Задача линейного программирования

В последнее время математические методы широко используются в таких вопросах, как планирование народного хозяйства, организация управления промышленностью, планирование военных операций и т. п. С общей точки зрения, задачи управления и планирования обычно сводятся к выбору некоторой системы числовых параметров или функций (***характеристики плана***), обеспечивающих наиболее эффективное достижение поставленной цели (***оптимальный план***), с учётом ограниченности возможных ресурсов. Для оценки эффективности плана вводится так называемая ***целевая функция*** (т.е. ***показатель качества плана***), выраженная через характеристики плана и принимающая экстремальное значение (т.е. наименьшее или наибольшее значение) для оптимального плана.

Для большего количества практически интересных задач целевая функция выражается ***линейно*** через характеристики плана, причём допустимые значения параметров подчинены так же линейным равенством или неравенствам. Нахождение при данных условиях ***абсолютного экстремума целевой функции*** носит название ***линейного программирования*** (более удачным был бы термин « ***линейное планирование***»).

Математическая задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти экстремум линейной функции при линейных же ограничениях на переменные.

Математическая модель задачи линейного программирования имеет вид:

L=f(x) =$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ → ***max(min) – целевая функция***

$$L=f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

При условии $X_i \geq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nm} \leq b_m \end{cases}$$

Определение1.   Множество значений переменных Ω, удовлетворяющих всем линейным ограничением задачи, называется ***областью допустимых значений*** задачи линейного программирования.

Допустимая область Ω является областью определения функции L. Допустимая область задачи линейного программирования представляет собой выпуклый многогранник (при n=2 – многоугольник). ***Вершины*** этого многогранника называются ***угловыми точками***.

Теорема1. Задача линейного программирования имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда целевая функция ограничена на допустимом множестве в направлении экстремума.

Определение2. Набор значений x_1; x_2; …. X_n из допустимой области Ω, при которых целевая функция $L=f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ принимает, по смыслу задачи , или наибольшее, или наименьшее значение, называется ***решением*** задачи линейного программирования(или оптимальным планом).

Теорема2. Линейная целевая функция может достигать своего абсолютного экстремума лишь в ***угловых точках допустимой области***.

Самый распространенный алгоритм решения задачи линейного программирования – это так называемый ***симплекс – метод***. Заметим, что угловых точек конечное число. Симплекс – метод представляет собой направленный перебор угловых точек допустимой области.

Мы рассмотрим решение задачи линейного программирования с двумя переменными **графическим методом**.

Пример. Решить задачу линейного программирования:

$f(x)=3x_1+2x_2 \rightarrow max.$

При условии $X_1\geq 0$; $X_2\geq 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2; & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6; & (2) \\ x_2 \leq 3. & (3) \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2.

Построим прямые, соответствующие ограничениям:

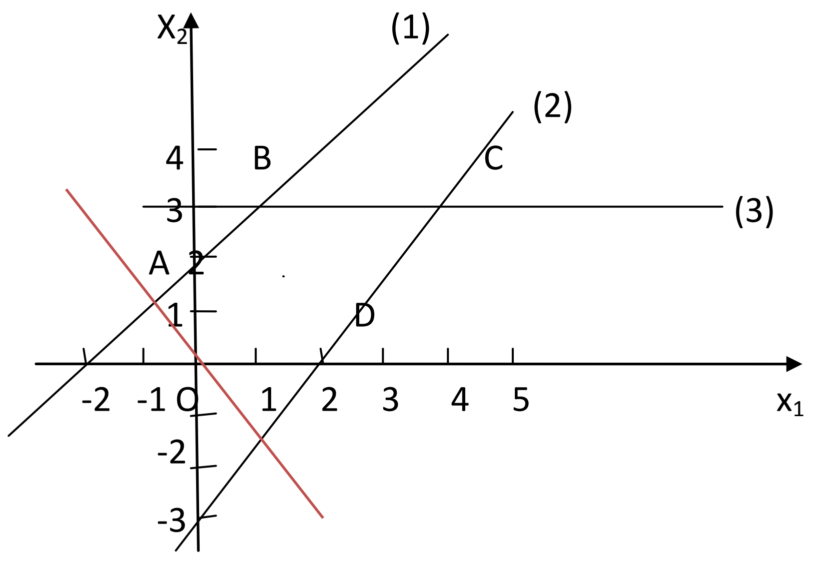
1) $x_1 - x_2 = -2$; 2) $3x_1 - 2x_2 = 6$; 3) $x_2 = 3$.

1) Выразим переменную $x_2 = x_1 + 2$. Для построения прямой достаточно найти координаты двух точек. При $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; при $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. Отметим эти точки (0;2) и (2;4) в прямоугольной системе координат и проведём через них прямую. Чтобы выбрать нужную полуплоскость, надо подставить в неравенство (1) координаты какой-нибудь точки, не лежащей на прямой. Например, точки M(1;1): получим $1 - 1 > -2$. Получаем верное неравенство. Следовательно, точка M лежит в полуплоскости решений.

2) Аналогично строим прямую $3x_1 - 2x_2 = 6$. Выразим $x_2 = \frac{3x_1 - 6}{2}$. Найдём координаты двух точек, например6 (0; - 3) и (2; 0). Проведём через них прямую и определим полуплоскость удовлетворяющую неравенству (2).

3) Прямая $x_2 = 3$ – это прямая параллельная оси Ox_1, проходящая через $x_2 = 3$.

Учитываем ещё условия неотрицательности $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.



Пересечение всех пяти полуплоскостей даёт искомую допустимую область Ω: пятиугольник OABCD.

Строим линию уровня $L = 3x_1 + 2x_2$ (уравнение целевой функции). При L = 0 , имеем $3x_1 + 2x_2 = 0$. Выразим $x_2 = -\frac{3}{2}x_1$, найдём точки (0;0) и (2; -3). Проведём через эти точки прямую. Перемещаем линию уровня в направлении нормали (можно просто параллельно самой себе). Последняя точка, по которой линия уровня ещё пересекает допустимую область, и будет точкой максимума. В нашем случае это точка C. Её координаты найдём, решая совместно уравнения прямых, которые пересекаются в точке C:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0; \\ x_2 - 3 = 0; \end{cases}$$

Получаем x_1=4; x_2=3. Подставим эти значение в формулу целевой функции, получим L_{max}= 3·4 + 2·3 = 12 + 6 = 18. Ответ. L_{max} =18.

Задания для самостоятельной работы

Решить задачу линейного программирования:

$f(x)=x_1+2x_2+6 \rightarrow$ *max.*

При условии $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \geq 0; \quad (1) \\ x_1 - x_2 - 5 \geq 0; \quad (2) \\ x_2 \leq 7. \qquad\qquad (3) \end{cases}$$

Ответ . . L_{max} =32.