8	$j31$
10	500	$19+14j$	5	$j21$	16	$-j3$
11	600	$20+15j$	10	$j23$	24	$-j25$
12	700	$21+16j$	15	$j25$	32	$-j27$
13	800	$22+17j$	20	$j27$	40	$-j29$
14	900	$23+18j$	25	$j29$	6	$-j31$
15	1000	$24+19j$	30	$j31$	12	$j3$
16	420	$25+20j$	35	$-j3$	18	$j5$
17	520	$20+25j$	40	$-j5$	24	$j7$

Вариант	$U_{\text{л}}$	$Z_{ab}$	$Z_{bc}$	$Z_{ca}$	$Z'_{ab}$	$Z'_{bc}$
18	620	$19+24j$	42	$-j7$	30	$j9$
19	720	$18+23j$	38	$-j9$	36	$j11$
20	820	$17-22j$	36	$-j11$	9	$j13$
21	920	$16-21j$	32	$-j13$	14	$-j5$
22	1020	$15-20j$	28	$-j15$	21	$-j7$
23	480	$14-19j$	24	$-j17$	28	$-j9$
24	580	$13-18j$	18	$-j19$	35	$-j11$
25	680	$12-17j$	18	$-j21$	33	$-j13$
26	780	$11-16j$	24	$-j23$	27	$-j15$
27	880	$10-15j$	28	$-j25$	23	$-j17$
28	990	$9-14j$	32	$-j27$	17	$-j19$
29	1050	$8-13j$	36	$-j29$	13	$-j21$
30	1080	$7-12j$	42	$-j31$	11	$-j23$

III. В четырехпроводной трехфазной цепи с неравномерной нагрузкой в заданный момент времени в одной из фаз происходит коммутация. До коммутации в цепи был установившийся режим.

1. Определить токи во всех ветвях нагрузки классическим методом, а также ток в нулевом проводе.
2. Определить свободные составляющие токов во всех ветвях операторным методом.

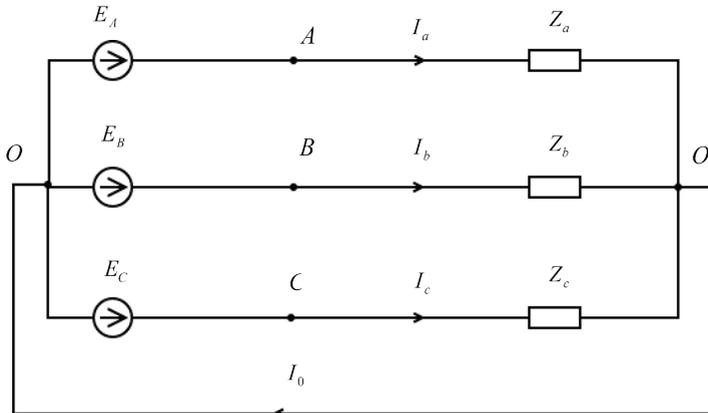


Рисунок 3

Вариант	$Z_a$	$Z_b$	$Z_c$
1	100	10-20j	Коммутация 7
2	Коммутация 1	120	13-15j
3	11-12j	Коммутация 4	140
4	160	20-9j	Коммутация 8
5	Коммутация 2	180	5-10j
6	17-8j	Коммутация 5	200
7	220	5-20j	Коммутация 9
8	Коммутация 3	240	25-2j
9	13-2j	Коммутация 6	260
10	280	14-5j	Коммутация 10
11	Коммутация 1	300	13-17j
12	15-10j	Коммутация 4	320
13	340	12-7j	Коммутация 7
14	Коммутация 2	360	17-4j
15	30-21j	Коммутация 5	380
16	400	24-15j	Коммутация 8
17	Коммутация 3	420	14-27j
18	30-5j	Коммутация 6	440
19	460	31-21j	Коммутация 9
20	Коммутация 1	480	35-23j
21	7-11j	Коммутация 4	500
22	150	13-23j	Коммутация 10
23	Коммутация 2	250	32-31j
24	25-20j	Коммутация 5	350
25	450	20-23j	Коммутация 7
26	Коммутация 3	270	21-16j
27	32-19j	Коммутация 6	370
28	470	34-27j	Коммутация 8
29	Коммутация 1	330	12-15j
30	13-5j	Коммутация 4	550

#### IV. При заземленном нулевом проводе:

- 1) определить сопротивление заземлителя  $R$  (сопротивление растеканию тока), выполненного из трубы  $l = 2$  м, диаметром  $d = 0,1$  м, проводимостью  $Y = 0,001$  сим;
- 2) определить изменение потенциала от заземлителя и построить эту зависимость вдоль заданного профиля.

$Z_A L = 30 \text{ мГн}; C = 250 \text{ мкФ}; R = 6 \text{ Ом}; E_A = 210 \text{ В.}$

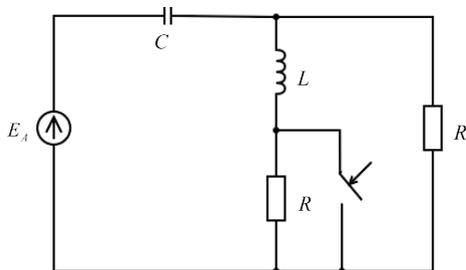


Рисунок 4

$Z_A L = 40 \text{ мГн}; C = 300 \text{ мкФ}; R = 6 \text{ Ом}; E_A = 220 \text{ В.}$

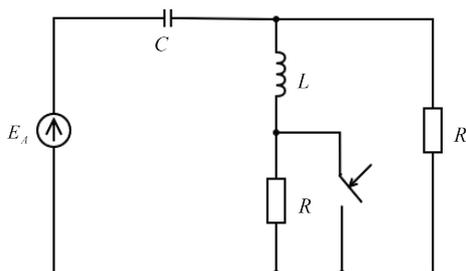


Рисунок 5

$Z_A L = 44 \text{ мГн}; C = 80 \text{ мкФ}; R = 8 \text{ Ом}; E_A = 230 \text{ В.}$

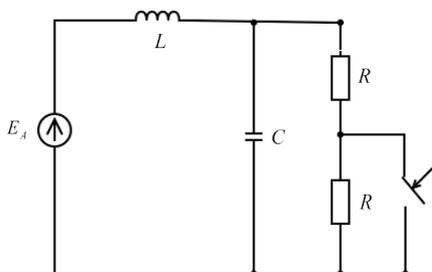


Рисунок 6

$$Z_B L = 44 \text{ мГн}; C = 80 \text{ мкФ}; R = 8 \text{ Ом}; E_B = 230 \text{ В.}$$

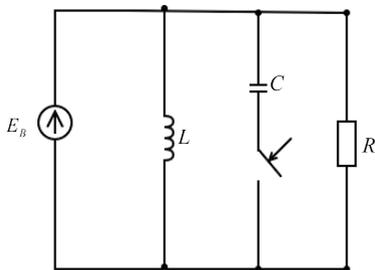


Рисунок 7

$$Z_B L = 50 \text{ мГн}; C = 60 \text{ мкФ}; R = 10 \text{ Ом}; E_B = 240 \text{ В.}$$

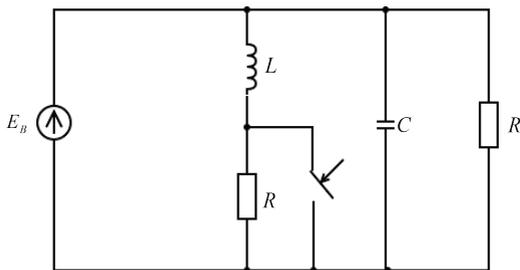


Рисунок 8

$$Z_B L = 60 \text{ мГн}; C = 100 \text{ мкФ}; R = 12 \text{ Ом}; E_B = 260 \text{ В.}$$

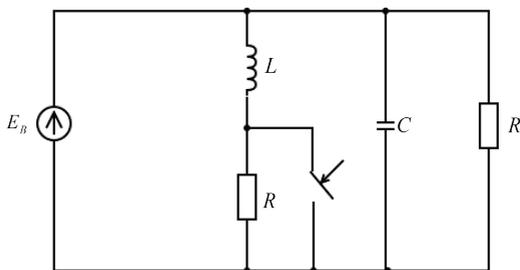


Рисунок 9

$Z_C L = 60 \text{ мГн}; C = 100 \text{ мкФ}; R = 12 \text{ Ом}; E_C = 260 \text{ В.}$

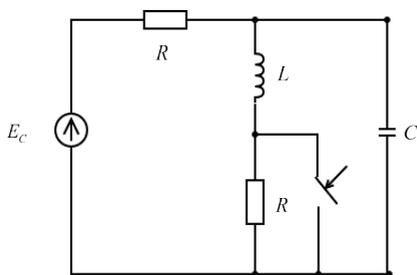


Рисунок 10

$Z_C L = 50 \text{ мГн}; C = 150 \text{ мкФ}; R = 12 \text{ Ом}; E_C = 260 \text{ В.}$

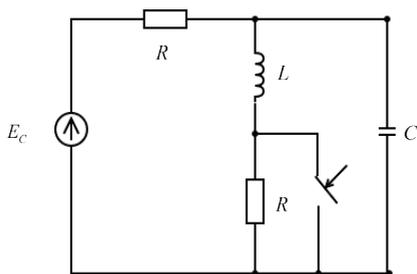


Рисунок 11

$Z_C L = 55 \text{ мГн}; C = 140 \text{ мкФ}; R = 20 \text{ Ом}; E_C = 230 \text{ В.}$

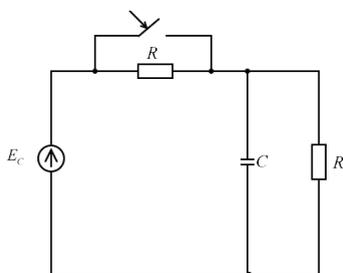


Рисунок 12

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Для вариантов, в которых нагрузка соединена треугольником, при расчете целесообразно преобразовать ее в соединение звездой.

2. При расчете символическим методом рекомендуется оперировать с комплексами действующих значений (не с комплексными амплитудами).

3. При расчете цепи в условиях обрыва линейного (или нейтрального) провода необходимо сохранить положительные направления токов и напряжений, произвольно выбранные для расчета этой цепи в нормальном режиме.

4. При расчете цепей в условиях обрыва нулевого провода целесообразно воспользоваться формулой для расчета напряжений смещения нейтрали:

$$U_N = U_\Phi \cdot \frac{Y_A + a^2 Y_B + a Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C},$$

где  $U_\Phi$  – фазное напряжение питающей цепи источника.

5. Измерительные приборы – ваттметры и амперметры – являются идеальными, то есть их подключение не влияет на токораспределение данной цепи.

6. Симметрические составляющие фазных напряжений нагрузки, то есть напряжения нулевой  $U_0$ , прямой  $U_1$  и обратной последовательности  $U_2$  для фазы  $A$ , определяются по формулам:

$$U_{0A} = \frac{1}{3(U_A + U_B + U_C)};$$

$$U_{1A} = \frac{1}{3(U_A + aU_B + a^2U_C)};$$

$$U_{2A} = \frac{1}{3(U_A + a^2U_B + aU_C)}.$$

7. Проверку правильности решения целесообразно проводить одним из следующих методов.

- А. Сумма показаний ваттметров должна быть равна активной мощности, выделенной на резисторах нагрузки, то есть

$$W_1 + W_2 = 3I_{\Phi}^2 R_1.$$

- В. Фазовый угол  $\angle p$ , определяемый комплексом сопротивления нагрузки, должен быть равен этому углу, рассчитанному по показаниям ваттметров:

$$\tan \varphi = \frac{X}{R_1} = \sqrt{3} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

**Задача 1.** К симметричной трехфазной линии с линейным напряжением  $U_{\text{л}} = 380$  В подключены три одинаковых приемника, соединенных звездой с нейтральным проводом (рисунок 13). Активное и реактивное сопротивления каждого приемника соответственно равны:  $R_{\Phi} = 3$  Ом,  $X_{\Phi} = 3$  Ом. Определите токи в фазах и нейтральном проводе, постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

Так как нагрузка симметричная, то достаточен расчет режима одной фазы. Фазное напряжение

$$U_{\Phi} = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220 \text{ В.}$$

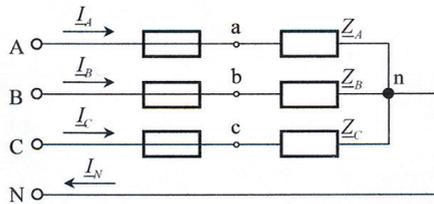


Рисунок 13

Или в комплексной форме, принимая  $\psi_U = 0$ , для фазы А получаем

$$\underline{U}_a = U_{\Phi} e^{j\psi_u} = 220 \text{ В.}$$

Комплексное сопротивление каждой фазы приемника

$$\underline{Z}_{\Phi} = Z_{\Phi} e^{j\varphi} = 3 + j4 = 5e^{j53^{\circ}8'} \text{ Ом.}$$

Ток

$$\underline{I}_a = \underline{U}_a / \underline{Z}_\Phi = 220e^{j0} / 5e^{j53^\circ 8'} = 44e^{-j53^\circ 8'} \text{ А.}$$

Ток в нейтральном проводе  $I_N = 0$ , так как нагрузка симметричная.

**Задача 2. К** трехфазной линии напряжением  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$  подключен несимметричный трехфазный приемник, соединенный звездой с нейтральным проводом (рисунок 14). Активные и реактивные сопротивления фаз приемника соответственно равны:  $R_a = 19 \text{ Ом}$ ,  $X_a = 0 \text{ Ом}$ ,  $R_b = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_b = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 24 \text{ Ом}$ ,  $X_c = -18 \text{ Ом}$ . Сопротивлением проводов можно пренебречь. Определите токи в фазах приемника, в линейных проводах и нейтральном проводе.

**Решение.**

Токи в линейных проводах и фазах приемника одинаковы и рассчитываются по закону Ома:

$$\underline{I}_a = \underline{U}_a / \underline{Z}_a \quad \underline{I}_b = \underline{U}_b / \underline{Z}_b \quad \underline{I}_c = \underline{U}_c / \underline{Z}_c.$$

Фазное напряжение

$$U_\Phi = U_{\text{Л}} / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220 \text{ В.}$$

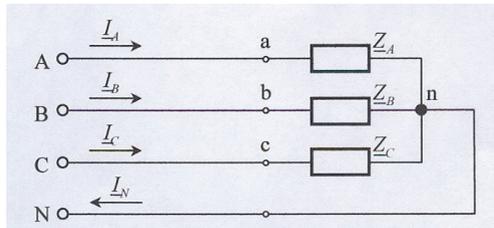


Рисунок 14

Комплексные фазные напряжения

$$\underline{U}_a = U_\Phi e^{j0} = 220 \cdot e^{j0} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_b = U_\Phi e^{-j120} = 220 \cdot e^{-j120} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_c = U_\Phi e^{+j120} = 220 \cdot e^{+j120} \text{ В.}$$

Комплексные сопротивления фаз

$$\underline{Z}_a = 19 + j0 = 19 \cdot e^{j0} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = 8 + j6 = 10 \cdot e^{j36^\circ 52'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = 24 + j18 = 30 \cdot e^{j36^\circ 52'} \text{ Ом}.$$

Токи в фазах приемника и проводах линии

$$\underline{I}_a = 220 \cdot e^{j0} / 19 \cdot e^{j0} = 11,58 \text{ А};$$

$$\underline{I}_b = 220 \cdot e^{-j120} / 10 \cdot e^{j36^\circ 52'} = 22 \cdot e^{-j56^\circ 52'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_c = 220 \cdot e^{+j120} / 30 \cdot e^{-j36^\circ 52'} = 7,33 \cdot e^{+j56^\circ 52'} \text{ А}.$$

Токи в нейтральном проводе

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_a = 11,58 + 22 \cdot e^{-j56^\circ 52'} + 7,33 \cdot e^{+j56^\circ 52'} = \\ &= 16,14 \cdot e^{j201^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Для построения топографической диаграммы напряжений выберем масштаб напряжений. При построении векторной диаграммы токов учтем, что токи в фазах сдвинуты относительно фазных напряжений на разные углы сдвига фаз:  $\varphi_a = 0$  – нагрузка чисто активная ( $X = 0$ ),  $\varphi_b = 36^\circ 52'$  – нагрузка активно-индуктивная,  $\varphi_c = -36^\circ 52'$  – нагрузка активно-емкостная.

Действующее значение тока в нейтральном проводе равно 16,14 А, а его начальная фаза  $\psi_N = 201^\circ$ . На диаграмме (рисунок 15) строим векторы токов с учетом углов сдвига фаз. Вектор тока в нейтральном проводе можно построить двумя способами: или как сумму векторов, или непосредственно отложить вектор  $I_N$  в соответствии с рассчитанными данными.

**Задача 3.** В схеме на рисунке 13 (см. задачу 1) сгорел предохранитель фазы  $a$ . Вычислите токи в двух других фазах и в нейтральном проводе. Постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

Ток в фазе  $a$  после ее обрыва равен нулю ( $I_N = 0$ ), токи в фазах  $b$  и  $c$  не изменяются, так как в схеме с нейтральным проводом режимы фаз не зависят друг от друга. Вектор тока в нейтральном

проводе может быть построен на векторной диаграмме как сумма векторов  $\underline{I}_N = \underline{I}_b + \underline{I}_c$  (рисунок 16). Из последнего видно, что значение тока в нейтральном проводе равно действующему значению тока фазы  $b$  или  $c$ , то есть  $I_N = I_\Phi = 44 \text{ А}$ .

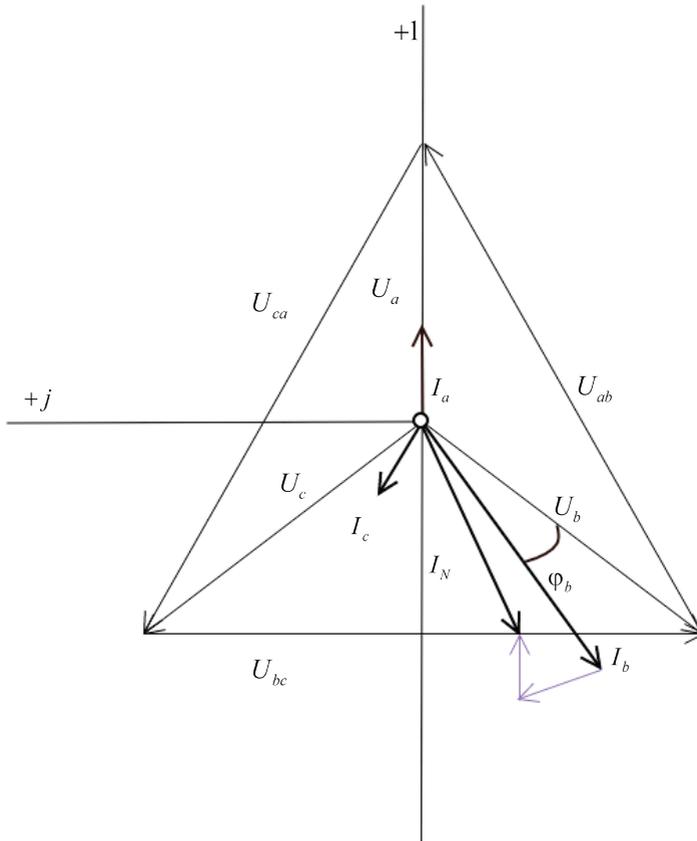


Рисунок 15

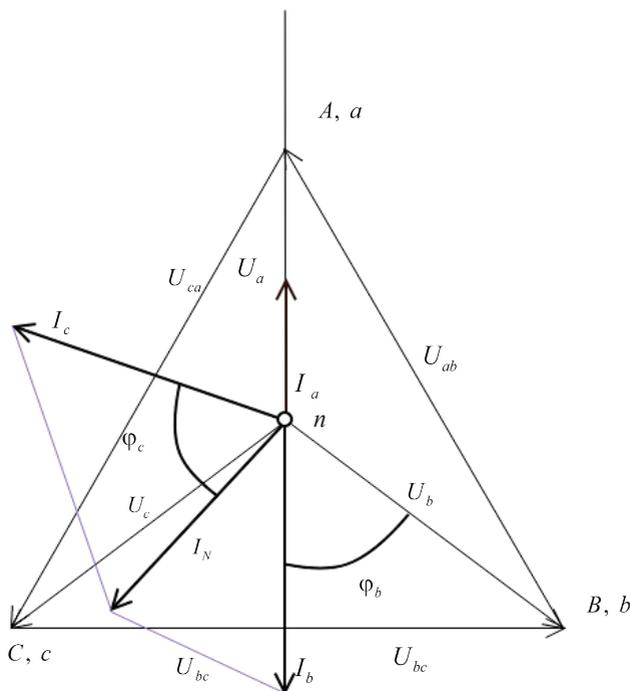


Рисунок 16

**Задача 4.** К трехфазной трехпроводной линии с напряжением  $U_{\text{Л}} = 380$  В подключен симметричный приемник (рисунок 17) с сопротивлениями фазы  $R = 8$  Ом,  $X_b = -6$  Ом. Определите токи в фазах приемника и в линейных проводах, постройте топографическую диаграмму напряжений и совмещенную с ней векторную диаграмму токов.

**Решение.**

Так как нагрузка симметричная, то рассчитываем режим одной фазы. Фазное напряжение  $U_{\text{Ф}} = U_{\text{Л}} / \sqrt{3} = 660 / \sqrt{3} = 380$  В, и в комплексной форме, принимая начальную фазу напряжения  $U_a$  равной нулю, получаем  $U_a = U_{\text{Ф}} = 380$  В, комплексное сопротивление фазы  $Z_{\text{Ф}} = Z_{\text{Ф}} e^{j\varphi} = 8 - j6 = 10 \cdot e^{-j36^\circ 52'}$  Ом (активно-емкостное), фазные и линейные токи

$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \underline{U}_a / \underline{Z}_A = 380 / 10 \cdot e^{-j36^\circ 52'} = 38 \cdot e^{-j36^\circ 52'} \text{ А.}$$

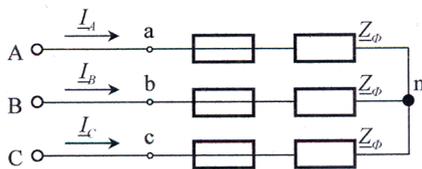


Рисунок 17

Для построения совмещенных топографической диаграммы напряжений и векторной диаграммы токов (рисунок 18) выбираем масштаб напряжений и масштаб токов. Строим симметричную топографическую диаграмму напряжений; токи опережают соответствующие фазные напряжения на углы  $36^{\circ}52'$ .

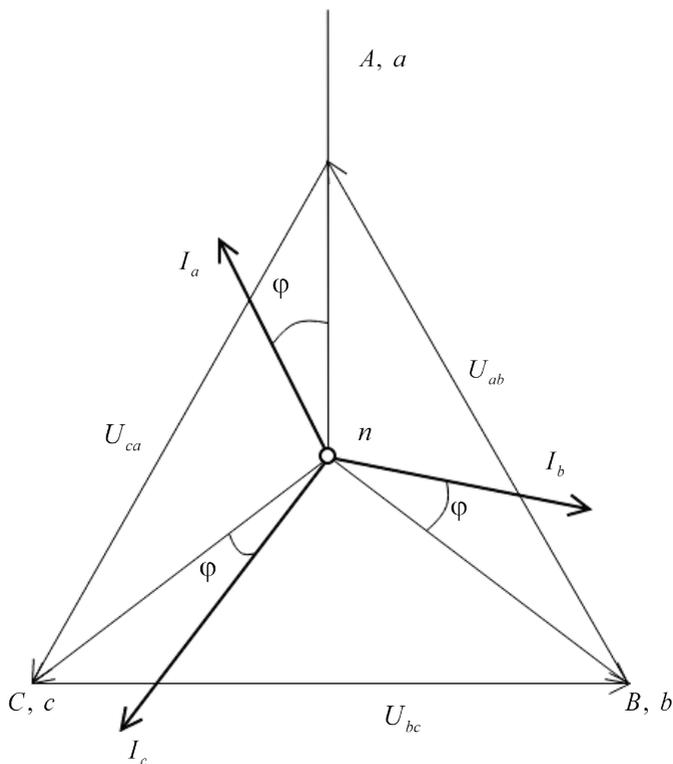


Рисунок 18

**Задача 5.** К трехфазной трехпроводной сети с линейным напряжением  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$  подключен приемник, фазы которого соединены звездой (рисунок 19). Заданы сопротивления  $R_a = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_b = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 8,66 \text{ Ом}$ ,  $X_a = -10 \text{ Ом}$ . Определите токи в ветвях, постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

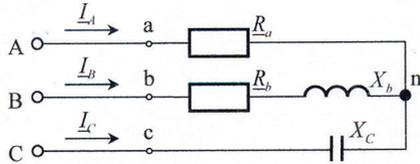


Рисунок 19

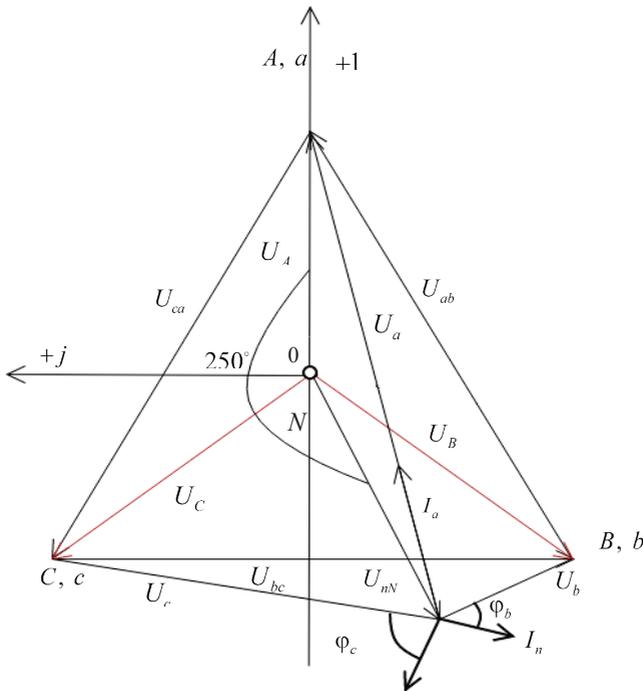


Рисунок 20

Фазные напряжения источника образуют симметричную систему (рисунок 20):

$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= U_\Phi e^{j0} = 127 \cdot e^{j0} \text{ В;} \\ \underline{U}_B &= U_\Phi e^{-j120} = 127 \cdot e^{-j120} \text{ В;} \\ \underline{U}_C &= U_\Phi e^{+j120} = 127 \cdot e^{+j120} \text{ В.}\end{aligned}$$

Комплексные сопротивления фаз приемника

$$\begin{aligned}\underline{Z}_a &= Z_a e^{j\varphi_a} = R_a = 10 \text{ Ом;} \\ \underline{Z}_b &= Z_b e^{j\varphi_b} = R_b + j \cdot X_b = 5 + j8,66 = 10 \cdot e^{j60} \text{ Ом;} \\ \underline{Z}_c &= Z_c e^{j\varphi_c} = -j \cdot X_c = -j10 = 10 \cdot e^{-j90} \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Комплексные проводимости фаз приемника

$$\begin{aligned}\underline{Y}_a &= 1/\underline{Z}_a = 1/10 = 0,1 \text{ Ом;} \\ \underline{Y}_b &= 1/\underline{Z}_b = 1/10 \cdot e^{-j60} = 0,1 \cdot e^{-j60} = 0,1(0,5 - j0,866) \text{ Ом;} \\ \underline{Y}_c &= 1/\underline{Z}_c = 1/(-j10) = 0,1 \cdot e^{j90} \text{ Ом;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{nN} &= \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \\ &= \frac{127 \cdot e^{j0} \cdot 0,1 + 127 \cdot e^{-j120} \cdot 0,1 \cdot e^{-j60} + 127 \cdot e^{+j120} \cdot 0,1 \cdot e^{j90}}{0,1 + 0,1 \cdot e^{-j60} + 0,1 \cdot e^{j90}}, \\ \underline{U}_{nN} &= -76 - j35,5.\end{aligned}$$

Фазные напряжения приемника

$$\begin{aligned}\underline{U}_a &= \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = 127 - (-76 - j35,5) = \\ &= 203 + j35,5 = 206 \cdot e^{j10} \text{ В;} \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = -63,5 - j110 - (-76 - j35,5) = \\ &= 12,5 - j74,5 = 75,5 \cdot e^{-j80,30'} \text{ В;} \\ \underline{U}_c &= \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = -63,5 + j110 - (-76 - j35,5) = \\ &= 12,5 + j145,5 = 145,5 \cdot e^{j85} \text{ В.}\end{aligned}$$

Фазные токи и токи в линии

$$\underline{I}_A = \underline{I}_d = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = 206 \cdot e^{j10} / 10 = 20,6 \cdot e^{j10} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = 75,5 \cdot e^{-j80^\circ 30'} / 10 \cdot e^{j60} = 7,55 \cdot e^{-j140^\circ 30'} \cdot 20,6 \cdot e^{j10} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = 145,6 \cdot e^{j85^\circ} / 10 \cdot e^{j90^\circ} = 14,56 \cdot e^{-j175} \text{ А}.$$

Для построения векторных диаграмм выбираем масштабы напряжений и тока. Строим симметричную топографическую диаграмму напряжений генератора (см. рисунок 20) и вектор смещения нейтрали  $\underline{U}_{nN} = 84 \cdot e^{j205^\circ}$  В. Векторы, соединяющие точку  $n$  и точки  $a, b, c$ , соответственно будут векторами фазных напряжений приемника  $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c$ . Из точки  $n$  строим векторы токов  $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$  с учетом сдвига фаз относительно напряжений  $\varphi_a = 0^\circ, \varphi_b = 60^\circ, \varphi_c = -90^\circ$ .

Топографическая диаграмма напряжений показывает, что из-за смещения нейтрали симметрия фазных напряжений приемника нарушается:  $\underline{U}_\Phi = 127 \text{ В}, U_C = 127 \text{ В}, U_R = 127 \text{ В}$ .

**Задача 6.** В симметричной трехфазной системе сгорел предохранитель фазы  $a$  приемника (рисунок 21). Определите токи в поврежденных фазах и постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

### Решение.

При обрыве одной из фаз симметрия системы нарушается. Проводимость оборванной фазы  $Y_a = 0$ , проводимость неповрежденных фаз не нарушается.

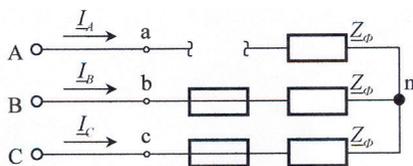


Рисунок 21

Смещение нейтрали

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \cdot 0 + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{0 + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\underline{Y}_\Phi \cdot (\underline{U}_B + \underline{U}_C)}{2 \cdot \underline{Y}_\Phi} =$$

$$= -\frac{\underline{U}_A}{2} = -\frac{380}{2} \cdot e^{j0} = -190 \cdot e^{j0} \text{ В}.$$

Напряжение на фазах приемника

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_A - \left( -\frac{\underline{U}_A}{2} \right) = \frac{3}{2} \underline{U}_A = \frac{3}{2} \underline{U}_\Phi e^{j0} = \frac{3}{2} \cdot 380 e^{j0} = 570 e^{j0} \text{ В};$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_B - \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_C}{2} = \frac{\underline{U}_{BC}}{2} = \frac{660}{2} e^{-j90} = 330 e^{-j90} \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_C - \frac{\underline{U}_B + \underline{U}_C}{2} = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_C}{2} = \frac{\underline{U}_{CB}}{2} = \frac{660}{2} e^{+j90} = 330 e^{+j90} \text{ В}.$$

Токи в фазах приемника

$$\underline{I}_a = 0;$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_\Phi} = \frac{330 \cdot e^{-j90^\circ}}{10 \cdot e^{-j36^\circ 52'}} = 33 \cdot e^{-j53^\circ 8'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_\Phi} = \frac{330 \cdot e^{+j90^\circ}}{10 \cdot e^{-j36^\circ 52'}} = 33 \cdot e^{j126^\circ 52'} \text{ А}.$$

Для построения векторных диаграмм выбираем масштабы напряжений и тока. У генератора большой мощности линейные напряжения  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca}$  при обрыве фазы приемника не изменяются и на топографической диаграмме образуют замкнутый треугольник (рисунок 22). Нейтральная точка  $n$  при  $\underline{U}_{nN} = -190 \cdot e^{j0}$  находится в середине вектора  $\underline{U}_{bc}$ . Векторы, соединяющие точку  $n$  с точками  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , соответственно будут векторами фазных напряжений приемника:

$$\underline{U}_a = \frac{3}{2} \cdot \underline{U}_\Phi \cdot e^{j0},$$

$$\underline{U}_b = \frac{\underline{U}_\Pi}{2} \cdot e^{-j90},$$

$$\underline{U}_c = \frac{\underline{U}_\Pi}{2} \cdot e^{+j90},$$

что соответствует расчетным данным. Векторы токов  $\underline{I}_b$  и  $\underline{I}_c$  строим с учетом угла сдвига фаз:  $\varphi = 36^\circ 52'$ .

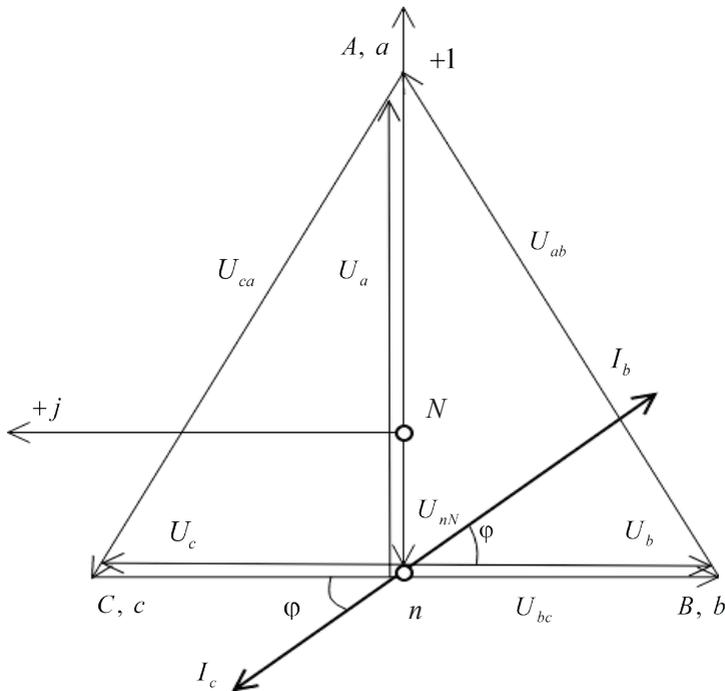


Рисунок 22

**Задача 7.** В симметричной трехфазной системе (см. задачу 4) произошло короткое замыкание фазы а приемника (рисунок 23). Определите токи в фазах и постройте совмещенную топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

При коротком замыкании фазы а сопротивление фазы  $Z_a = 0$  и потенциал точки  $n$  равен потенциалу точки  $a$ , то есть на топографической диаграмме точка  $n$  совпадает с точкой  $a$  (рисунок 24) и  $\underline{U}_a = \underline{U}_{nN} = 380 \cdot e^{j0}$  В.

Напряжение на фазах приемника

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_A - \underline{U}_A = 0;$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_B - \underline{U}_A = \underline{U}_{BA} = -\underline{U}_\Pi \cdot e^{j30} = 660 \cdot e^{j210} \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = \underline{U}_{CA} = \underline{U}_\Pi \cdot e^{j150} = 660 \cdot e^{j150} \text{ В}.$$

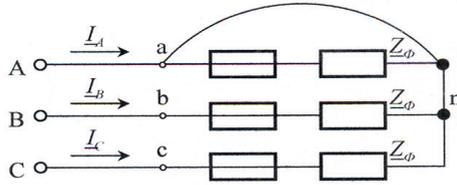


Рисунок 23

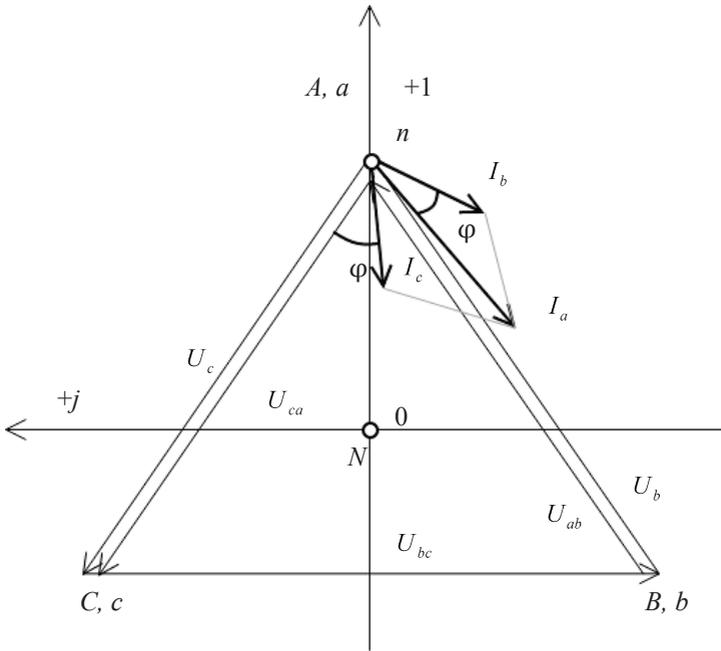


Рисунок 24

Токи в фазах  $b$  и  $c$

$$I_b = \frac{U_b}{Z_\Phi} = \frac{660 \cdot e^{j210^\circ}}{10 \cdot e^{-j36^\circ 52'}} = 66 \cdot e^{j246^\circ 52'} \text{ А};$$

$$I_c = \frac{U_c}{Z_\Phi} = \frac{660 \cdot e^{j150^\circ}}{10 \cdot e^{-j36^\circ 52'}} = 66 \cdot e^{j186^\circ 52'} \text{ А}.$$

Ток фазы  $a$  находится по первому закону Кирхгоффа. Для узла  $n$

$$I_a + I_b + I_c = 0,$$

Откуда

$$I_a = -(I_b + I_c) = -\left(66 \cdot e^{j246^\circ 52'} + 66 \cdot e^{j186^\circ 52'}\right) = 144 \cdot e^{j36^\circ 52'} \text{ А.}$$

Для построения диаграмм (см. рисунок 24) выбираем масштабы напряжений и тока. Линейные напряжения  $\underline{U}_{ab}$ ;  $\underline{U}_{bc}$ ;  $\underline{U}_{ca}$  считаем заданными. Векторы, соединяющие точку  $n$  с точками  $b$  и  $c$ , соответственно будут фазными напряжениями  $\underline{U}_b = -\underline{U}_{ab}$  и  $\underline{U}_c = -\underline{U}_{ca}$ , что соответствует расчетным данным. Векторы токов  $I_b$  и  $I_c$  строим с учетом угла сдвига фаз  $\varphi = -36^\circ 52'$ .

**Задача 8.** При напряжении и сопротивлении фаз, заданных в задаче 1, рассчитайте фазные и линейные токи, если фазы приемника соединены *треугольником* (рисунок 25). Определить, как изменится линейный ток по сравнению с линейным током в схеме соединения фаз приемника *звездой*. Постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

При симметричной нагрузке действующие значения фазных токов одинаковы, поэтому рассчитываем режим одной фазы. Фазное напряжение равно линейному  $U_\Phi = U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$ . Комплексное сопротивление фазы  $\underline{Z}_\Phi = \underline{Z}_\Phi e^{j\varphi} = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ} \text{ Ом}$ . Действующее значение фазного тока  $I_\Phi = U_\Phi / Z_\Phi = 380/5 = 76 \text{ А}$ . Согласно выражению  $I_{\text{Л}} = \sqrt{3} \cdot I_\Phi$  линейный ток  $I_{\text{Л}} = \sqrt{3} \cdot 76 = 132 \text{ А}$ . Линейный ток по сравнению с линейным током в схеме соединения фаз приемника звездой увеличился в 3 раза, а фазный ток – в  $\sqrt{3}$  раз.

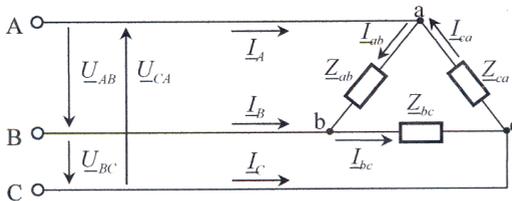


Рисунок 25

Для построения векторных диаграмм (рисунок 26) выбираем масштабы напряжения и тока. Топографическая диаграмма линейных напряжений такая же, как на рисунке 24. Фазные токи  $I_{ab}$ ;  $I_{bc}$ ;  $I_{ca}$  отстают по фазе от соответствующих фазных или равных им линейных напряжений на равные углы  $\varphi = 35^\circ 8'$ , линейные токи строим по  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_\Phi$ .

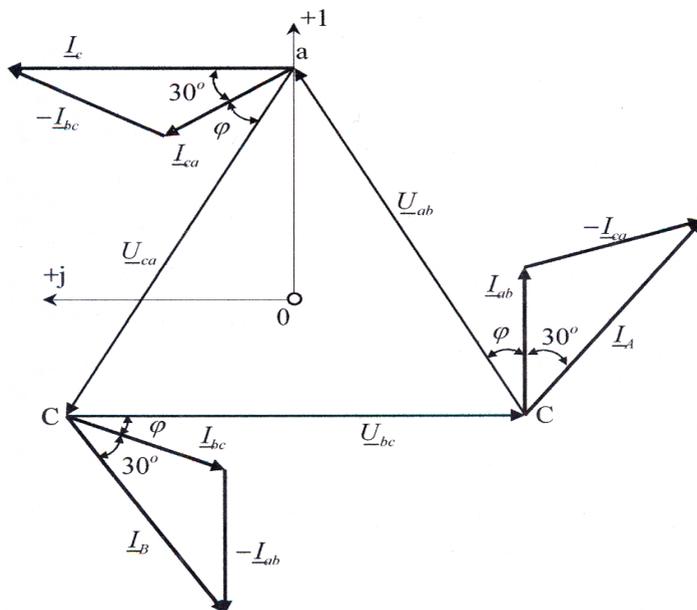


Рисунок 26

**Задача 9.** К трехпроводной трехфазной линии с линейным напряжением 380 В подключен трехфазный приемник с параметрами:  $R = 10$  Ом,  $X_L = 10$  Ом,  $X_C = 10$  Ом (рисунок 27). Рассчитайте токи в фазах и в линии, постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

Сопроотивления фаз по модулю одинаковые, но по аргументу разные, следовательно, нагрузка несимметричная и ток каждой фазы необходимо рассчитать отдельно.

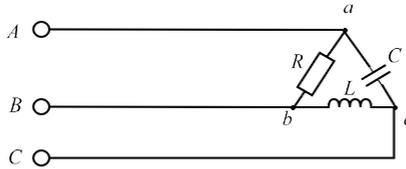


Рисунок 27

Комплексное сопротивление фаз

$$Z_{ab} = R = 10 \text{ Ом};$$

$$Z_{bc} = jX_L = j10 = 10 \cdot e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{ca} = -jX_C = -10 = 10 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексные линейные напряжения

$$U_{ab} = 380 \cdot e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$U_{bc} = 380 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$U_{ca} = 380 \cdot e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Фазные токи в соответствии с рисунком 27:

$$I_{ab} = 380 \cdot e^{j30^\circ} / 10 = 38 \cdot e^{j30^\circ} \text{ А};$$

$$I_b = 380 \cdot e^{-j90^\circ} / 10 \cdot e^{j90^\circ} = 38 \cdot e^{-j180^\circ} \text{ А};$$

$$I_{ca} = 380 \cdot e^{j150^\circ} / 10 \cdot e^{-j90^\circ} = 38 \cdot e^{j240^\circ} \text{ А}.$$

Находим линейные токи:

$$\begin{aligned} I_A &= 38 \cdot e^{j30^\circ} - 38 \cdot e^{j240^\circ} = 38 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} - \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \\ &= 51,9 + j51,9 = 73,4 \cdot e^{j45^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_B &= 38 \cdot e^{j180^\circ} - 38 \cdot e^{j30^\circ} = 38 \left[ -1 + j0 - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right] = \\ &= -70,9 - j19 = 73,4 \cdot e^{j195^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_C &= 38 \cdot e^{j240^\circ} - 38 \cdot e^{j180^\circ} = 38 \left[ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + j0 \right] = \\
 &= -19 - j32,9 = 38 \cdot e^{j300^\circ} \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Для построения векторных диаграмм выбираем масштабы напряжений и тока. Строим топографическую диаграмму напряжений, аналогичную показанной на рисунке 24. Векторы фазных токов соответственно откладываем относительно векторов линейных напряжений под углами (рисунок 28). Затем в соответствии с выражениями для линейных токов строим векторы, длина и напряжения которых должны соответствовать расчетным данным.

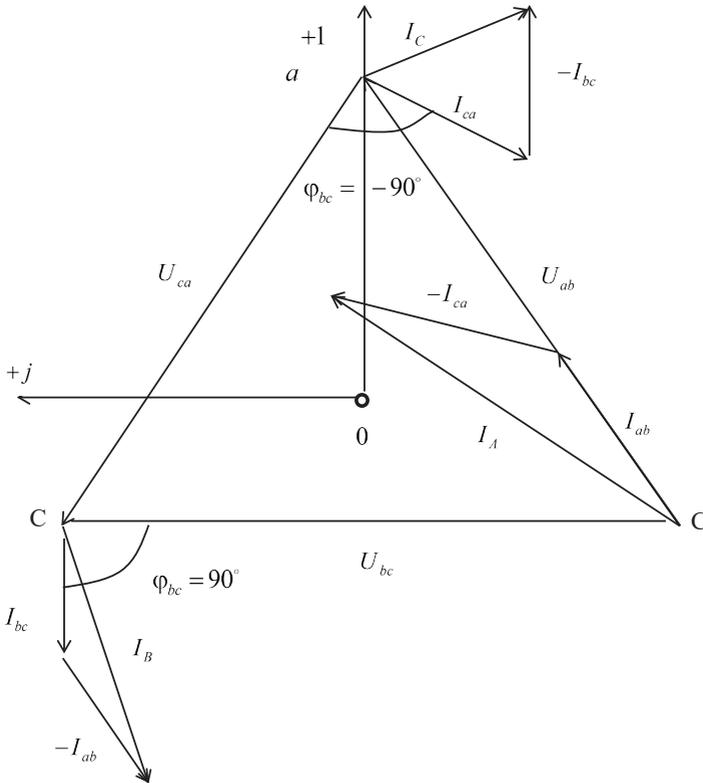


Рисунок 28

**Задача 10.** У симметричного трехфазного приемника (см. задачу 8) произошел обрыв фазы  $ab$  (рисунок 29). Определите токи в неповрежденных фазах и в линии, постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

Токи в неповрежденных фазах не изменяются, так как фазные напряжения, равные линейным, не изменяются:  $I_{ca} = I_{bc} = I_{\Phi} = 76$  А. Линейные токи при  $I_{ab} = 0$ :

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{ca}, \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc}, \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \end{aligned}$$

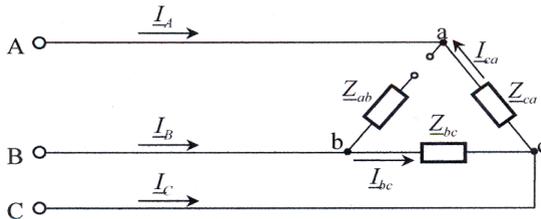


Рисунок 29

Из этих уравнений следует, что действующие значения линейных токов  $I_A$  и  $I_B$  равны действующим значениям фазных токов  $I_{ca} = I_{bc} = 76$  А, а у линейного тока  $I_C$  действующее значение не изменится, то есть  $I_C = 132$  А. Для построения векторной диаграммы выбираем масштабы напряжения и тока. Топографическая диаграмма линейных напряжений, равных фазным (рисунок 30), та же, что и на рисунке 24. Векторы разных токов  $I_{bc}$ ,  $I_{ca}$  отстают по фазе относительно фазных напряжений  $U_{bc}$ ,  $U_{ca}$  на углы  $\varphi_{ca} = 53^\circ 8'$ . Линейные токи строим согласно полученным выше уравнениям.

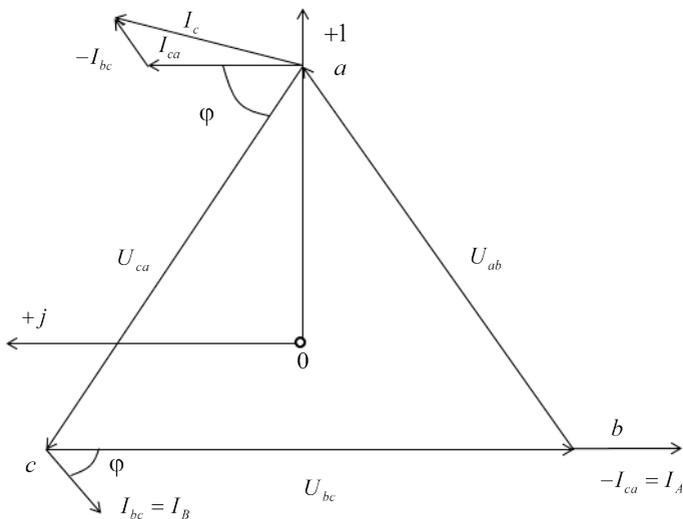


Рисунок 30

**Задача 11.** В симметричном трехфазном приемнике (см. задачу 8) порвался линейный провод. Определите фазные и линейные токи, постройте совмещенные топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

**Решение.**

Пусть оборвался провод А (рисунок 31). К приемнику проводится только напряжение  $\underline{U}_{bc} = U_{\text{Л}} e^{-j90} = 380 \cdot e^{-j90}$  В. Сопротивление фазы  $b$  включено на полное напряжение  $\underline{U}_{bc}$ , а равные сопротивления фаз  $ab$  и  $ca$  включены последовательно, и к каждому из них подведена половина напряжения  $\underline{U}_{bc}$ :

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ca} = -\underline{U}/2 = 380 \cdot e^{j90}/2 = 190 \cdot e^{j90} \text{ В.}$$

Ток фазы  $bc$  не изменяется:

$$\underline{I}_{bc} = \underline{U}_{bc} / \underline{Z}_{bc} = 380 \cdot e^{-90} / 5 \cdot e^{j53^{\circ}8'} = 76 \cdot e^{-j143^{\circ}8'} \text{ А.}$$

Фазные и линейные токи при  $I_A = 0$

$$\underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ba} = \underline{U}_{bc} / \underline{Z}_{bc} = 380 \cdot e^{90} / 5 \cdot e^{j53^{\circ}8'} = 38 \cdot e^{j36^{\circ}52'} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_b = 76 \cdot e^{-j146^{\circ}8'} - 38 \cdot e^{j36^{\circ}52'} = 114 \cdot e^{j216^{\circ}8'} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_c = 38 \cdot e^{j36^{\circ}52'} - 76 \cdot e^{-j143^{\circ}8'} = 114 \cdot e^{j36^{\circ}52'} \text{ А.}$$

Совмещенная диаграмма представлена на рисунке 32.

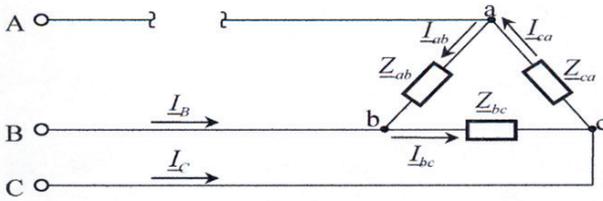


Рисунок 31

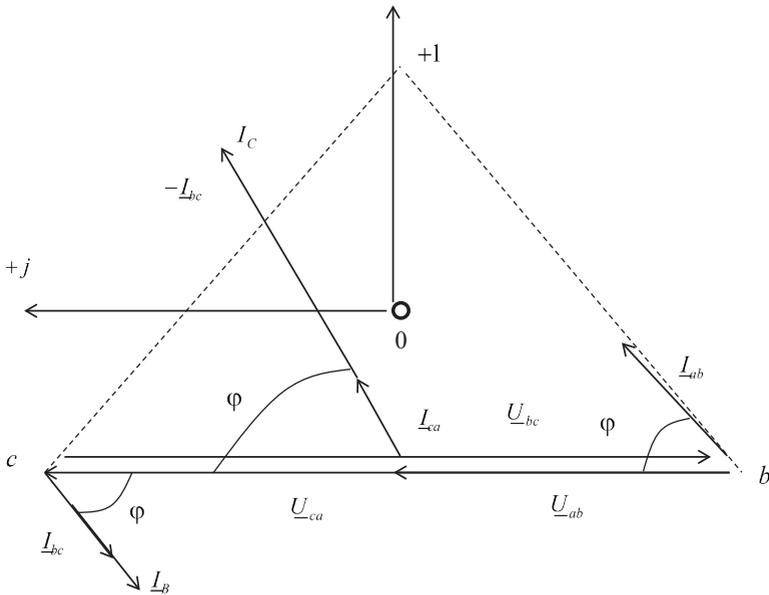


Рисунок 32

**Задача 12.** К трехфазной линии с  $U_{\text{Л}} = 380$  В подключен трехфазный симметричный приемник, фазы которого соединены треугольником, и группа однофазных приемников, соединенных звездой с нейтральным проводом (рисунок 33). Комплексное сопротивление фазы симметричного приемника  $Z_{\Phi} = 20e^{j15^\circ}$  Ом. Активные мощности однофазных приемников  $P_a = 5500$  Вт,  $P_b = 3300$  Вт,

$P_c = 7700$  Вт, при  $\cos \varphi_\Phi = 1$ . Сопротивлением проводов можно пренебречь. Определите фазные и линейные токи симметричного приемника, токи в несимметричных приемниках, суммарную активную, реактивную и полную мощности.

**Решение.**

Фазные напряжения при соединении звездой с нейтральным проводом

$$U_\Phi = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220 \text{ В.}$$

Фазные токи однофазных приемников

$$I'_A = P_a / U_a \cdot \cos \varphi_a = 5500 / 220 \cdot 1 = 19 \text{ А;}$$

$$I'_B = P_b / U_b \cdot \cos \varphi_b = 3300 / 220 \cdot 1 = 15 \text{ А;}$$

$$I'_C = P_c / U_c \cdot \cos \varphi_c = 7700 / 220 \cdot 1 = 35 \text{ А.}$$

Фазные и линейные токи трехфазного приемника

$$I''_\Phi = U_{\text{л}} / 2 = 380 / 2 = 19 \text{ А;}$$

$$I''_{\text{л}} = I''_\Phi \cdot \sqrt{3} = 19 \cdot \sqrt{3} = 33 \text{ А.}$$

Его активная и реактивная мощность

$$P'' = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \cos \varphi_\Phi = 3 \cdot 380 \cdot 19 \cdot \cos 15^\circ = 20\,921 \text{ Вт;}$$

$$Q'' = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \sin \varphi_\Phi = 3 \cdot 380 \cdot 19 \cdot \sin 15^\circ = 5605 \text{ вар.}$$

Суммарные мощности

$$P = P_a + P_b + P_c + P' = 5500 + 3300 + 7700 + 20\,921 = 37\,421 \text{ Вт;}$$

$$Q = Q'' = 5605 \text{ вар;}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{37\,421^2 + 5605^2} = 38\,160 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

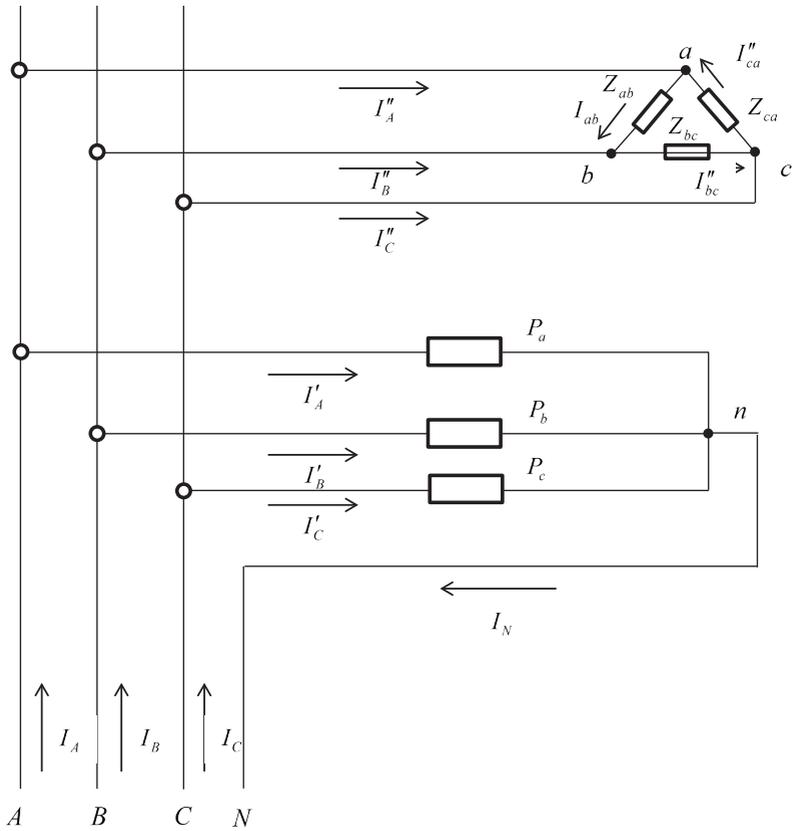


Рисунок 33

# 1. РЕКОМЕНДУЕМЫЙ ПОРЯДОК РАСЧЕТА ТОКОВ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ

Переходный процесс в разветвленной линейной электрической цепи описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, общее решение которых находится как сумма принужденной и свободной составляющих. В таких цепях расчет целесообразно вести в следующем порядке.

1. Определяют начальные условия  $i_L(0)$  и  $u_C(0)$ . Для этого рассчитывают ток в индуктивности и напряжение на конденсаторе в режиме до коммутации. После этого на основании законов коммутации находят искомое начальное условие, как  $i_L(-0) = i_L(0)$ ;  $u_C(-0) = u_C(0)$ .

2. Рассчитывают принужденные составляющие токов переходного процесса и напряжения на конденсаторе, используя известные методы расчета цепей в установившемся режиме (после коммутации).

3. Находят корни характеристического уравнения данной цепи. Для этого записывают уравнения Кирхгофа для свободных составляющих токов переходного процесса и производят их алгебраизацию.

Например, для схемы (рисунок 34) можно записать:

$$\begin{aligned}i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} &= 0; \\L \cdot \frac{di_{3св}}{dt} + r_1 i_{1св} + r_2 i_{2св} &= 0; \\r_2 i_{2св} - \frac{1}{C} \int i_{3св} dt &= 0.\end{aligned}$$

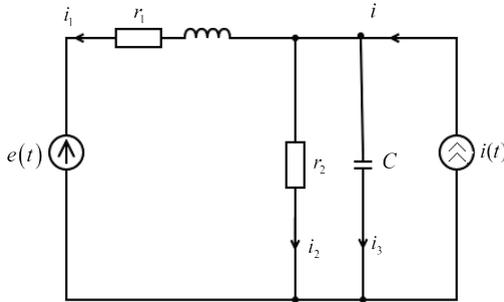


Рисунок 34

Подставив в эту систему

$$L \cdot \frac{di_{1\text{св}}}{dt} = L \cdot p \cdot i_{1\text{св}}, \quad \frac{1}{C} \int i_{3\text{св}} dt = \frac{1}{p \cdot C} \cdot i_{3\text{св}},$$

получим систему алгебраических уравнений относительно токов:

$$\begin{aligned} i_{1\text{св}} - i_{2\text{св}} - i_{3\text{св}} &= 0, \\ (Lp + r_1) \cdot i_{1\text{св}} + r_2 \cdot i_{2\text{св}} &= 0, \\ r_2 \cdot i_{2\text{св}} - \frac{i_{3\text{св}}}{p \cdot C} &= 0. \end{aligned}$$

Переход от системы линейных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений называют алгебраизацией дифференциальных уравнений свободных токов. Полученная система уравнений имеет решение, отличное от нуля, если определитель системы равен нулю:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ Lp + r_1 & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & \frac{-1}{pC} \end{pmatrix}.$$

Уравнение  $\Delta = 0$  является характеристическим уравнением цепи.

Раскрывая определитель, получим

$$p^2 r_2 LC + p(r_1 r_2 C + L) + r_1 + r_2 = 0,$$

и корни этого квадратного уравнения

$$p_{1,2} = \frac{\left[ (r_1 r_2 C + L) \pm \sqrt{(r_1 r_2 C + L)^2 - 4(r_1 + r_2)r_2 LC} \right]}{2r_2 LC}.$$

4. Определяют вид уравнений для свободных составляющих токов переходного процесса.

Если корни  $p_{1,2}$  и  $p_3$  разные и вещественные, то

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

Если корни кратные:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p;$$

$$i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2) e^{p t}.$$

Если корни  $p_{2,3} = -1/\tau + \gamma\omega_0$  комплексные и сопряженные,  $p_1$  вещественный, то

$$i_{\text{св}} = A e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A_1 e^{p_1 t},$$

или

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + (A_2 \cos \omega_0 t + A_3 \sin \omega_0 t) \cdot e^{-t/\tau},$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – постоянные интегрирования.

5. Находят значения всех свободных токов и свободного напряжения на конденсаторе в момент  $t = 0$ :

$$i_{\text{св}} = i(0) - i_{\text{пр}}(0),$$

$$u_{\text{св}} = u_{\text{св}}(0) - u_{\text{пр}}(0).$$

6. Находят значения первых производных всех свободных токов в момент  $t = 0$

7. По данным п. 5 и 6 определяют постоянные интегрирования дифференциальных уравнений для всех токов цепи.

8. Найденные принужденные и свободные составляющие токов соответственно складываются, то есть

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

6. Производят проверку правильности решения путем составления уравнения Кирхгофа для любого узла или контура исходной цепи.

## Числовые примеры

**Задача 1.1.** В схеме на рисунке 35  $E = 120$  В,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $L = 10$  мГн. Определите токи в цепи после замыкания ключа  $K$ . Постройте график зависимости  $I(t)$ .

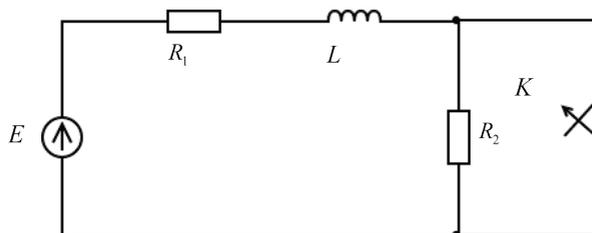


Рисунок 35

**Решение.**

1. Выбираем положительное направление для тока, как показано на рисунке 35 стрелкой.

2. Записываем дифференциальное уравнение на основании закона Кирхгофа для момента времени после коммутации:

$$R_1 I + L \frac{di}{dt} = E.$$

3. Представляем искомый ток в виде суммы свободной и принужденной составляющей:

$$I = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

4. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$R_1 + pL = 0.$$

5. Решение для свободного тока ищем в виде

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-1000t}.$$

6. Находим принужденную составляющую тока переходного процесса:

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{R_1} = \frac{120}{10} = 12 \text{ А.}$$

7. Находим значение тока переходного процесса в момент  $t = 0$  на основании первого закона коммутации:

$$i(0) = i(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 6 \text{ А.}$$

8. Определяем постоянную интегрирования  $A$ :

$$i(0) = 12 + A = 6 \text{ А; } A = -6 \text{ А.}$$

9. Записываем окончательное выражение для тока переходного процесса:

$$i = 12 - 6e^{-1000t}.$$

10. По полученному уравнению строим график  $I(t)$  (рисунок 36).

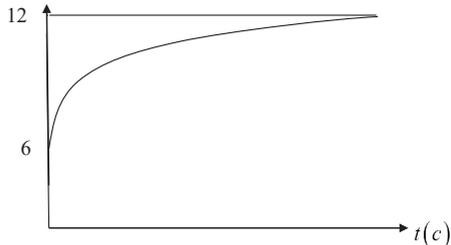


Рисунок 36

**Задача 1.2.** Решите задачу 1.1 для случая размыкания ключа  $K$ . Постройте график зависимости  $I(t)$ .

**Решение.**

1. Записываем дифференциальное уравнение на основании закона Кирхгофа для момента времени после коммутации:

$$i(R_1 + R_2) + L \frac{di}{dt} = E.$$

2. Представляем искомый ток в виде суммы свободной и принужденной составляющей:

$$I = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

3. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$R_1 + R_2 + pL = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{L} = -\frac{10 + 10}{10 \cdot 10^{-3}} = -2000 \text{ с}^{-1}.$$

4. Решение для свободного тока ищем в виде

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-2000t}.$$

5. Определяем принужденную составляющую искомого тока переходного процесса:

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 6 \text{ А}.$$

6. Находим значение тока переходного процесса в момент  $t = 0$  на основании первого закона коммутации:

$$i(0) = i(0-) = \frac{E}{R_1} = 12 \text{ А}.$$

7. Определяем постоянную интегрирования  $A$ :

$$i(0) = 6 + A = 12 \text{ А}; A = 6 \text{ А}.$$

8. Записываем окончательное выражение для тока переходного процесса:

$$i = 6 + 6e^{-2000t}.$$

9. По полученному уравнению для тока  $i$  строим график  $i(t)$  (рисунок 37).

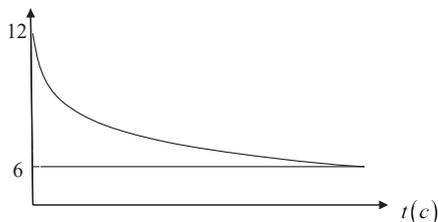


Рисунок 37

**Задача 1.3.** Определите ток  $I$  в цепи конденсатора, если  $E = 200 \text{ В}$ ,  $C = 200 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ кОм}$ ,  $U_C = 100 \text{ В}$ . Постройте графики зависимости  $K$ .

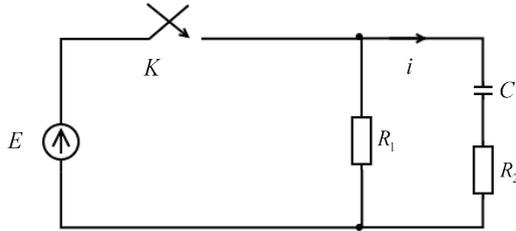


Рисунок 38

1. Условно принимаем положительные направления для токов и напряжения на конденсаторе и отмечаем их стрелками.

2. Записываем дифференциальное уравнение на основании второго закона Кирхгофа:

$$iR_2 + U_c = E; \quad I = C \frac{dU_c}{dt}.$$

Поэтому

$$R_2 C \frac{dU_c}{dt} + U_c = E.$$

Представляем напряжение на конденсаторе в виде суммы свободной и принужденной составляющей.

3. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$PR_2C + 1 = 0;$$

$$P = -\frac{1}{R_2C} = -50 \text{ C}^{-1}.$$

4. Решение для свободной составляющей напряжения на конденсаторе ищем в виде

$$U_{\text{св}} = Ae^{-50t}.$$

5. Находим принужденную составляющую напряжения на конденсаторе:

$$U_{\text{пр}} = E = 200.$$

6. Находим значение переходного напряжения на конденсаторе в момент  $T = 0$  на основании второго закона коммутации:

$$U_c(0) = U_c(0-) = 100 \text{ В.}$$

7. Определяем постоянную интегрирования  $A$ :

$$U_c = 200 + A = 100; A = -100.$$

8. Записываем уравнение для переходного напряжения:

$$U_c = 200 - 100e^{-50t}.$$

9. Ток  $I$  в цепи конденсатора найдем как

$$i = C \frac{dU_c}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 50 e^{-50t} = 0,01 e^{-50t} \text{ А.}$$

10. По полученным уравнениям для тока и напряжения строим графики (рисунок 39).

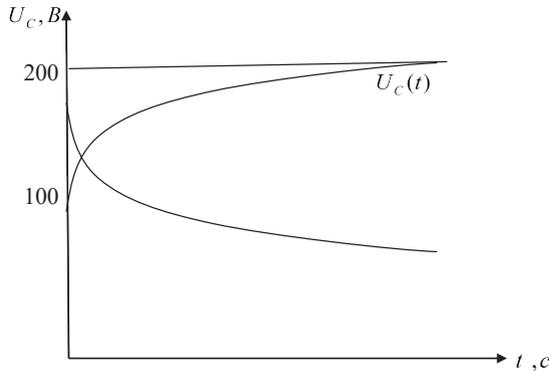


Рисунок 39

**Задача 1.4.** Рассчитать ток в цепи конденсатора и напряжение на конденсаторе через  $t = 0,04$  время после размыкания ключа  $K$  для задачи 1.3.

1. Записываем дифференциальное уравнение на основании закона Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$i(R_1 + R_2) + U_c = E; I = C \frac{dU_c}{dt}.$$

Поэтому

$$(R_1 + R_2)C \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0.$$

2. Представляем напряжение на конденсаторе в виде суммы свободной и принужденной составляющей:

$$U_c = U_{\text{пр}} + U_{\text{св}}.$$

3. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$P(R_1 + R_2)C + 1 = 0; .$$

$$P = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -25 \text{ C}^{-1}.$$

4. Решение для свободной составляющей напряжения на конденсаторе ищем в виде

$$U_{\text{св}} = Ae^{-25t}.$$

5. Находим принужденную составляющую напряжения на конденсаторе:

$$U_{\text{пр}} = E = 0.$$

6. Находим значение переходного напряжения на конденсаторе в момент  $T = 0$  на основании второго закона коммутации:

$$U_c(0) = U_c(0-) = 200 \text{ В}.$$

7. Определяем постоянную интегрирования  $A$ :

$$U_c = 0 + A = 200; A = 200.$$

8. Записываем уравнение для переходного напряжения:

$$U_c = 200e^{-25t}.$$

Напряжение на конденсаторе через время  $t = 0,04$  с равно:

$$U_{c(0,04)} = 200e^{-25 \cdot 0,04} = \frac{200}{e} = 73,6 \text{ В}.$$

9. Ток  $I$  в цепи конденсатора найдем как

$$i = C \frac{dU_c}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 50e^{-50t} = 0,01e^{-2t}.$$

10. По полученным уравнениям для тока и напряжения строим графики (рисунок 40).

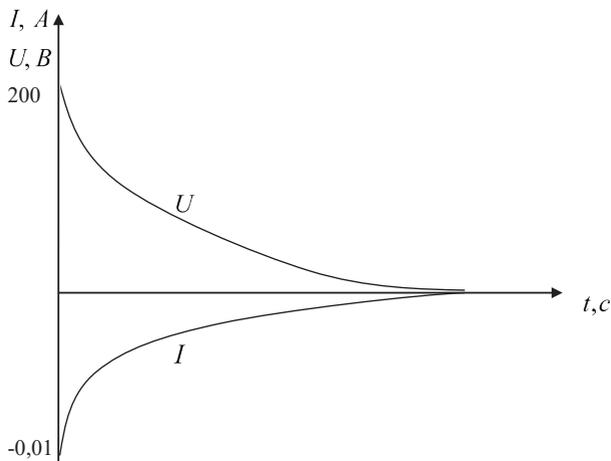


Рисунок 40

**Задача 1.5.** Найти токи в электрической цепи после коммутации, если  $E = 60$  В,  $R_1 = 400$  Ом,  $R_2 = 800$  Ом,  $L = 0,2$  Гн,  $C = 2,5$  мкФ,  $U_c(0) = 20$  В.

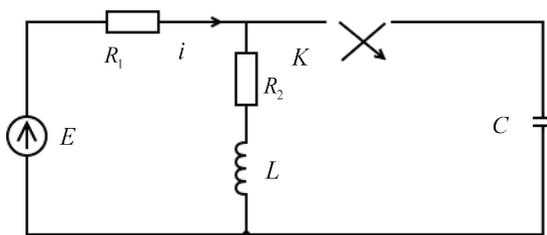


Рисунок 41

**Решение.**

1. Выбираем условно положительное направление для всех токов и напряжений на конденсаторе.

2. Представляем токи переходного процесса в виде двух составляющих – принудительной и свободной:

$$I_c = I_{\text{пр}} + I_{\text{св}}.$$

3. Находим принужденные составляющие токов и напряжений на конденсаторе:

$$I_{1\text{пр}} = I_{2\text{пр}} = \frac{E}{R_2 + R_1} = 0,05 \text{ А.}$$

4. Находим корни характеристического уравнения из условия  $Z(p) = 0$ :

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + Pl) \cdot \frac{1}{Pc}}{R_2 + Pl + \frac{1}{Pc}} = LcR_1P^2 + (L + CR_1R_2)P + R_1 + R_2 = 0;$$

$$P_1 = -2000 \text{ С}^{-1}, P_2 = -3000 \text{ С}^{-1}.$$

5. Решение для свободных составляющих токов переходного процесса ищем в виде

$$I_{\text{св}} = Ae^{p_1t} + Be^{p_2t}.$$

Находим значения всех токов переходного процесса в момент  $t = 0$ .

На основании первого закона коммутации имеем:

$$I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,05 \text{ А.}$$

На основании второго закона коммутации имеем:

$$U_c(0) = 20 \text{ В.}$$

Из схемы рисунка 41 находим на основании законов Кирхгофа токи:

$$I_1 = \frac{E - U_c}{R_1} = 0,01 \text{ А};$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0,1 - 0,05 \text{ А.}$$

7. Находим значения первых производных всех токов переходного процесса в момент времени  $t = 0$ . Для этого записываем дифференциальное уравнение для схемы рисунка 41:

$$I_1 = I_2 + I_3;$$

$$I_2R_2 + L \frac{dI_2}{dt} - U_c = 0;$$

$$I_1R_1 + U_c = E.$$

из последнего выражения следует:

$$\left| \frac{dI_2}{dt} \right| = \frac{Uc - I_2 R_2}{L} = -100 A C^{-1};$$

$$Uc = \frac{1}{C} \int I_3 dt. \quad .$$

8. Определяем постоянные интегрирования:

$$I_1 = Ae^{Pt} + Be^{Pt} + 0,05;$$

$$I_1 = A_1 + B_1 = 0,1 - 0,05 = 0,05;$$

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| = P_1 A_1 + P_2 B_1 = -50;$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0,05 \\ -2000A_1 - 3000B_1 = -50 \end{cases};$$

$$A_1 = 0,1A; B_1 = -0,05A;$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 0 \\ -2000A_2 - 3000B_2 = 100 \end{cases};$$

$$A_2 = -0,1A_1; B_2 = 0,1A;$$

$$\begin{cases} A_3 + B_3 = 0,05 \\ -2000A_3 - 3000B_3 = 50 \end{cases};$$

$$A_3 = 0,2A; B_3 = -0,15A.$$

9. Записываем выражение для искомым токов:

$$I_1 = 0,05 + 0,1e^{-2000t} - 0,05e^{-3000t};$$

$$I_2 = 0,05 + 0,1e^{-2000t} + 0,1e^{-3000t};$$

$$I_3 = 0,2e^{-2000t} - 0,1e^{-3000t}.$$

10. Проверка правильности решения может быть осуществлена из условия

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Можно убедиться, что при  $t > 0$  всегда это равенство выполняется:

$$0,05 + 0,1e^{-2000t} - 0,05e^{-3000t} - 0,05 + \\ + 0,1e^{-2000t} - 0,1e^{-3000t} - 0,2e^{-2000t} + 0,15e^{-3000t} = 0.$$

**Задача 1.6.** Найти токи переходного процесса в электрической цепи, если  $E = 100$  В,  $L = 0,125$  Гн,  $R_1 = R_2 = 50$  Ом,  $C = 180$  мкФ.

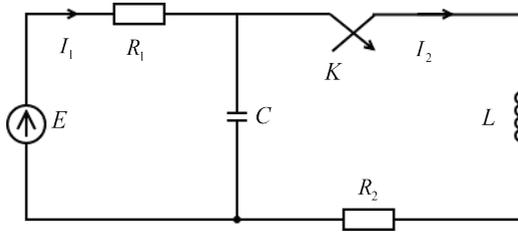


Рисунок 42

**Решение.**

1. Выбираем произвольно положительные направления для всех токов и напряжения на конденсаторе.

2. Представляем токи переходного процесса в виде двух составляющих – принужденной и свободной:

$$I(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

3. Находим корни характеристического уравнения:

$$Z(p) = R_1 + \frac{(pL + R_2) \frac{1}{pC}}{R_2 + Lp + \frac{1}{Cp}};$$

$$P_2 + 510P + 8,88 \cdot 10^4;$$

$$P_{1,2} = -225 \pm \gamma 155C^{-1} = -\beta \pm \gamma \omega_0.$$

4. Решение токов переходного процесса ищем в виде

$$I(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \theta).$$

5. Находим принужденные составляющие токов и напряжения на конденсаторе:

$$i_{1\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{50 + 50} = 1 \text{ А.}$$

6. Находим значение всех токов переходного процесса в  $t = 0$  на основании законов коммутации:

$$U_c(0-) = U_c(0) = E = 100 \text{ В};$$

$$i_2(0-) = i_2(0) = 0;$$

$$i_1 = \frac{E - U_c(0)}{R_1} = 0;$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 0 - 0 = 0.$$

7. Находим первые производные всех токов в  $t = 0$  для чего составим дифференциальные уравнения:

$$i_1 R_1 + U_c = E;$$

$$L \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 = U_c; .$$

$$i_1 = i_2 + i_3;$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right| = \frac{U_c(0) - i_2(0) R_2}{L} = 800 \text{ АС}^{-1};$$

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right| = -\frac{1}{R_1} \left. \frac{dU_c}{dt} \right| = 0;$$

$$\left. \frac{di_3}{dt} \right| = \left. \frac{di_1}{dt} \right| - \left. \frac{di_2}{dt} \right| = 0 - 800 = -800 \text{ АС}^{-1}.$$

8. Рассчитываем постоянные интегрирования:

$$I(0) = I_{\text{np}} + A \sin \theta.$$

Так как

$$\left. \frac{di_{\text{np}}}{dt} \right| = 0,$$

то

$$\theta = \arctg \frac{\omega_0 (I(0) - I_{\text{np}})}{\left. \frac{di}{dt} \right| + \beta (I(0) - I_{\text{np}})};$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{155(0-1)}{0+225(0-1)} = 34,6;$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{155(0-1)}{800+225(0-1)} = -15;$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{155(0-1)}{-800+225(0-1)} = 0;$$

$$A_1 = \frac{0-1}{\sin 34,6} = -1,761 \text{ A};$$

$$A_2 = \frac{0-1}{\sin(-15)} = 3,864 \text{ A};$$

$$A_3 = \frac{-800}{155 \cos(0) - 255 \sin(0)} = -5,161 \text{ A}.$$

9. Выражения для токов переходного процесса имеют вид

$$t_{1t} = 1 - 1,761e^{-22st} \sin(155t + 34,6);$$

$$t_{2t} = 1 + 3,864e^{-22st} \sin(155t - 15);$$

$$t_{3t} = 1 - 5,161e^{-22st} \sin(155t).$$

10. Проверка решения:

$$i_{1t} - i_{2t} - i_{3t} = 0,$$

для  $t = 0$ :

$$1 - 1,761e^{-22st} \sin(34,6) - 1 + 3,864e^{-22st} \sin(-15) = 0.$$

**Задача 1.7.** Определить ток переходного процесса в электрической цепи (рисунок 43) после замыкания ключа  $K$ , если  $u(t) = 100 \sin(10^3 t + \pi/4)$ ,  $r = 10$  Ом,  $C = 100$  мкФ,  $L = 10$  мГн.

**Решение.**

1. Определяем начальные условия. Для этого рассчитываем ток в катушке индуктивности  $i$  и напряжение на конденсаторе  $U_C$  в режиме до коммутации.

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи (рисунок 43) найдем как

$$\underline{z_3} = r - \gamma x_c + \frac{\gamma x_l (r - \gamma x_c)}{\gamma x_l + r - \gamma x_c} = 10 - \gamma 10 \frac{\gamma 10 (10 - \gamma 10)}{\gamma 10 + 10 - \gamma 10} = 20 + \gamma 0 = 20 \text{ Ом.}$$

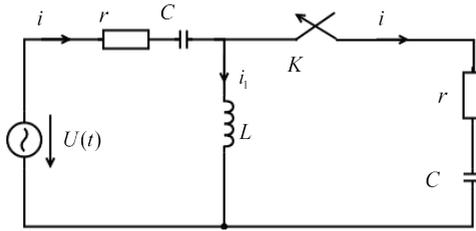


Рисунок 43

Амплитуда тока  $i$

$$\dot{I}m_- = \dot{U} / \dot{Z}_3 = 100 / 45^\circ / 20 = 5 / 45^\circ \text{ А.}$$

Амплитуда тока  $i_1$

$$\begin{aligned} \dot{I}m1_- &= \dot{I}m_- (r - \gamma x_c) / (\gamma x_l + r - \gamma x_c) = \\ &= 5 / 45^\circ (10 - \gamma 10) / (\gamma 10 + 10 - \gamma 10) = 5\sqrt{2} \text{ А.} \end{aligned}$$

Следовательно:

$$i(-0) = 0; \dot{I}1_- = 5\sqrt{2} \sin 10^3 t.$$

И на основании первого закона коммутации  $i(0) = 0$ .

Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$\dot{U}mc = \dot{I}m_- (-\gamma x_c) = 5 / 45^\circ (-\gamma 10) = 50 / -45^\circ \text{ В.}$$

Следовательно:

$$u_{c-} = 50 \sin(10^3 t - 45^\circ) \text{ В;}$$

$$u_c(-0) = 50 \sin(-45^\circ) = -25\sqrt{2} \text{ В.}$$

На основании второго закона коммутации

$$u_c(0) = -25\sqrt{2} \text{ В.}$$

Расчитываем принужденные составляющие тока и напряжения переходного процесса.

Амплитуда  $i$  после коммутации (ключ  $K$  разомкнут)

$$\dot{I}_m = \dot{U}_m / (r + \gamma x_l - \gamma x_c) = 100 / \underline{45^\circ} (10 + \gamma 10 - \gamma 10) = 10 / \underline{45^\circ} \text{ А.}$$

Следовательно:

$$i_{\text{нр}} = 10 \sin(10^3 t - 45^\circ) \text{ А;}$$

$$i_{\text{нр}} = 10 \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ А.}$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$\dot{U}_{mc} = \dot{I}_m (-\gamma x_c) = 10 / \underline{45^\circ} \cdot (-\gamma 10) = 100 / \underline{-45^\circ} \text{ В.}$$

И мгновенное значение

$$u_{c\text{нр}} = 100 \sin(10^3 t - 45^\circ) \text{ В.}$$

При  $t = 0$

$$u_{c\text{нр}}(0) = 100 \sin(-45^\circ) = -50\sqrt{2} \text{ В.}$$

2. Находим корни характеристического уравнения.

Дифференциальное уравнение для свободных токов имеет вид

$$r i_{\text{св}} + \frac{L di_{\text{св}}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{\text{св}} dt = 0.$$

Следовательно:

$$rp + Lp^2 + \frac{1}{C} = 0$$

или

$$p^2 + \frac{rp}{L} + \frac{1}{LC} = 0.$$

Подставляем числовые данные:

$$p^2 + 10^3 p + 10^6 = 0,$$

откуда

$$p_{1,2} = -500 \pm \gamma 500\sqrt{3} = -\delta \pm \gamma \omega_0,$$

где  $\delta = 500 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_0 = 500\sqrt{3} \text{ с}^{-1}$ .

3. Записываем уравнение для свободного тока в общем виде

$$i_{\text{св}} = Ae^{\delta t} \sin(\omega_0 t + \theta) = Ae^{-500t} \sin(500\sqrt{3}t + \theta).$$

4. Находим значения свободного тока при  $t = 0$ :

$$i_{\text{св}}(0) = i(0) - i_{\text{нр}}(0) = 0 + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ А,}$$

и значение свободного напряжения в  $t = 0$ :

$$u_{\text{св}}(0) = u_c(0) - u_{\text{нр}}(0) = -25\sqrt{2} + 50\sqrt{2} = 25\sqrt{2} \text{ В.}$$

5. Находим значение первой производной свободного тока в  $t = 0$ .

Так как

$$ri_{\text{св}} + u_{\text{св}} + L di_{\text{св}} / dt = 0,$$

то

$$di_{\text{св}} / dt = \frac{-u_{\text{св}} - ir_{\text{св}}}{L}.$$

6. Определим постоянные интегрирования:

$$i_{\text{св}}(0) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \theta) \Big|_{t=0} = A \sin \theta;$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{\text{св}}}{dt} \Big|_{t=0} &= \left| Ae^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \theta) \omega_0 - Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \theta) \right|_{t=0} = \\ &= A(\omega_0 \cos \theta - \delta \sin \theta). \end{aligned}$$

Следовательно:

$$A \sin \theta = -5\sqrt{2};$$

$$A(\omega_0 \cos \theta - \delta \sin \theta) = 2500\sqrt{2};$$

$$A(500\sqrt{3} \cos \theta - 500 \sin \theta) = 2500\sqrt{2},$$

откуда

$$\theta = \pm \pi / 2; A = \pm 5\sqrt{2}.$$

Записываем выражение для свободной составляющей:

$$i_{\text{св}} = 5\sqrt{2}e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}t) \text{ А.}$$

Запишем выражение для искомого тока переходного процесса:

$$i = i_{\text{нр}} + i_{\text{св}} = 10 \sin(10^3 t + 45^0) - 5\sqrt{2}e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}t) \text{ А.}$$

## 2. РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА

Расчет переходных процессов следует производить для нормированных величин. Исключением могут быть цепи с источниками постоянных или экспоненциальных воздействий при наличии только одного реактивного элемента.

Для расчета переходных процессов в цепях с источниками постоянных и экспоненциальных воздействий при нулевых начальных условиях целесообразно использовать полные операторские схемы замещения. Порядок расчета при этом в общем случае будет следующим.

1. Рассчитать установившийся режим в цепи до коммутации и определить независимые начальные условия.

2. Составить полную операторную схему замещения цепи в режиме после коммутации с учетом независимых начальных условий.

3. Любым известным методом расчета установившегося режима цепи определить операторные изображения искомых величин.

4. Найти полюсы полученных изображений искомых функций.

5. Перейти от изображений искомых функций к их оригиналам, используя в зависимости от вида полюсов нужный вид формулы разложения.

6. Перейти от нормированных значений искомых величин к действительным.

Следует отметить, то при расчете простейших цепей для перехода от изображений искомых функций к их оригиналам очень удобно использовать таблицы соответствий изображений и оригиналов.

Для упрощения расчета переходных процессов в цепях гармонического тока с нулевыми начальными условиями часто используют принятое в классическом методе определение искомой переходной величины как регулятора наложения составляющих установившегося и свободного режимов:

$$i(t) = i_y(t) + i_{св}(t);$$

$$u(t) = u_y(t) + u_{св}(t).$$

Установившиеся составляющие  $i_y(t)$ ,  $u_y(t)$  рассчитываются методом комплексных амплитуд в установившемся режиме цепи после коммутации. Свободные составляющие удобно рассчитывать операторным методом с использованием операторной схемы замещения для свободного режима цепи. При этом изображение свободных составляющих искомых токов и напряжений будут иметь значительно более простой вид, чем изображение величин в целом. Соответственно, и облегчается нахождение оригиналов по изображению. Порядок расчета переходных процессов будет следующим.

1. Рассчитать установившийся режим в цепи до коммутации с целью определения независимых начальных условий – токов во всех индуктивных элементах  $i_{L_H}(0)$  и напряжений на емкостных элементах  $u_{C_H}(0)$ . Расчет выполнить методом комплексных амплитуд.

2. Рассчитать установившийся режим в цепи после коммутации: определить установившиеся значения искомых токов и напряжений, а также значения установившихся значений составляющих токов во всех индуктивных элементах и напряжений на всех емкостных элементах в момент времени  $t = 0$ ;  $i_{L_{\gamma H}}(0)$ ;  $u_{C_{\gamma H}}(0)$ . Расчет выполнить методом комплексных амплитуд.

3. Определить начальное значение свободных составляющих токов во всех индуктивных элементах и напряжений на всех емкостных элементах:

$$i_{L_{свH}}(0) = i_{L_H}(0) - i_{L_{\gamma H}}(0);$$

$$u_{C_{свH}}(0) = u_{C_H}(0) - u_{C_{\gamma H}}(0).$$

4. Составить операторную схему замещения свободной цепи с учетом начальных условий, определенных в п. 3.

5. Найти изображения свободных составляющих искомых величин.

6. Определить полюсы полученных значений.

7. Перейти от изображений свободных составляющих искомых функций к их оригиналам, используя в зависимости от вида полюсов нужный вид формулы разложения.

8. По принципу суперпозиции найти значения искомых переходных токов и напряжений:

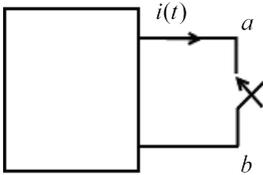
$$i_{\text{н}}(t) = i_{\text{yh}}(t) - i_{\text{свн}}(t);$$

$$u_{\text{н}}(t) = u_{\text{yh}}(t) - u_{\text{свн}}(t).$$

9. Перейти от нормированных значений полученных величин к действительным.

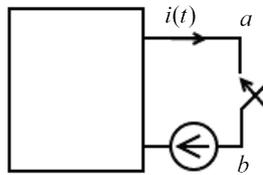
Если требуется определить ток  $i(t)$  только в ветви с коммутирующим устройством, то для расчета удобно использовать метод эквивалентного источника (рисунок 44). Операторная схема замещения представляется двумя элементами (рисунок 45): операторным изображением эквивалентного источника ЭДС, напряжение которого равно на разомкнутых клеммах ключа, и эквивалентного операторного сопротивления, равного входящему операторному сопротивлению цепи относительно разомкнутых клемм ключа. Искомый ток находится как оригинал операторного изображения:

$$I(p) = \frac{E_{\text{э}}(p)}{Z_{\text{э}}(p)} = \frac{U_{\text{хав}}(p)}{Z_{\text{вхав}}(p)}.$$



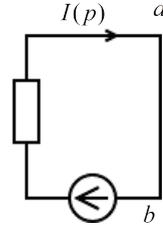
$$e_{\text{э}}(t) = u_{\text{хав}}(t)$$

Рисунок 44



$$E_{\text{э}}(p) = u_{\text{хав}}(p)$$

Рисунок 45



Подобный прием используется для сведения расчета переходного процесса в цепи при нулевых начальных условиях к расчету переходного процесса в цепи с нулевыми начальными условиями. При этом переходной ток (аналогично напряжению) в какой-либо ветви заданного активного двухполюсника при включении ключа  $K$  можно определить как суперпозицию двух токов: тока в этой ветви в режиме до коммутации и тока, возникающего в этой ветви вследствие подключения пассивного двухполюсника к источнику ЭДС с  $e_{\text{э}}(t) = u_{\text{хав}}(t)$ .

### 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

При изучении электрического поля постоянного тока в проводящей среде используются следующие основные положения теории электрического поля.

1. Закон Ома в дифференциальной форме:

$$J = \sigma E,$$

где  $\sigma$  – удельная электропроводимость;

$E$  – напряженность электрического поля.

2. Закон Кирхгофа в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} j = 0.$$

3. Первое уравнение Максвелла, которое устанавливает связь между напряженностью магнитного поля  $H$  и плотностью тока, для стационарного поля имеет вид

$$\operatorname{rot} H = j.$$

4. Для облегчения решения задач используется потенциальная функция, определяемая уравнением

$$E = -\operatorname{grad}\varphi.$$

5. Если значение  $E$  из последнего выражения подставить во второе выражение и использовать уравнения векторной алгебры, то, считая электропроводимость независимой от координат ( $\operatorname{grad} \delta = 0$ ), получим основное уравнение поля – уравнение Лапласа, которое в декартовой системе координат имеет вид

$$\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

6. Постоянные коэффициенты в решении уравнения Лапласа должны быть такими, чтобы выражения для потенциала удовлетворяли начальным и граничным условиям. Начальным условием является то, что потенциал в бесконечно удаленных точках должен обращаться в нуль и стремиться к потенциалу источника при приближении к нему. Граничным условиям соответствует непрерывность потенциала и непрерывность нормальной состав-

ляющей плотности тока при переходе через границу раздела сред с разной электропроводностью:

$$\varphi_1 = \varphi_2; \delta_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n},$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – значения потенциальной функции в точках первой и второй среды на поверхности раздела;

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$  – значения производных по нормали к этой границе.

7. На поверхности земли отсутствует нормальная составляющая плотности тока, так как из земли в воздух электрический ток течь не может. Если представить себе, что все верхнее полупространство занято не воздухом, а такой же проводящей средой, какая находится в нижнем полупространстве, а распределение проводящего материала и границ неоднородностей симметрично относительно земной поверхности, то и распределение тока обоих полупространствах будет симметричным. Заменяя реальный разрез полным пространством с симметричным строением, можно не учитывать граничные условия на поверхности, которые выполняются автоматически. Необходимо лишь иметь в виду, что для создания полей той же интенсивности в случае полного пространства сила питающего тока должна быть в два раза больше, чем для источника, расположенного на поверхности земли.

8. Существует расчетная аналогия электрических полей в диэлектрической и проводящей средах. Соотношения для обоих полей математически аналогичны, и одни могут быть получены из других. Электрическое поле в диэлектрической среде

$$\bar{U} = \int E d\bar{l}; \int \bar{E} d\bar{l} = 0; D = \varepsilon \bar{E}; Q = \int D dS; C = \frac{Q}{U}.$$

Электрическое поле в проводящей среде

$$\bar{U} = \int E d\bar{l}; \int \bar{E} d\bar{l} = 0; \bar{j} = \delta \bar{E}; I = \int j dS; G = \frac{I}{U}.$$

Следовательно, решения ряда задач для одного вида поля могут быть использованы для получения готовых решений аналогичных задач для другого вида поля. Следует помнить, что указанная аналогия является формальной, расчетной и не отражает различия в физических процессах.

**Задача 1.** Определить поле точечного, полусферического и стержневого заземлителей, расположенных в однородной, безграничной и изотропной среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho = \frac{1}{\delta}$ . С этих заземлителей стекает ток силой  $I$ .

**Решение.**

Вследствие шаровой симметрии в среде, окружающей источник, токовые линии будут направлены радиально от него, а эквипотенциальные поверхности представляют собой сферы (рисунок 46).

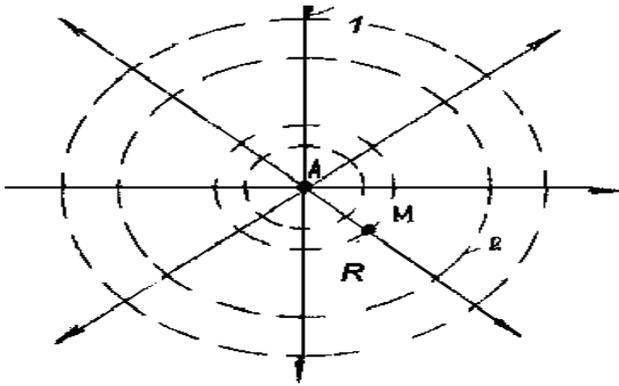


Рисунок 46 – Поле точечного источника, расположенного в однородном пространстве: 1 – токовые линии; 2 – эквипотенциальные линии

Плотность тока в любой точке  $M$ , удаленной от источника на расстояние  $R$ :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{4\pi R^2},$$

где  $S$  – площадь сечения, через которую проходит весь ток, равная площади поверхности сферы. Используя закон Ома и формулу потенциала, получим

$$j = \frac{1}{\rho} \cdot E = \frac{1}{\rho \cdot grad\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial R}.$$

Далее из этого выражения получим

$$d\varphi = -\frac{I \cdot \rho}{4\pi} \cdot \frac{dR}{R^2}.$$

Потенциал в точке  $M$  равен интегралу по  $R$  от  $\infty$  до данной точки:

$$\varphi_M = -\int_{-\infty}^R \frac{I \cdot \rho}{4\pi} \cdot \frac{dR}{R} = \frac{I \cdot \rho}{4\pi R}.$$

Если точечный источник расположен на поверхности земли, то весь ток будет растекаться в полупространство, поэтому

$$j = \frac{I}{2\pi R^2};$$

$$\varphi = \frac{I \cdot \rho}{2\pi R}.$$

Предположим, что полусферический электрод радиусом  $a$  погружен в землю до своей диаметральной плоскости. Землю считаем однородной, изотропной и заполняющей все полупространство под плоскостью раздела. Верхнее полупространство (воздух) является непроводником для электрического тока. Как и для точечного источника, поле будет обладать шаровой симметрией. Поэтому

$$j = \frac{I}{2\pi R^2}.$$

Потенциал в любой точке  $M'$ , в том числе и на поверхности земли в точке  $M$ :

$$\varphi_M = \frac{I \cdot \rho}{2\pi R}.$$

В частности, на поверхности электрода

$$\varphi_A = \frac{I \cdot \rho}{2\pi d}.$$

Отсюда

$$\frac{\varphi_A}{I} = \frac{\rho}{2\pi d}.$$

Это отношение разности потенциалов между поверхностью электрода и бесконечно удаленными точками к силе тока, про-

текающего через всю среду, является сопротивлением нагрузки для источника, то есть сопротивлением, оказываемым средой стекающему току:

$$R = \frac{\rho}{2\pi d},$$

где  $R$  – сопротивление заземления или переходное сопротивление электрода.

Рассмотрим стержневой электрод, с которого равномерно во все стороны стекает электрический ток  $I$ . Будем считать, что падение напряжения на электроде не происходит и его поверхность эквипотенциальна.

Потенциал от элемента линейного источника (рисунок 47):

$$d\varphi = \frac{dI \cdot \rho}{2x \cdot \sqrt{x^2 + (z - \varepsilon)^2}}.$$

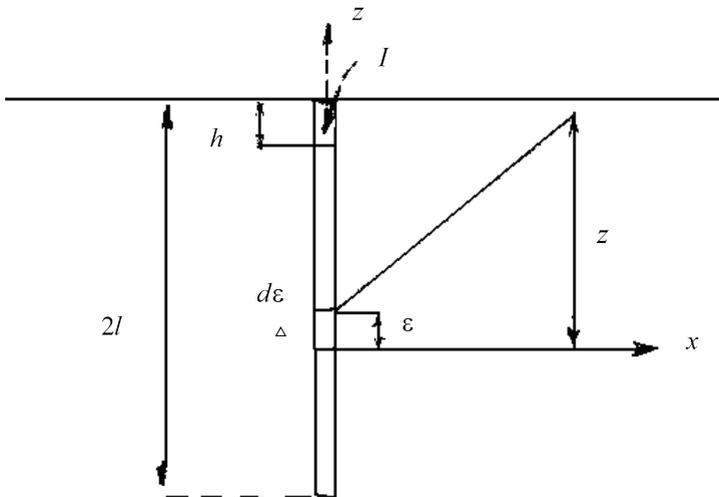


Рисунок 47

А так как электрод линейный, то

$$dI = \frac{I}{2l} d\varepsilon.$$

Тогда потенциал от элемента такого источника

$$d\varphi = \frac{\rho \cdot I \cdot d\varepsilon}{2\pi \cdot 2l \cdot \sqrt{x^2 + (z - \varepsilon)^2}},$$

где  $X$  и  $Z$  – координаты точки наблюдения относительно центра линейного источника;  $\varepsilon$  – координата элемента линейного источника;  $2l$  – длина линейного источника.

Потенциал от этого линейного источника

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot l} \cdot \frac{d\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (z - \varepsilon)^2}} = \\ &= \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot l} \cdot \ln \left[ z - \varepsilon + \sqrt{x^2 + (z - \varepsilon)^2} \right] = \\ &= \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot l} \cdot \ln \left[ \frac{z + l \cdot \sqrt{x^2 + (z + l)^2}}{z - l \cdot \sqrt{x^2 + (z - l)^2}} \right] = \\ &= \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot l} \cdot \ln \left[ \frac{2 \cdot l + h + \sqrt{x^2 + (2 \cdot l + h)^2}}{h + \sqrt{x^2 + h^2}} \right]. \end{aligned}$$

Частный случай для стержневого электрода. Сопротивление растеканию тока (рисунок 48) можно определить следующим образом:

$$\varphi = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot b} \cdot \ln \left( \frac{2 \cdot b + \sqrt{a^2 + 4 \cdot b^2}}{\alpha} \right),$$

если  $b \gg a$

$$R_3 = \frac{\varphi}{I} = \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot b} \cdot \ln \left( \frac{4 \cdot b}{a} \right).$$

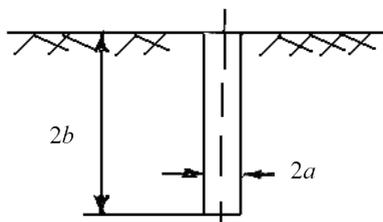


Рисунок 48

Из полученного выражения следует, что если глубина погружения электродов в 5–10 раз меньше расстояний, на которых изучается поле, то поле стержневого электрода можно считать как поле точечного источника.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Нейман Л.Р., Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов : в 2-х т. – Л. : Энергоиздат, 1985.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник. – М. : Гардарики, 2000.
3. Цапенко Е.Ф. Теоретические основы электротехники : учеб. пособие. – М. : МГГУ, 1995.
4. Задание по теоретическим основам электротехники / под ред. К.М. Поливалова. – М. : Энергия, 1972.

*Учебное издание*

**Дудченко Олег Львович**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ  
КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»**

**для студентов направлений 23.05.01 «Наземные  
транспортно-технические средства» и 13.03.02 «Энергетика  
и электротехника»**

Редактор *Е.Н. Леонова*

Компьютерная верстка *А.М. Маркин*

---

Подписано в печать 20.02.20      Уч.-изд. л. 3,94

Формат 60 × 90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>                      Электронная версия

---

Национальный исследовательский  
технологический университет «МИСиС»,  
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом НИТУ «МИСиС»,  
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4  
Тел. 8 (495) 638-44-06

Отпечатано в типографии  
Издательского Дома НИТУ «МИСиС»,  
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4  
Тел. 8 (495) 638-44-16, 8 (495) 638-44-43