

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Часть I

*Методические указания и контрольные задания*

Пенза 2002

УДК 531.3 (075)

И85

Методические указания предназначены для студентов специальности 180200 «Электрические и электронные аппараты» и других специальностей очного и заочного обучения и содержат контрольные задания для самостоятельной работы студентов по темам «Растяжение и сжатие», «Статически неопределимые системы», «Геометрические характеристики плоских сечений», «Кручение», «Изгиб». По каждой из указанных схем приведены основные теоретические положения и пример выполнения задания.

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая механика и технология» ПГУ с учетом содержания Государственного образовательного стандарта направления 654500 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», рабочих программ дисциплин «Прикладная механика» и «Механика».

Ил. 10, табл.3, библиогр. 4 назв.

Составитель – Т. В. Хураева

Общая редакция – В.В. Смогунов.

Рецензент – Синякова Э. Н., кандидат технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Техническая механика» Пензенского артиллерийского инженерного института.

## 1. Растяжение и сжатие

### 1.1. Общие сведения

Растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила. Продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону сечения (имеется в виду, что все силы направлены вдоль оси бруса).

Растягивающие (направленные от сечения) продольные силы считаются положительными, а сжимающие (направленные к сечению) – отрицательными.

При растяжении и сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению и вычисляемые по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F},$$

где  $N$  – продольная сила;  $F$  – площадь поперечного сечения.

Для наглядного изображения распределения вдоль оси бруса продольных сил и нормальных напряжений строят графики, называемые эпюрами.

Деформацией при растяжении участка бруса является его удлинение.

Абсолютное удлинение или укорочение прямо пропорционально продольной силе, длине участка бруса и обратно пропорционально жесткости сечения бруса

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EF},$$

где  $EF$  – жесткость сечения.

Коэффициент  $E$  характеризует жесткость материала, т. е. его способность сопротивляться упругим деформациям растяжения или сжатия и называется модулем упругости первого рода; для стали  $E = (1,96 \dots 2,16) \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

Пример. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине ступенчатого бруса (рис. 1). Материал бруса – сталь Ст.3;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $P = 60 \text{ кН}$ ;  $F_1 = 5 \text{ см}^2$ ;  $F_2 = 12 \text{ см}^2$ ;  $a = 1 \text{ м}$ .

Решение. Разбиваем брус на участки 1( $AB$ ), 2( $BC$ ) и 3( $CD$ ). Применяя метод сечений, рассматриваем равновесие левой части, отбрасывая при этом отсеченную правую часть

Для участка 1  $N_1 = P = 60 \text{ кН}$ ;

Для участка 2  $N_2 = P = 60 \text{ кН}$ ;

Для участка 3  $N_3 = P + 2P = 3P = 180 \text{ кН}$ .

Эпюра, показывающая, как меняется  $N$  по длине бруса, изображена на рис. 1

Для построения эпюры нормальных напряжений, находим напряжения на каждом участке:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{60 \cdot 10^3}{500} = 120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{60 \cdot 10^3}{1200} = 50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_2} = \frac{180 \cdot 10^3}{1200} = 150 \text{ МПа}.$$

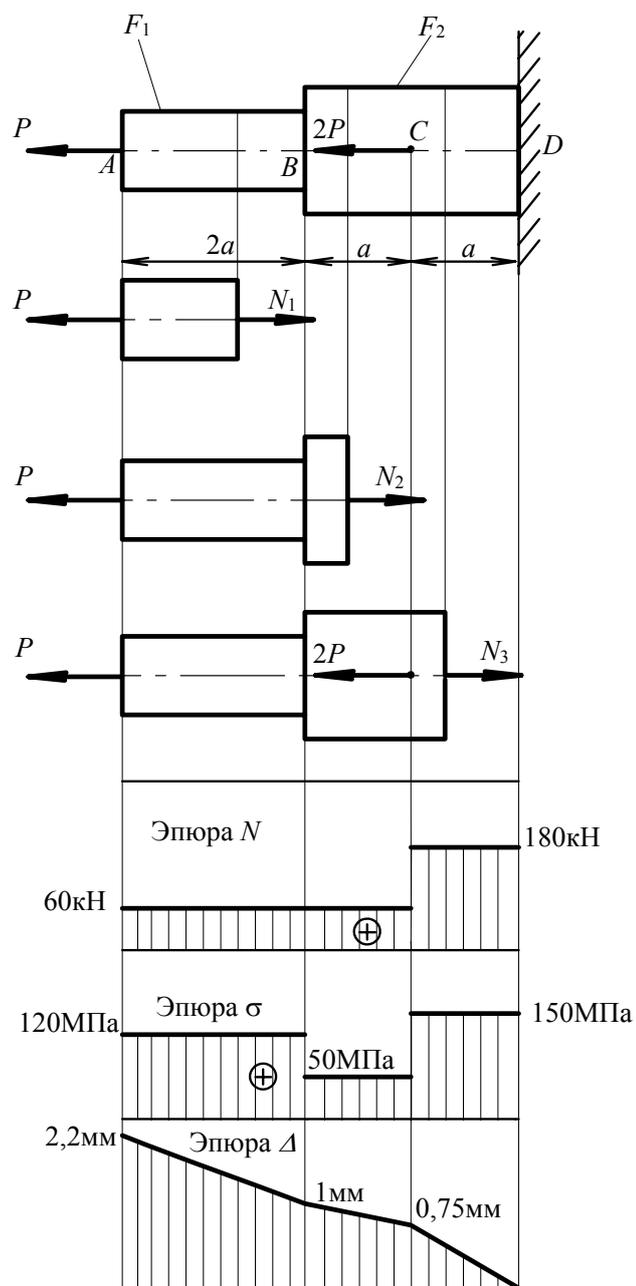


Рис.1

Эпюру перемещений строим, начиная от зашечленного конца  $D$ . Перемещение поперечного сечения, где проложена сила  $2P$  (точка  $C$ ), равно удлинению участка  $CD$ .

$$\Delta_C = \frac{N_3 \cdot a}{EF_2} = \frac{180 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1200} = 0,75 \text{ мм.}$$

Перемещение сечения  $B$  относительно сечения  $C$  равно удлинению участка  $BC$ .

$$\Delta_{BC} = \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot F_2} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1200} = 0,25 \text{ мм.}$$

Абсолютное перемещение сечения  $B$ :

$$\Delta_B = \Delta_C + \Delta_{BC} = 0,75 + 0,25 = 1,0 \text{ мм.}$$

Перемещение сечения  $A$  относительно  $B$ , равное удлинению участка  $AB$ :

$$\Delta_{AB} = \frac{N_1 \cdot 2a}{E \cdot F_2} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 500} = 1,2 \text{ мм.}$$

Абсолютное перемещение сечения  $A$ :

$$\Delta_A = \Delta_B + \Delta_{AB} = 1,0 + 1,2 = 2,2 \text{ мм.}$$

Построенная по полученным данным эпюра перемещений показана на рис. 1.

Задание 1. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине ступенчатого бруса по данным одной из схем, приведенных на рис. 2.

Исходные данные:  $P = 50 \text{ кН}$ ;  $F = 5 \text{ см}^2$ ;  $l = 1 \text{ м}$ .

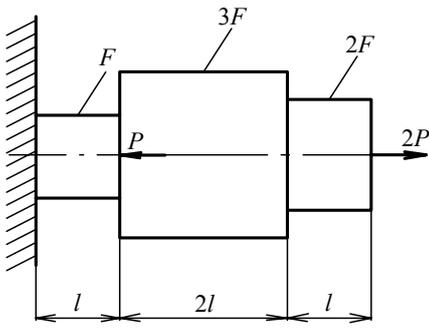


Схема 1

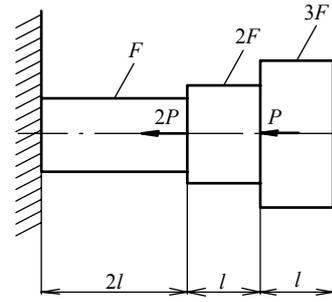


Схема 2

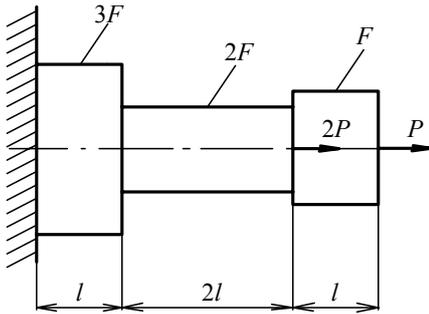


Схема 3

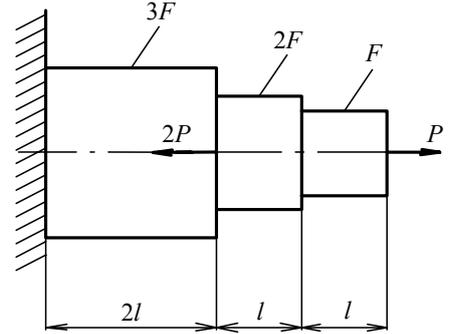


Схема 4

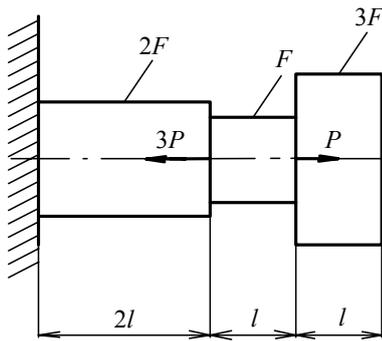


Схема 5

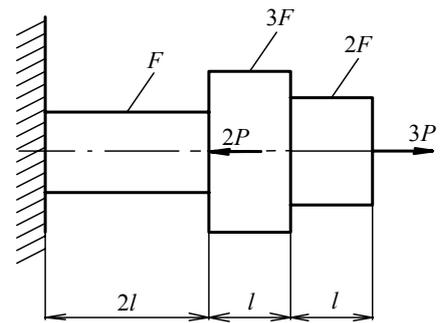


Схема 6

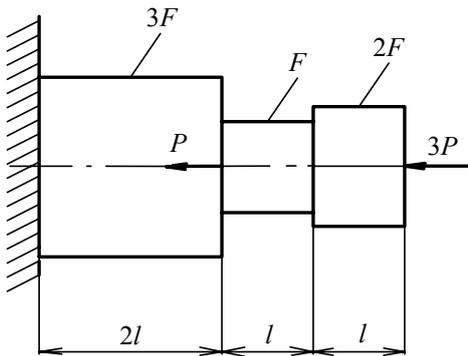


Схема 7

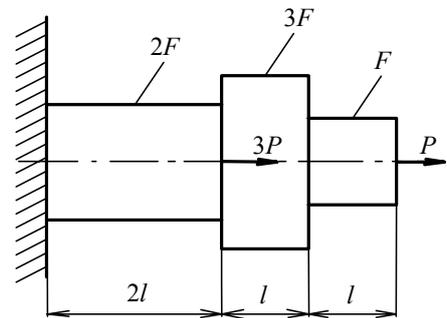


Схема 8

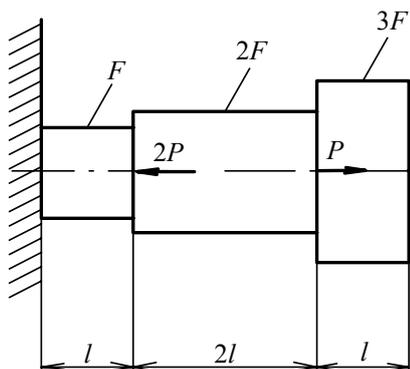


Схема 9

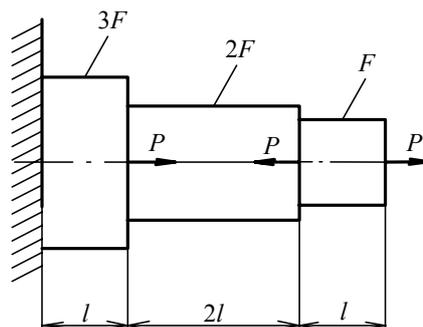


Схема 10

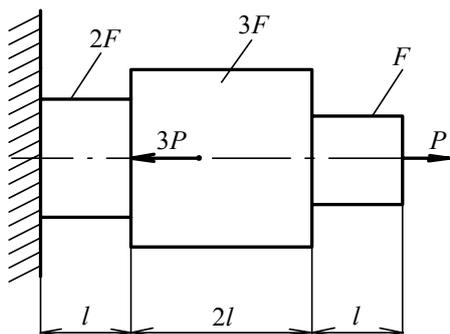


Схема 11

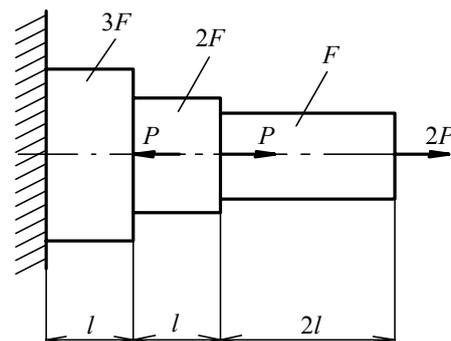


Схема 12

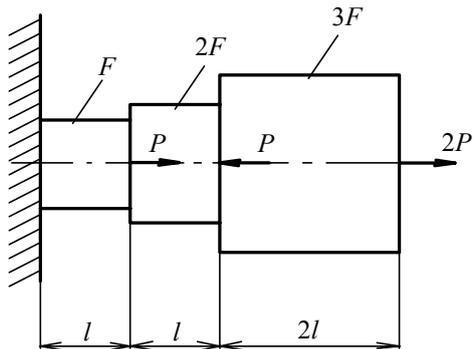


Схема 13

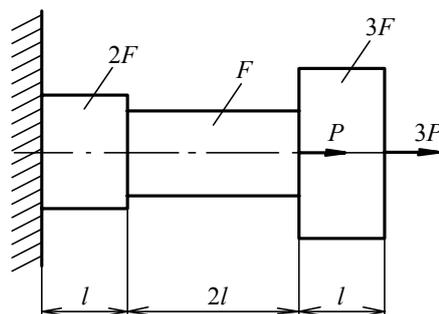


Схема 14

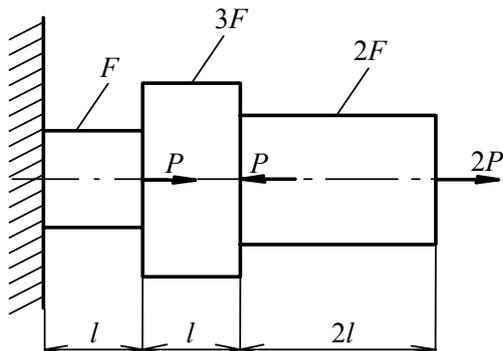


Схема 15

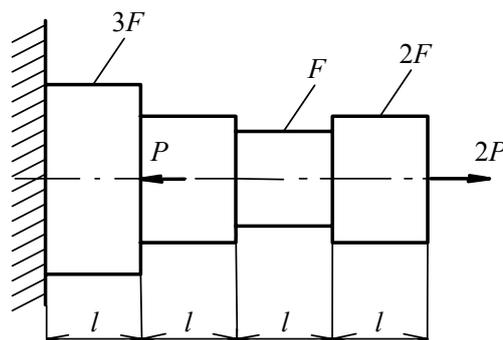


Схема 16

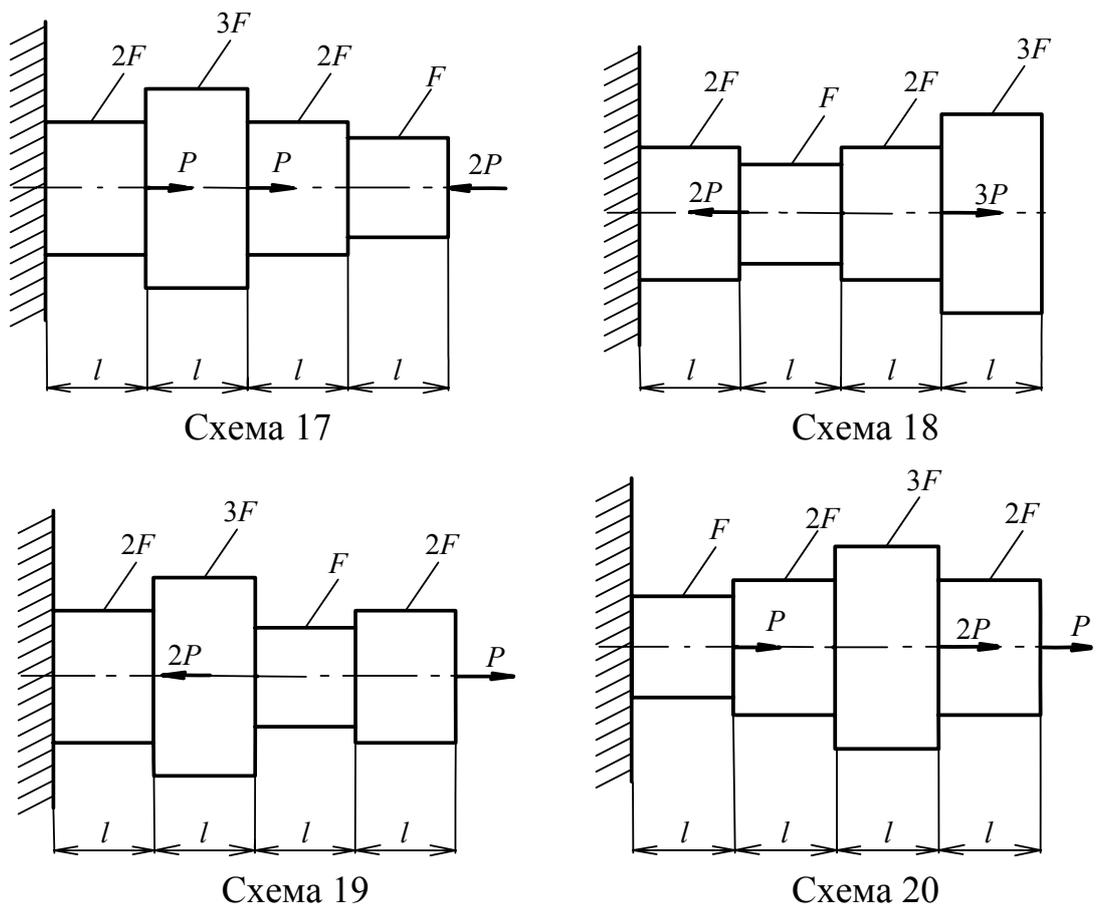


Рис. 2

## 1.2. Статически неопределимые задачи

Задачи на расчет конструкций, в элементах которых внутренние силовые факторы не могут быть определены при помощи одних уравнений равновесия статики, называются статически неопределимыми. При решении таких задач помимо уравнений равновесия сил составляются уравнения перемещений. Для этого вычерчивают деформированную схему системы, из которой и устанавливают нужные зависимости. Полученная зависимость между деформациями называется уравнением совместности деформаций системы и представляет собой геометрическую сторону

задачи. Деформация стержня возникает от нагрузки, изменения температуры стержня или неточности его изготовления.

Температурное удлинение (укорочение) стержня

$$\Delta l = \alpha \cdot t \cdot l,$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала стержня.

Пример. Жесткая балка (рис.3) силой тяжести 40 кН шарнирно укреплена в стене в точке  $A$  и расположена горизонтально при помощи двух стальных стержней 1 ( $BC$ ) и 2 ( $DE$ ) равной длины  $l$ .

На балку действуют сосредоточенная сила  $P=20$ кН. Площади поперечных сечений стержней равны соответственно  $F$  и  $2F$  ( $F=2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>).

Определить усилия в стержнях, а также возникающие в них напряжения.

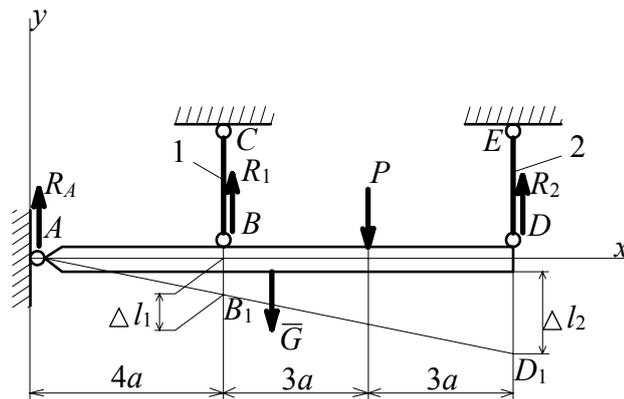


Рис. 3

Решение. Применяя к балке принцип освобождаемости от связей, получаем три неизвестных: реакцию  $R_A$  шарнира  $A$  и реакции  $R_1$  и  $R_2$  стержней.

Для полученной плоской уравновешенной системы сил можно составить два уравнения равновесия: уравнение проекций сил на ось  $y$  и уравнение моментов сил относительно какой-либо точки.

Для решения задачи необходимо составить третье, дополнительное уравнение деформации элементов системы. Для этого представим систему в деформированном виде и непосредственно по схеме (см. рис.3) установим зависимость между деформациями стержней 1 и 2.

Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $ADD_1$  получим

$$\frac{\Delta l_1}{4a} = \frac{\Delta l_2}{10a}, \quad \Delta l_1 = 0,4\Delta l_2.$$

Поскольку реакцию  $R_A$  не требуется определять, то составим только одно уравнение равновесия – сумму моментов сил относительно точки  $A$ .

$$R_1 \cdot 4a - G \cdot 5a - P \cdot 7a + R_2 \cdot 10a = 0,$$

или

$$4R_1 + 10R_2 = 5G + 7P.$$

По закону Гука,

$$\Delta l_1 = \frac{R_1 \cdot l}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{R_2 \cdot l}{E \cdot 2F}.$$

Разделим первое равенство на второе

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2R_1}{R_2}.$$

Тогда

$$R_2 = 5R_1.$$

Находим реакции стержней:

$$4R_1 + 50R_1 = 5G + 7P;$$

$$54R_1 = 5 \cdot 40 + 7 \cdot 20;$$

$$54R_1 = 340;$$

$$R_1 = 6,3 \text{ кН};$$

$$R_2 = 31,5 \text{ кН}.$$

Вычисляем напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{F} = \frac{6,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 31,5 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_2 = \frac{R_2}{2F} = \frac{31,5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 78,8 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Задание 2. Определить усилия в стержнях жесткой балки и возникающие в них напряжения по данным одной из схем, приведенным на рис. 4 и в табл. 1.

Таблица 1

№ варианта	P, кН	Стержень 1		Стержень 2		Величина зазора $\Delta l$	Изменение температуры стержня $\Delta t$
		Длина	Площадь поперечного сечения	Длина	Площадь поперечного сечения		
1	20	$2l$	$3F$	$l$	$2F$	–	–
2	25	$l$	$F$	$3l$	$F$	–	–
3	30	$2l$	$2F$	$l$	$F$	–	–
4	35	$l$	$F$	$2l$	$2F$	–	–
5	40	$2l$	$F$	$l$	$2F$	–	–
6	35	$l$	$F$	$2l$	$F$	–	–
7	25	$3l$	$2F$	$l$	$F$	–	–
8	30	$2l$	$F$	$l$	$F$	–	–
9	35	$2l$	$2F$	$l$	$F$	–	–
10	40	$2l$	$2F$	$l$	$2F$	–	–
11	–	$l$	$F$	$3l$	$2F$	$0,0006l$	–
12	–	$l$	$F$	$2l$	$F$	$0,0008l$	–
13	–	$l$	$F$	$2l$	$3F$	$0,0005l$	–
14	–	$l$	$F$	$2l$	$2F$	$0,001l$	–

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
15	-	$l$	$F$	$2l$	$2F$	-	$+30^{\circ}\text{C}$
16	-	$2l$	$F$	$l$	$2F$	-	$-30^{\circ}\text{C}$
17	-	$3l$	$2F$	$l$	$F$	-	$+20^{\circ}\text{C}$
18	-	$l$	$F$	$1,5l$	$2F$	-	$-20^{\circ}\text{C}$
19	-	$l$	$F$	$2l$	$F$	-	$+25^{\circ}\text{C}$
20	-	$3l$	$F$	$l$	$F$	-	$-25^{\circ}\text{C}$

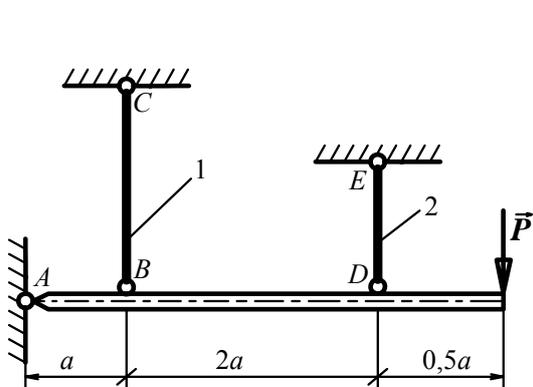


Схема 1

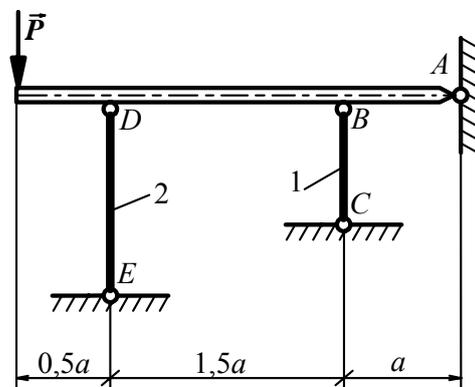


Схема 2

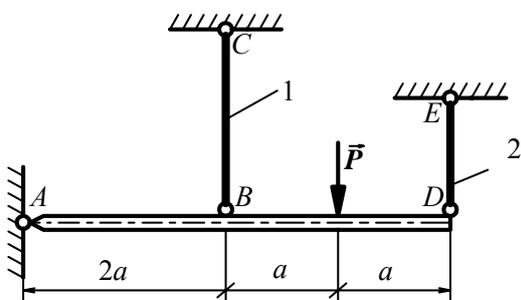


Схема 3

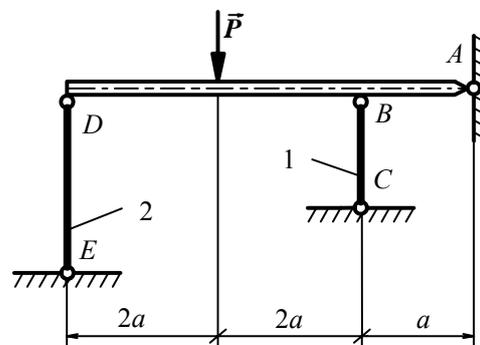


Схема 4

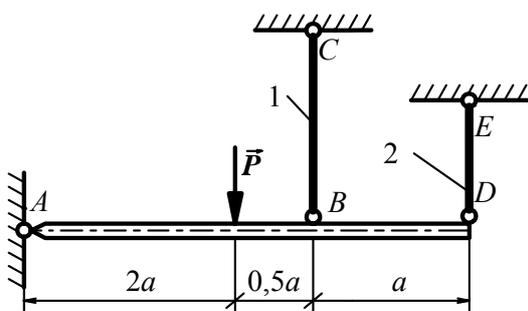


Схема 5

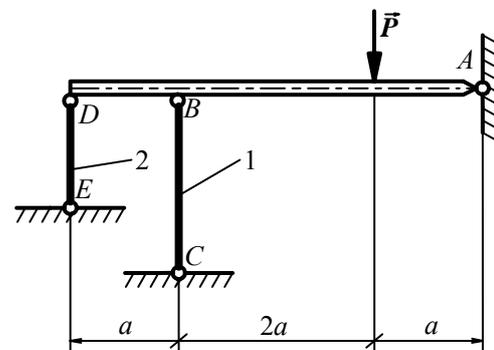


Схема 6

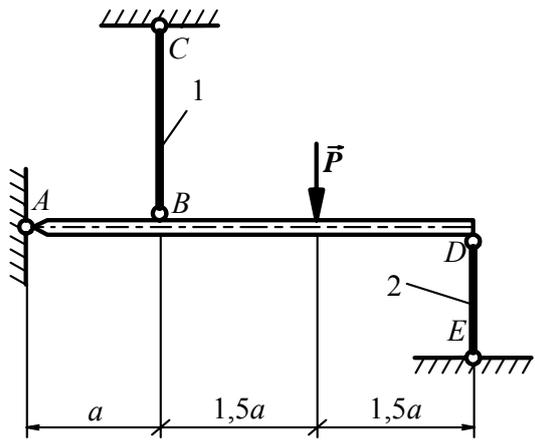


Схема 7

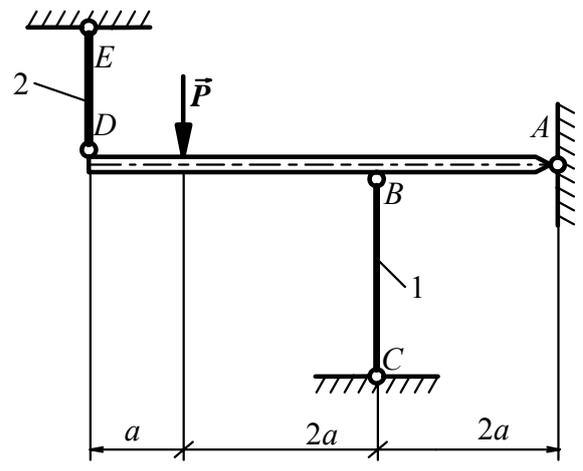


Схема 8

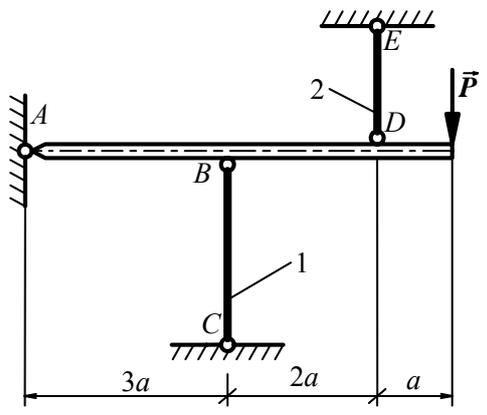


Схема 9

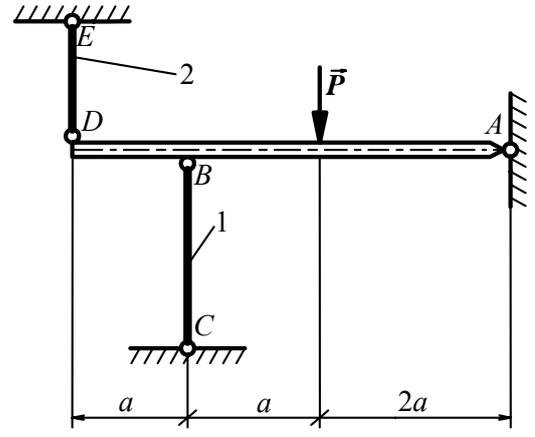


Схема 10

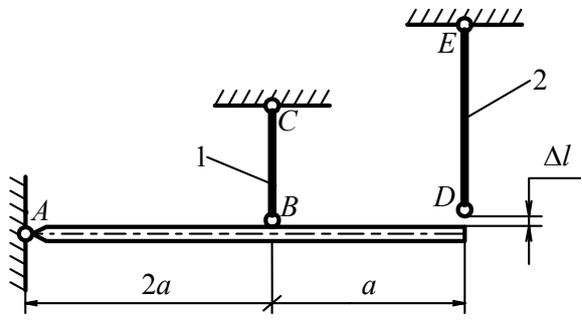


Схема 11

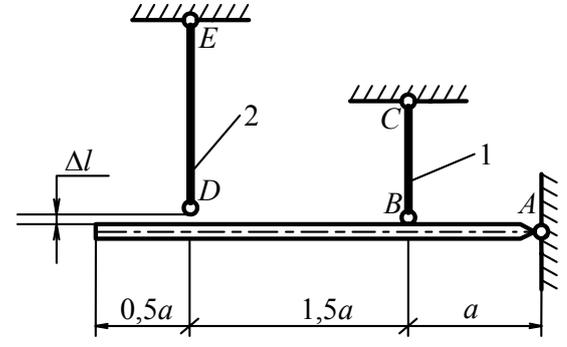
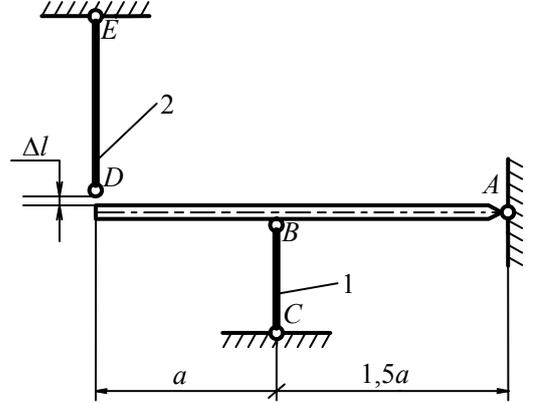
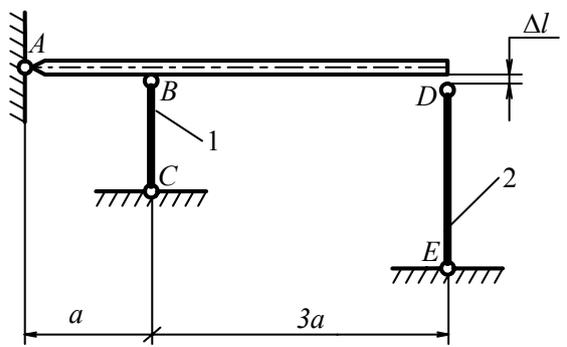


Схема 12



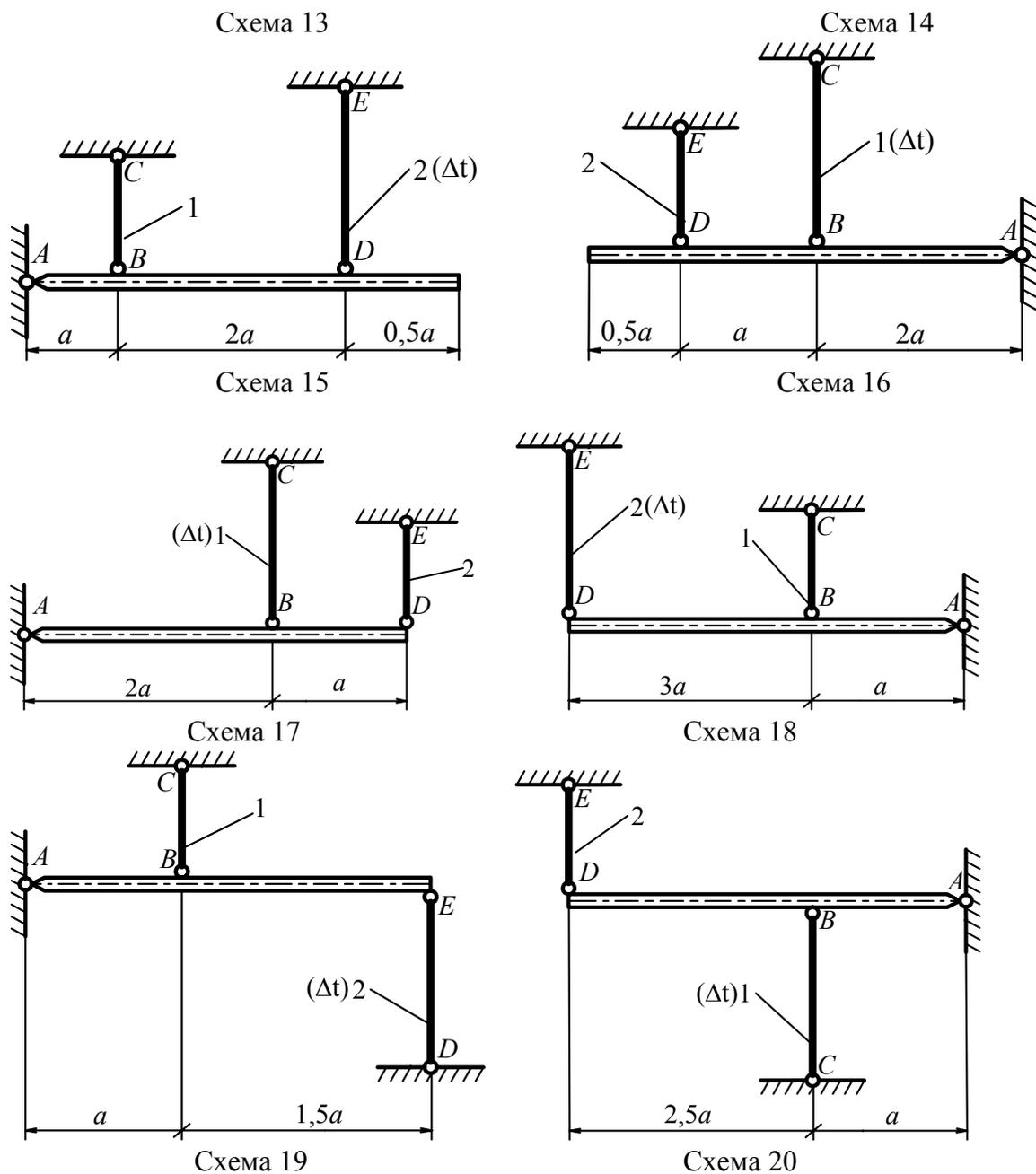


Рис. 4

## 2. Геометрические характеристики плоских сечений

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных участков на квадраты их расстояний до полюса  $O$ .

$$J_o = \int_F \rho^2 \cdot dF, \text{ м}^4.$$

Осевым моментом инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных участков на квадрат их расстояний до этой оси.

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dF, \quad J_y = \int_F x^2 \cdot dF, \text{ м}^4.$$

Осевые моменты некоторых простых фигур:

1. Прямоугольник  $b \times h$ :  $J_x = \frac{bh^3}{12}$ .

Для квадрата со стороной  $a$ :  $J_x = \frac{a^4}{12}$ .

2. Круг диаметром  $d$ :  $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$ .

3. Кольцо размером  $D \times d$ :  $J_x = J_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4)$

Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальные и минимальные значения, называются главными осями инерции.

Если главная ось инерции проходит через центр тяжести фигуры, то она называется главной центральной осью, а момент инерции относительно этой оси – главным центральным моментом инерции.

Пример. Определить моменты инерции сечения, составленного из простых геометрических фигур, относительно главных центральных осей (рис. 5).

Решение. Разобьем сечение на три части (два прямоугольника и полукруг). Введем обозначения сторон:

$$b_1=60 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad h_1=10 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b_2=25 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad h_2=10 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

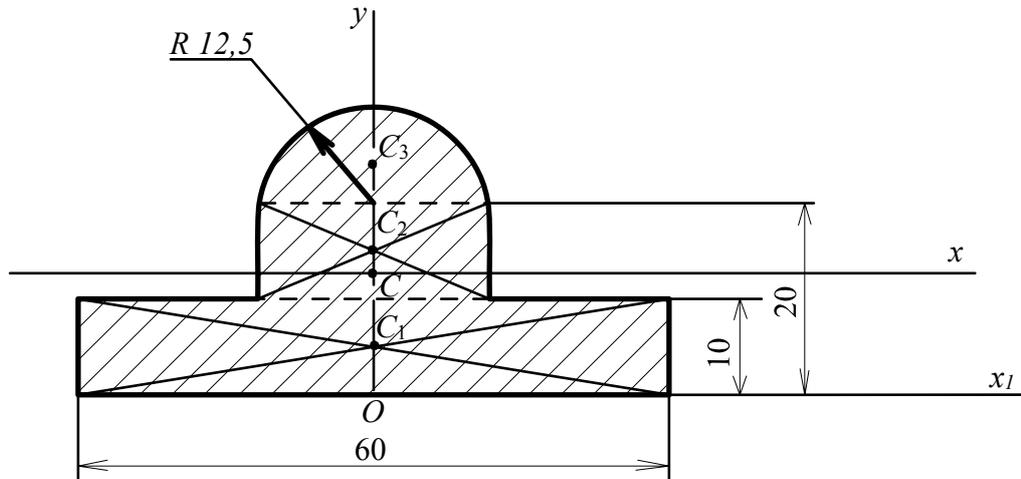


Рис. 5

Площади частей:

$$F_1 = b_1 \cdot h_1 = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$F_2 = b_2 \cdot h_2 = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$F_3 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 (12,5 \cdot 10^{-3})^2}{2} = 0,245 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Так как ось  $y$  является осью симметрии сечения, то центр тяжести сечения располагается на этой оси,  $x_C=0$ .

Ординату центра тяжести сечения вычисляем по формуле:

$$y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

где  $y_1=OC_1=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $y_2=OC_2=15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $y_3=OC_3=20+0,424R=25,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

$$y_C = \frac{(0,6 \cdot 5 + 0,25 \cdot 15 + 0,245 \cdot 25,3) \cdot 10^{-6}}{(0,6 + 0,25 + 0,245) \cdot 10^{-3}} = \frac{12,96 \cdot 10^{-6}}{1,095 \cdot 10^{-3}} = 11,825 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Применяя метод разбиения и формулы моментов инерции прямоугольников и полукруга относительно собственных центральных осей, а также теорему о моменте инерции относительно оси, параллельной центральной (теорему Гюйгенса- Штейнера), записываем:

$$J_x = \left( \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + F_1 \cdot d_1^2 \right) + \left( \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + F_2 \cdot d_2^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{\pi(2R)^4}{64} + F_3 \cdot d_3^2 \right),$$

где  $d_1=6,825 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_2=3,175 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_3=8,175 \cdot 10^{-3}$  м

Подставив значения и произведя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} J_x = & \left[ \frac{60 \cdot 10^{-3} \cdot (10 \cdot 10^{-3})^3}{12} + 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot (6,825 \cdot 10^{-3})^2 \right] + \\ & + \left[ \frac{25 \cdot 10^{-3} \cdot (10 \cdot 10^{-3})^3}{12} + 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot (3,175 \cdot 10^{-3})^2 \right] + \\ & + \left[ \frac{3,14 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^4}{128} + 0,245 \cdot 10^{-3} \cdot (8,175 \cdot 10^{-3})^2 \right] = 63,5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Моменты инерции  $J_y$  вычисляем как сумму моментов инерции прямоугольников и полукруга относительно центральной оси

$$\begin{aligned} J_y = & \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} + \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot (2R)^4}{64} = \\ = & \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot (60 \cdot 10^{-3})^3}{12} + \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot (25 \cdot 10^{-3})^3}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3,14 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^4}{64} = \\ = & 202,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Задание 3. Определить моменты инерции сечения, составленного из простых геометрических фигур, относительно главных центральных осей по данным одной из схем, приведенных на рис. 6.

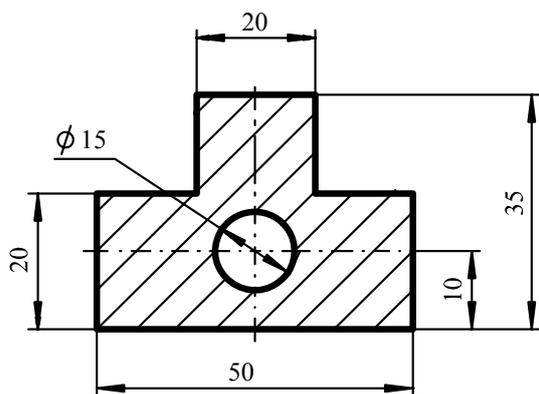


Схема 1

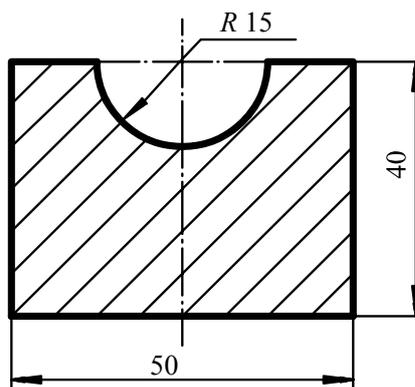


Схема 2

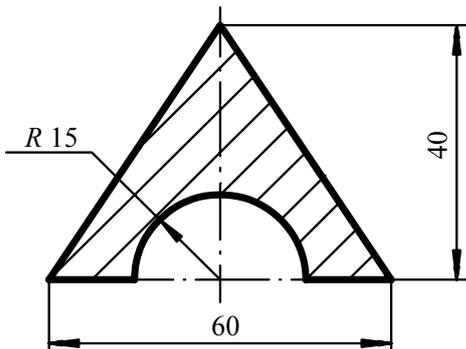


Схема 3

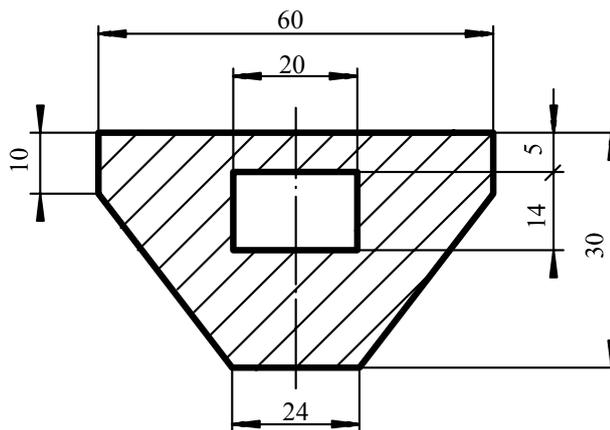


Схема 4

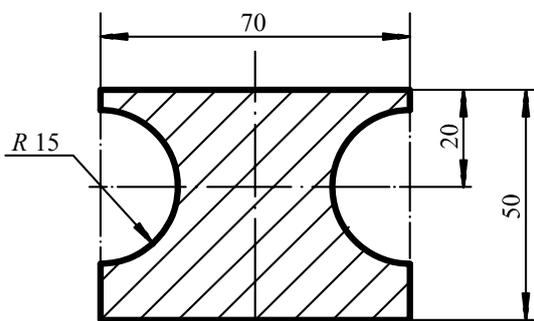


Схема 5

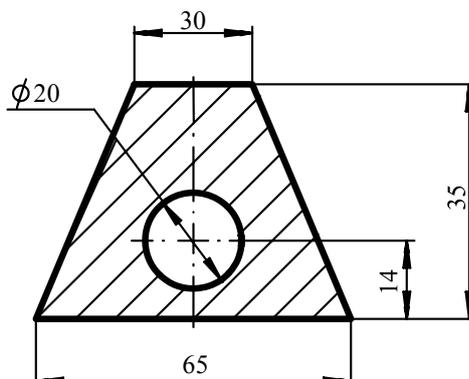


Схема 6

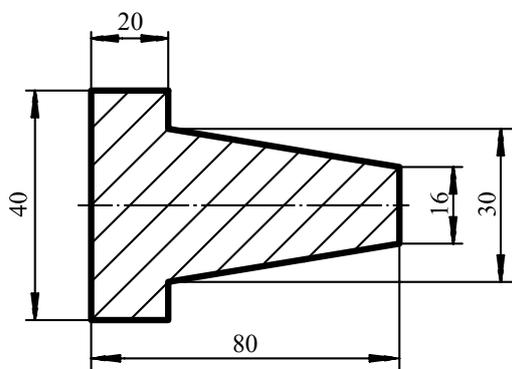


Схема 7

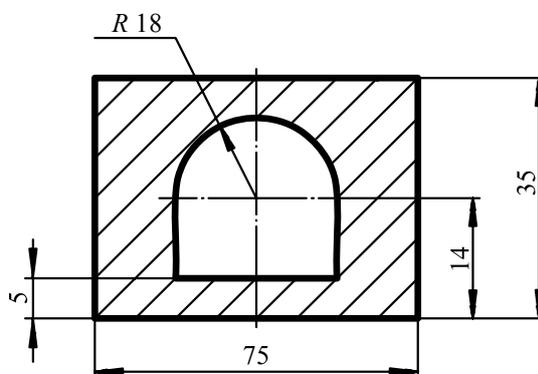


Схема 8

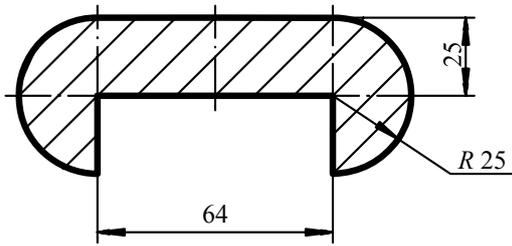


Схема 9

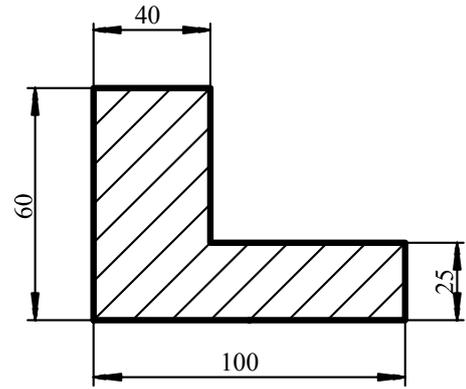


Схема 10

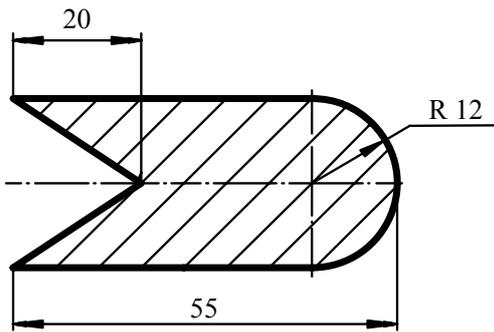


Схема 11

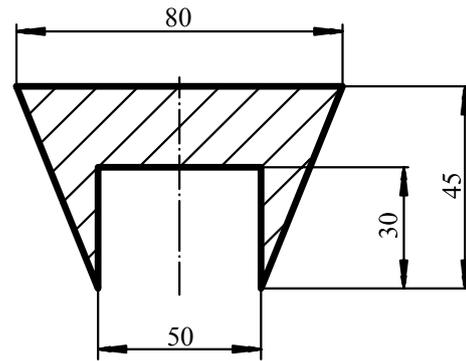


Схема 12

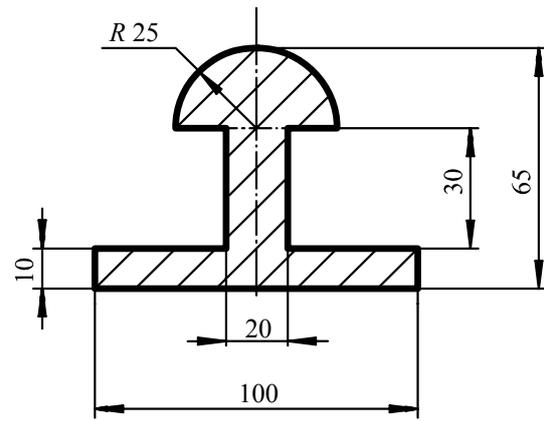


Схема 13

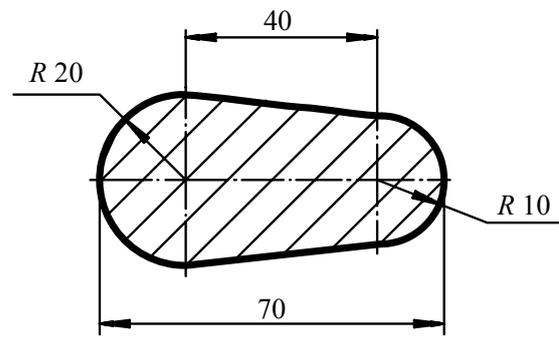


Схема 14

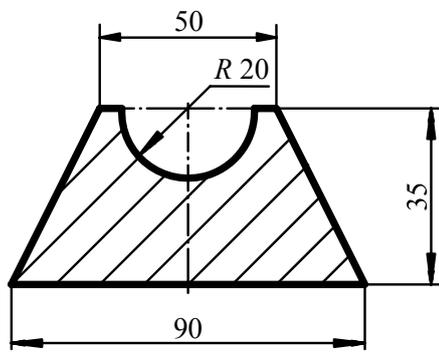


Схема 15

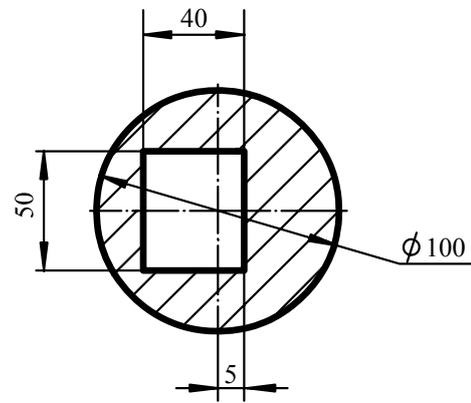


Схема 16

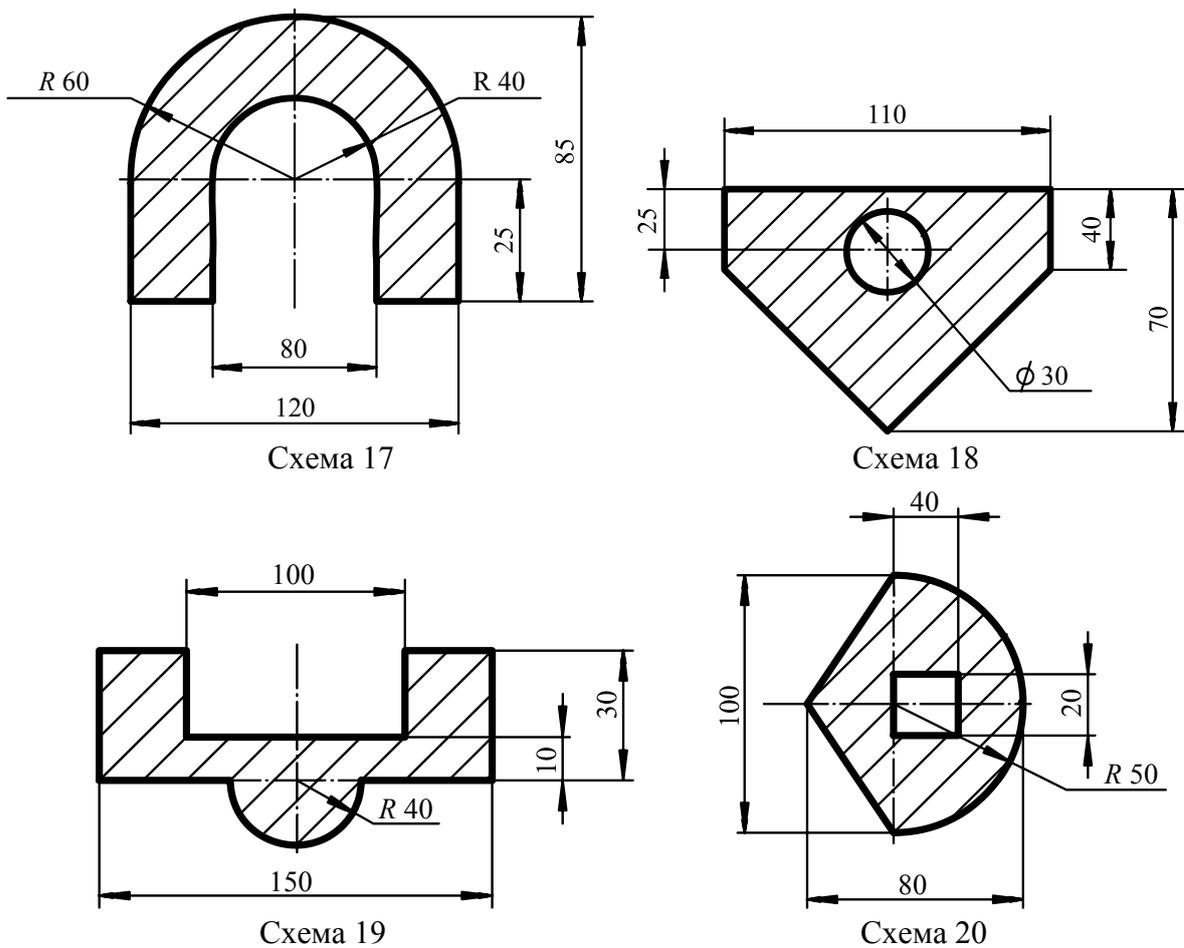


Рис. 6

### 3. Кручение

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникают только крутящие моменты.

Причиной деформации при кручении является внешний вращающий момент, приложенный в плоскости, перпендикулярной оси бруса.

Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строится эпюра крутящих моментов. Крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения.

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны сечения результирующий внешний момент, приложенный к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допустимого

$$\tau = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_k],$$

где  $[\tau_k]$  – допустимое напряжение при кручении;  $W_p$  – момент сопротивления кручению, равный для круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3, \text{ м}^3.$$

Деформация при кручении представляет собой поворот поперечного сечения бруса вокруг оси кручения и называется углом закручивания.

Требование жесткости к брусу состоит в том, что угол закручивания 1 м длины бруса не должен превышать определенной величины.

Угол закручивания участка бруса длиной  $\ell$  определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_k \cdot \ell}{GJ_p},$$

где  $GJ_p$  – жесткость сечения при кручении.

Пример. Вал (брус) круглого поперечного сечения (рис.7) нагружен внешними моментами:  $M_1 = 4$  кНм;  $M_2 = 8$  кНм;  $M_3 = 2$  кНм.

Построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания. Подобрать диаметр вала, если  $[\tau_k] = 60$  МПа,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа,  $a = 0,4$  м

Решение. Разбиваем вал на три участка (1 – DC, 2 – CB, 3 – BA). Значения крутящих моментов в сечениях каждого участка находим,

используя метод сечений (разрезаем вал и рассматриваем правую часть, отбрасывая левую).

$$M_{\kappa 1} = -M_1 = -4 \text{ кНм};$$

$$M_{\kappa 2} = -M_1 + M_2 = -4 + 8 = 4 \text{ кНм};$$

$$M_{\kappa 3} = -M_1 + M_2 + M_3 = -4 + 8 + 2 = 6 \text{ кНм}.$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов.

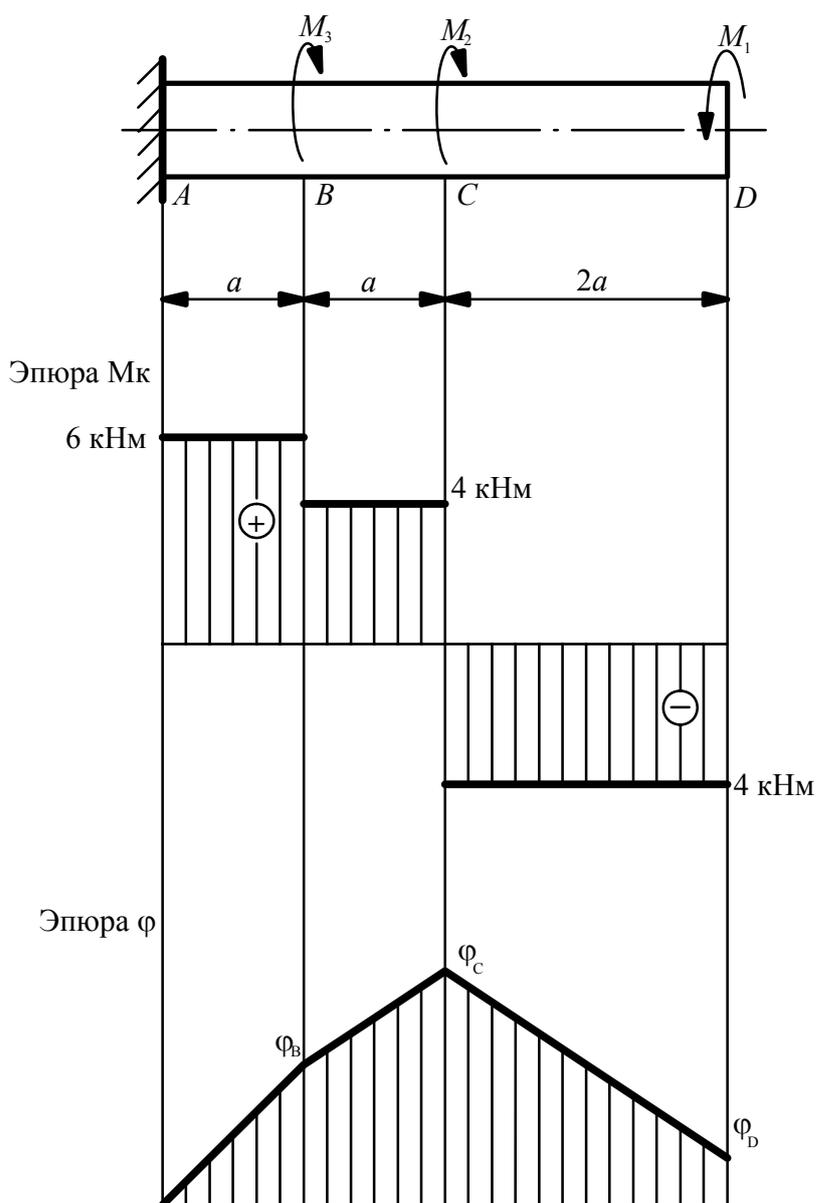


Рис. 7

Применяем расчетное уравнение на прочность при кручении

$$\frac{M_{\kappa \max}}{W_p} = [\tau_{\kappa}],$$

где  $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$  – момент сопротивления кручению для вала круглого поперечного сечения.

$$\text{Находим требуемый диаметр вала } d = \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa \max}}{[\tau_{\kappa}] \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^6}{60 \cdot 0,2}} = 79,3 \text{ мм.}$$

В соответствии с требованиями ГОСТ следует принять  $d = 80 \text{ мм}$ .

Построение эпюры угловых перемещений начинаем от заделки, т.е от неподвижного сечения,  $\varphi_A = 0$ .

Угол поворота сечения  $B$

$$\varphi_B = \frac{M_{\kappa 3} \cdot a}{GJ_p} = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 400}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,696 \cdot 10^6} = 6,36 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

где  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  – модуль сдвига;  $J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 = 4,696 \cdot 10^6$  – полярный момент инерции круглого сечения вала.

Угол поворота сечения  $C$  равен алгебраической сумме углов поворота сечения  $B$  ( $\varphi_B$ ) и сечения  $C$  относительно  $B$  ( $\varphi_{CB}$ )

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_B + \varphi_{CB} = 6,36 \cdot 10^{-3} + \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 800}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,696 \cdot 10^6} = \\ &= 6,36 \cdot 10^{-3} + 4,26 \cdot 10^{-3} = 10,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Угол поворота сечения  $D$

$$\varphi_D = \varphi_C - \varphi_{DC} = 10,65 \cdot 10^{-3} - \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 800}{8 \cdot 10^4 \cdot 4,696 \cdot 10^6} =$$

$$= 10,65 \cdot 10^{-3} - 8,52 \cdot 10^{-3} = 2,13 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Построенная по найденным значениям эпюра угловых перемещений показана на рис.7

Задание 4. Для вала круглого поперечного сечения, жестко защемленного одним концом, построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания, а также из условия прочности подобрать диаметр вала, приняв  $[\tau_k] = 80 \text{ МПа}$ ;  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Данные для самостоятельного решения варианта задания приведены в табл. 2 и на рис.8.

Таблица 2

№ вар.	Внешние моменты, кНм				Длины участков, м			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$a$	$b$	$c$	$d$
1	30	25	20	10	0,2	0,3	0,4	0,5
2	20	30	15	–	0,3	0,2	0,25	0,35
3	40	20	10	15	0,4	0,1	0,2	0,3
4	10	15	5	–	0,15	0,25	0,3	0,2
5	12	10	16	5	0,1	0,15	0,35	0,1
6	8	6	4	–	0,6	0,4	0,5	0,15
7	15	7	8	6	0,35	0,1	0,2	0,25
8	9	5	6	–	0,5	0,3	0,3	0,4
9	10	12	14	8	0,25	0,2	0,1	0,3
10	5	4	3	–	0,45	0,5	0,15	0,6
11	7	11	10	–	0,2	0,4	0,5	0,35
12	16	8	12	10	0,3	0,25	0,4	0,2
13	18	14	9	7	0,15	0,35	0,45	0,5
14	35	20	30	–	0,4	0,2	0,3	0,25
15	10	15	20	5	0,7	0,3	0,2	0,1
16	15	12	10	20	0,3	0,4	0,6	0,2
17	13	16	11	10	0,25	0,5	0,3	0,4

18	9	5	7	4	0,35	0,6	0,25	0,1
19	4	6	5	3	0,6	0,45	0,1	0,3
20	2	4	6	–	0,5	0,25	0,35	0,6

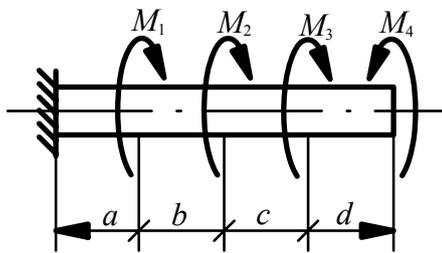


Схема 1

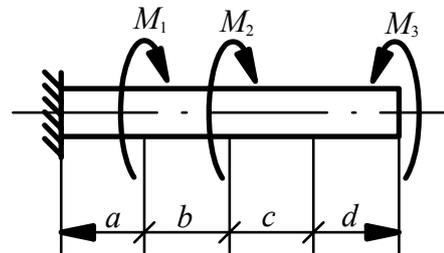


Схема 2

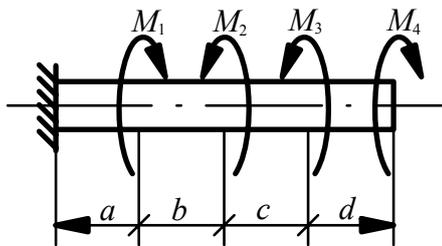


Схема 3

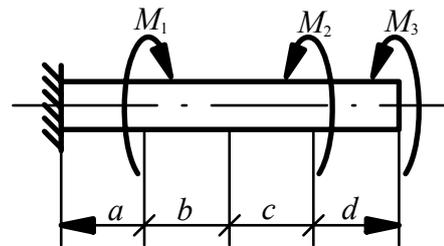


Схема 4

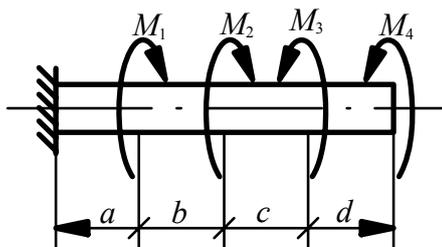


Схема 5

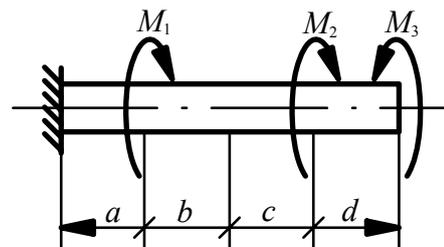


Схема 6

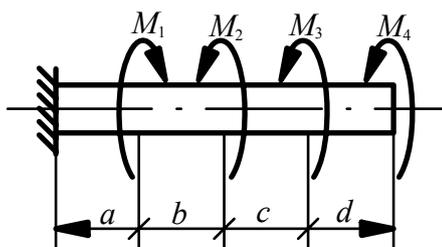


Схема 7

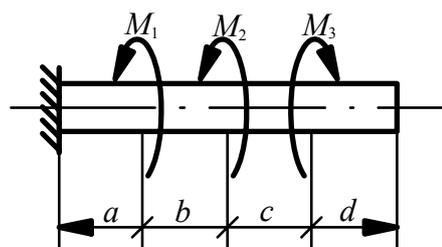


Схема 8

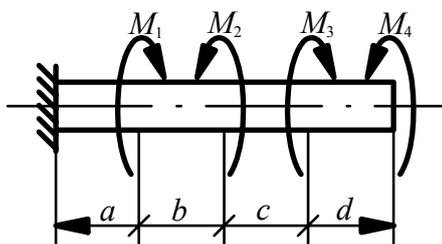


Схема 9

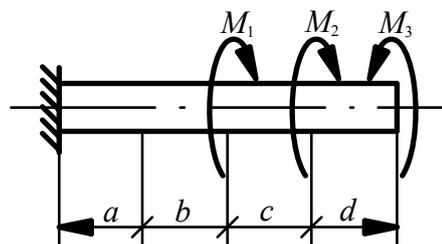


Схема 10

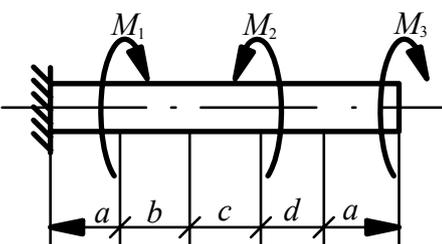


Схема 11

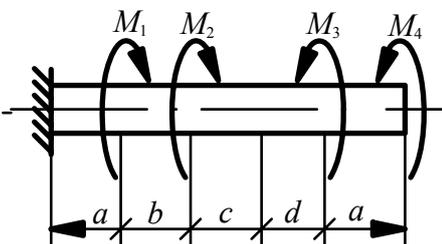


Схема 12

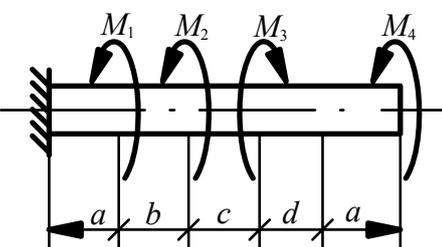


Схема 13

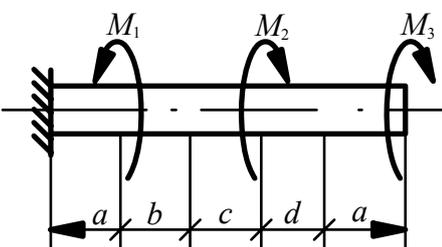


Схема 14

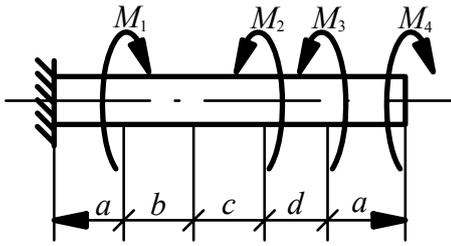


Схема 15

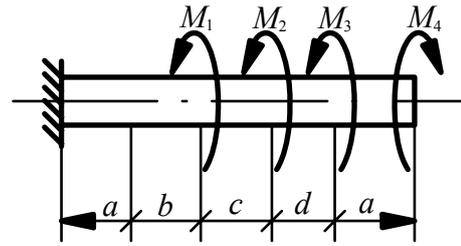


Схема 16

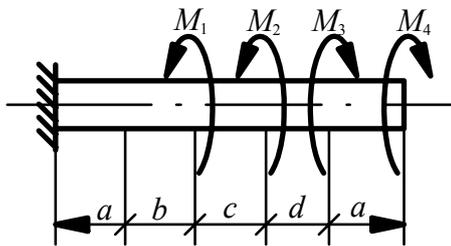


Схема 17

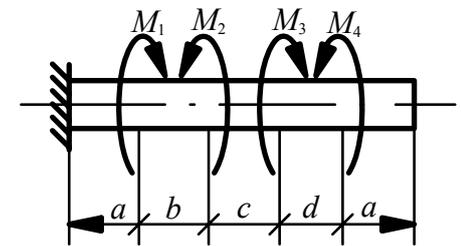


Схема 18

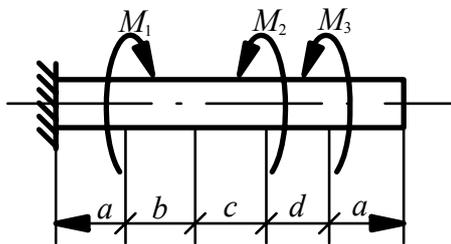


Схема 19

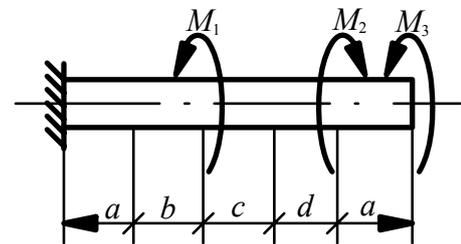


Схема 20

Рис.8

#### 4. Изгиб

Чистым изгибом называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент. Изгибу подвергаются балки, оси, валы и другие детали конструкций. Если плоскость действия внешних сил совпадает с плоскостью симметрии

балки, то деформация изгиба происходит в этой плоскости и изгиб называется прямым.

При изгибе в поперечном сечении горизонтальной балки, закрепленной на двух опорах и находящейся под действием внешних моментов и вертикальных сил, возникают внутренние силовые факторы: поперечная сила и изгибающий момент. Поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения, и считается положительной, если результирующая всех внешних сил слева от сечения направлена вверх.

Изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения. Если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, то изгибающий момент в сечении считается положительным, и наоборот.

Для наглядного изображения распределения вдоль оси балки поперечных сил и изгибающих моментов строят эпюры.

В поперечных сечениях балки при чистом изгибе возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия, которые вычисляют по формуле

$$\sigma = \frac{M_{из}}{W},$$

где  $M_{из}$  – изгибающий момент в рассматриваемом поперечном сечении балки;  $W$  – момент сопротивления изгибу (осевой момент сопротивления).

Условие прочности балки при изгибе заключается в том, что максимальное нормальное напряжение в опасном сечении не должно превосходить допускаемого

$$\sigma = \frac{M_{\text{и max}}}{W} \leq [\sigma].$$

Пример. Для балки, показанной на рис. 9, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, если:  $P = 15$  кН;  $M = 25$  кН;  $q = 20$  кН/м;  $a = 1$  м.

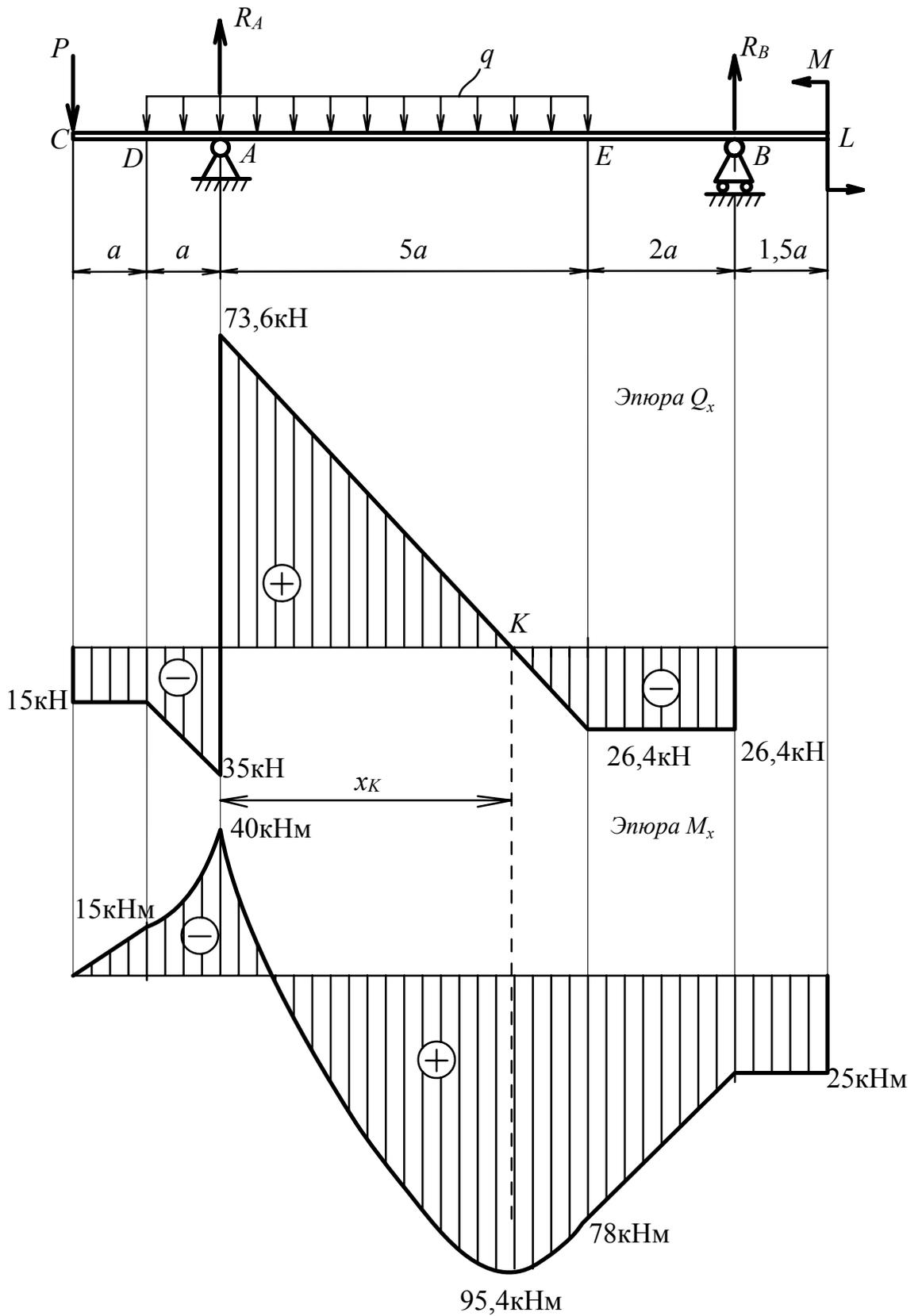


Рис. 9

Решение

1. Определяем реакции опор балки. Составим уравнения моментов:

$$\sum_1^n M_A(F_K) = 0; \sum_1^n M_B(F_K) = 0.$$

$$P \cdot 2a - (q \cdot 6a) \cdot 2a + R_B \cdot 7a + M = 0;$$

$$R_B = \frac{12q - P - M}{7} = \frac{12 \cdot 20 - 2 \cdot 15 - 25}{7} = 26,4 \text{ кН};$$

$$P \cdot 9a - R_A \cdot 7a + (q \cdot 6a)5a + M = 0;$$

$$R_A = \frac{P \cdot 9 + 30q + M}{7} = \frac{135 + 600 + 20}{7} = 108,6 \text{ кН}.$$

Выполним проверку:

$$\sum_1^n F_{Ky} = 0; \quad -P + R_A - q \cdot 6a + R_B = -15 = 108,6 - 120 + 26,4 = 0.$$

2. Обозначим характерные сечения балки, которые соответствуют точкам  $C, D, A, E, B, L$ .

Строим эпюру поперечных сил  $Q_x$ . Определим значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_C = -P = -15 \text{ кН};$$

$$Q_D = -P = -15 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{лев}} = -P - q \cdot a = -15 - 20 = -35 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{прав}} = -P - q \cdot a + R_A = -15 - 20 + 108,6 = 73,6 \text{ кН};$$

$$Q_E = -P - q \cdot 6a + R_A = -15 - 20 \cdot 6 + 108,6 = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{лев}} = Q_E = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{прав}} = Q_B^{\text{лев}} + R_B = -26,4 + 26,4 = 0;$$

$$Q_F = 0.$$

Соединив концы отложенных ординат прямыми линиями, получим эпюру  $Q_x$ .

Эпюра  $Q_x$  на участке  $AE$  пересекает нулевую линию в точке  $K$ .

Величину отрезка  $x_K$  определим используя подобие треугольников:

$$\frac{73,6}{x_K} = \frac{26,4}{5a - x_K}; \quad 73,6 \cdot 5 - 73,6 \cdot x_K = 26,4 \cdot x_K; \quad x_K = 3,68 \text{ м.}$$

Это сечение считается также характерным для эпюры  $Q_x$  и  $M_x$ .

3. Строим эпюру  $M_x$ . Определим изгибающие моменты в характерных сечениях:

$$M_C = 0.$$

$$M_D = -P \cdot a = -15 \text{ кНм};$$

$$M_A = -P \cdot 2a - qa \cdot \frac{a}{2} = -15 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -40 \text{ кНм};$$

$$M_E = -P \cdot 7a + R_A \cdot 5a - (q \cdot 6a)3a = -15 \cdot 7 + 108,6 \cdot 5 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 78 \text{ кНм};$$

$$M_K = -P(2a + x_K) + R_A \cdot x_K - q(a + x_K) \frac{(a + x_K)}{2} =$$

$$= -15 \cdot 5,68 + 108,6 \cdot 3,68 - 20 \cdot 4,68 \cdot 2,34 = 95,4 \text{ кНм};$$

$$M_B = M = 25 \text{ кНм}; \text{ (рассмотрена правая часть балки } BL);$$

$$M_L = M = 25 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру  $M_x$  на участках между характерными сечениями:

участок  $CD$  – на участке приложена сосредоточенная сила, поэтому эпюра  $M_x$  является прямой линией, соединяющей значения 0 и  $-15$  кНм;

участок  $DA$  – на участке действует распределенная нагрузка, поэтому эпюра  $M_x$  изображается параболой между значениями  $-15$  и  $-40$  кНм;

участок  $AE$  – ввиду наличия распределенной нагрузки эпюра  $M_x$  является параболой, а так как эпюра  $Q_x$  на этом участке пересекает нулевую линию, то парабола имеет экстремальное значение (вершину), поэтому эпюру  $M_x$  строим по трем точкам:  $M_B = -40$  кНм;  $M_K = 95,4$  кНм;  $M_E = 78$  кНм;

участок  $EB$  – на участке нет распределенной нагрузки, поэтому эпюра  $M_x$  изображается прямой линией, соединяющей значения  $M_E = 78$  кНм и  $M_B = 25$  кНм;

участок  $BL$  – на участке нет нагрузки, поэтому эпюра  $M_x$  является прямой, параллельной нулевой линии.

Задание 5. Для балки, закрепленной горизонтально построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Данные для выполнения индивидуального задания приведены в табл. 3 и на рис.10.

Таблица 3

№ вар.	Нагрузка	Размеры, м
--------	----------	------------

	$P$ , кН	$M$ , кНм	$q$ , кН/м	$a$	$b$	$c$	$d$
1	20	15	25	1	3	1	–
2	15	10	20	2	4	1,5	–
3	10	5	15	1	5	1	2
4	25	20	30	3	1	0,5	–
5	30	15	10	1	4	1	–
6	20	25	20	4	2	1,5	–
7	10	20	15	2	1,5	4,5	2
8	15	30	20	1,5	6	2	–
9	15	10	5	5	2	1	1
10	10	15	6	1,5	5	2	–
11	25	20	10	1,5	3	2	1
12	30	25	20	2	1,5	4	1,5
13	12	10	8	2,5	4	1,5	–
14	20	16	5	2	3,5	1	2
15	10	5	15	1	1	3	1,5
16	15	8	10	2	2	1	1,5
17	25	15	35	1	1,2	2,5	2
18	20	10	5	3	2,5	1,5	1
19	14	18	10	3	4	2	–
20	10	20	6	1,5	2	3	–

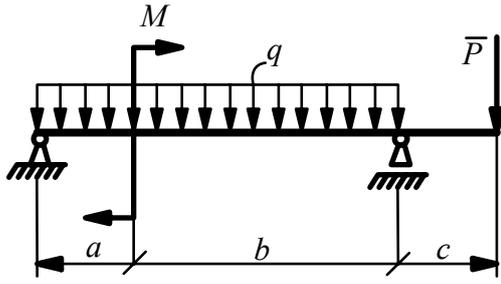


Схема 1

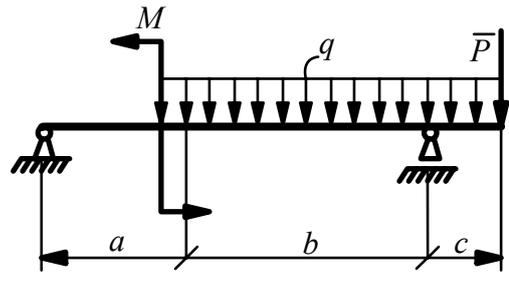


Схема 2

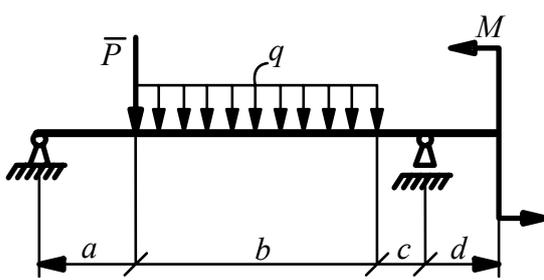


Схема 3

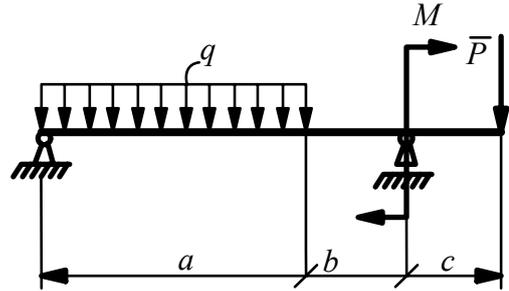


Схема 4

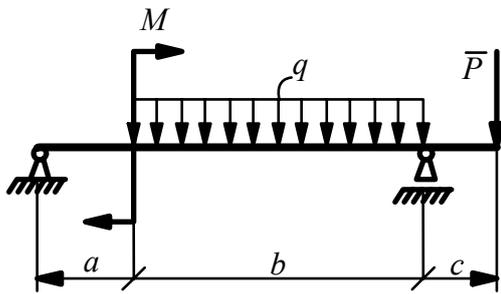


Схема 5

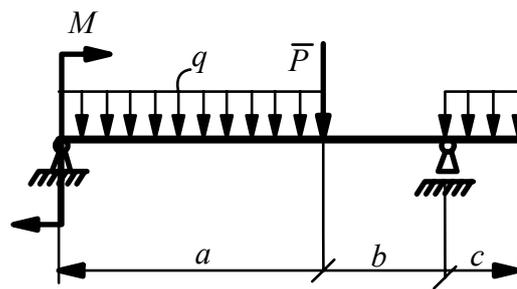


Схема 6

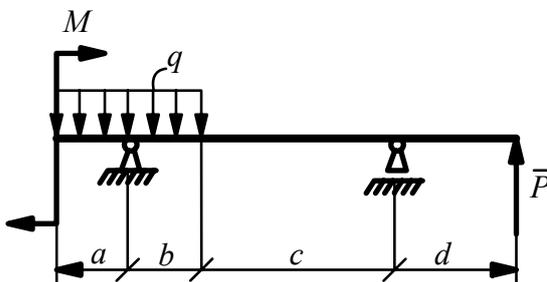


Схема 7

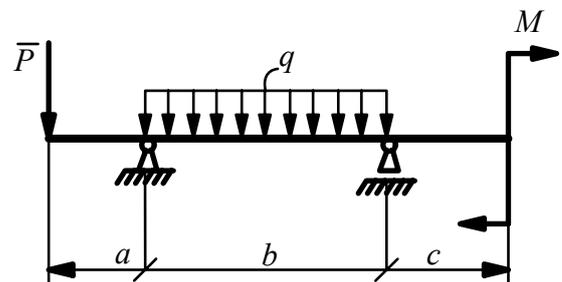


Схема 8

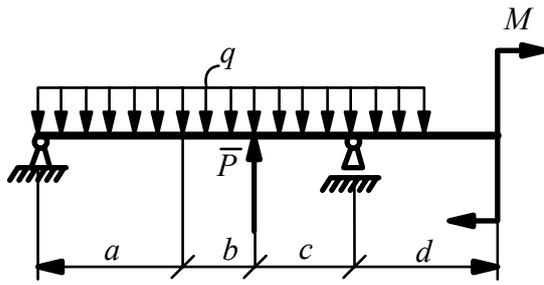


Схема 9

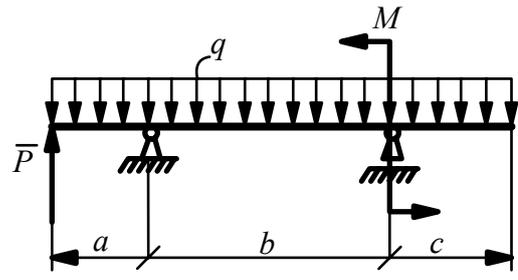


Схема 10

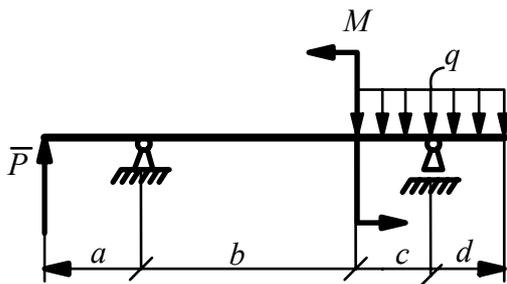


Схема 11

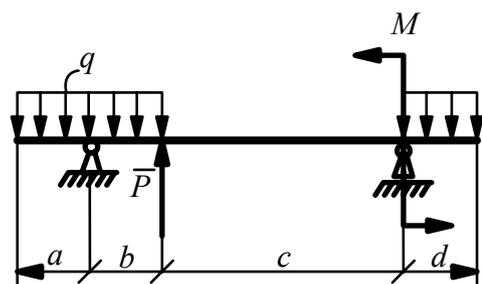


Схема 12

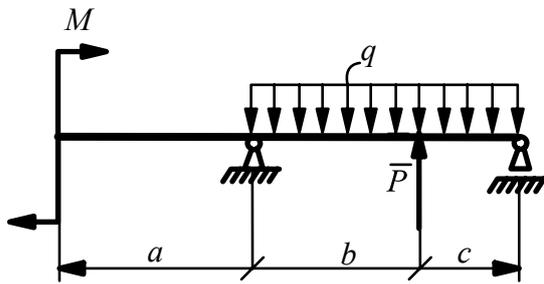


Схема 13

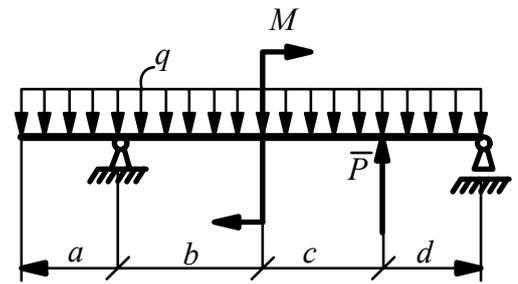


Схема 14

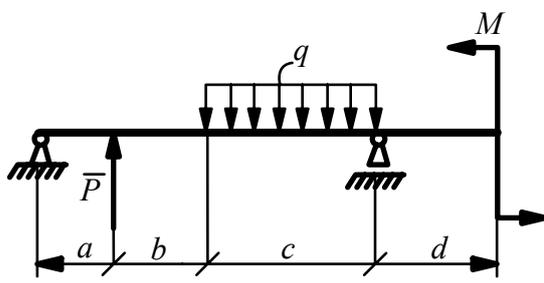


Схема 15

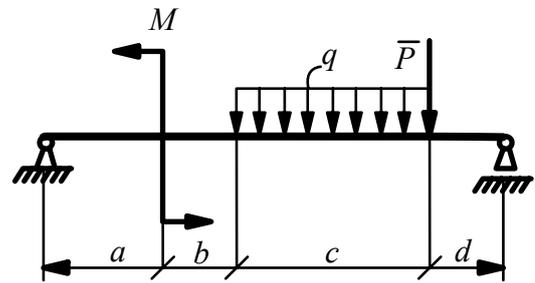


Схема 16

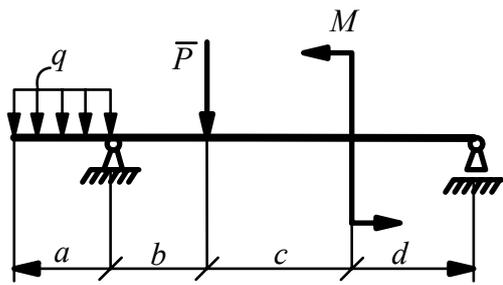


Схема 17

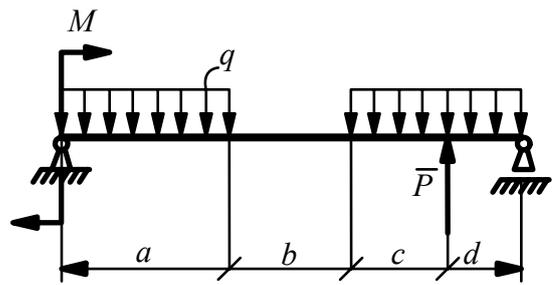


Схема 18

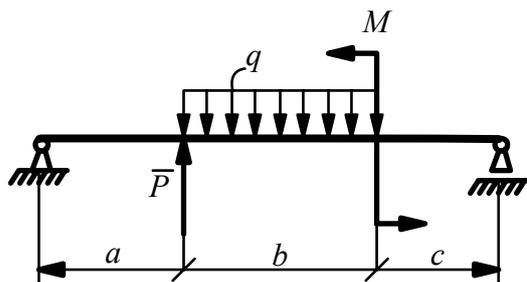


Схема 19

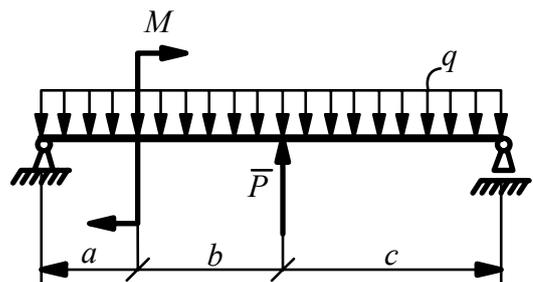


Схема 20

Рис. 10

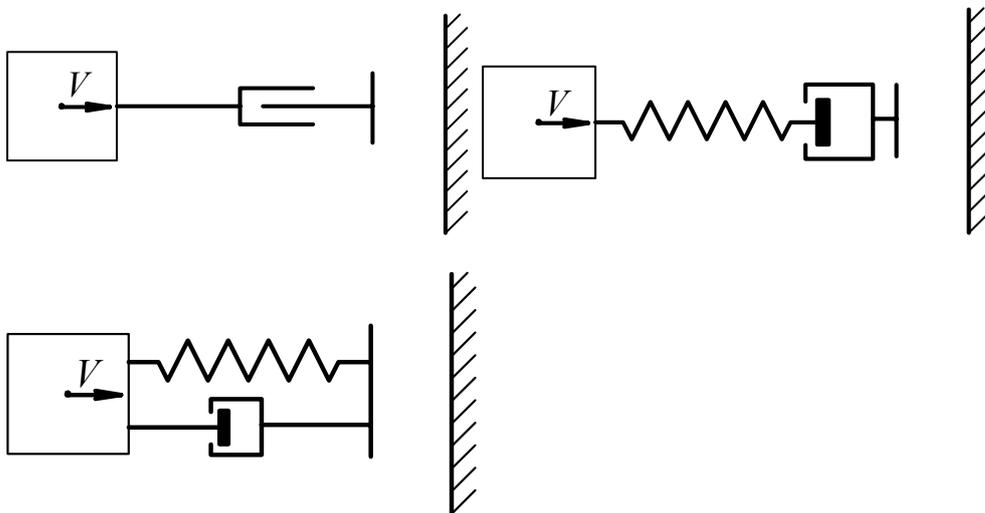
### Список литературы

1. Прикладная механика / В. М. Осецкий – М.: Машиностроение, 1977.
2. Техническая механика / А.А. Эрдеди и др. – М.: Высш. шк., 1980.
3. Сборник задач по технической механике /В. И. Сетков – М.: Высш. шк., 1982.
4. Степин П. А. Сопротивление материалов – М.: Высш. шк., 1979.

## Статья (Удар)

Дискретная модель занимает промежуточное положение между моделью абсолютно твердого тела, используемой в концепции Ньютона, и моделями деформируемого тела с распределенными параметрами. В любом конкретном случае при моделировании ударных процессов, в которых объекты имеют деформируемые элементы, приходится решать вопросы качественного и количественного характера, а именно какие свойства реального объекта существенны и должны быть отражены в модели и каково должно быть их аналитическое описание. В принципе модели деформируемых объектов можно разделить на две группы:

- однокомпонентные модели, обладающие каким-либо одним свойством (упругие, вязкие или пластические элементы);
- многокомпонентные модели, представляющие собой комбинации однокомпонентных моделей и



Жесткопластическая модель – рис.

Многие конструкционные материалы (мягкая углеродистая сталь, некоторые алюминиевые и титановые сплавы) при динамическом

деформировании в пластической области можно считать жесткопластическими. При использовании этой модели необходимо учитывать, что если деформирование происходит с большими скоростями, то предел текучести заметно выше статического значения, соответствующего условиям медленного нагружения. Связь динамического предела текучести  $\sigma_T$  с его статическим значением

$\sigma_T^0$  описывают с помощью соотношения

$$\sigma_T = \sigma_T^0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^n \right],$$

где  $\dot{\epsilon}$  - скорость деформации,

$n$ ,  $D$  – постоянные коэффициенты, учитывающие свойства материала.

Дифференциальное уравнение движения объекта, имеющего в зоне удара жесткопластический элемент, можно представить в форме

$$m\ddot{q} = -\sigma_T^0 \cdot F \left[ 1 + \left( \frac{\dot{q}}{D\ell} \right)^n \right],$$

где  $q(t)$  - линейная деформация жесткопластического элемента, равная перемещению объекта относительно положения в первый момент удара,

$\ell$  и  $F$  – длина и площадь поперечного сечения деформируемого элемента.

Начальные условия имеют вид  $q(0) = 0, \dot{q}(0) = V$ .

Вводя безразмерное перемещение  $\xi$ , безразмерную скорость  $\psi$  и безразмерную постоянную  $\mu$ :

$$\xi = \frac{q}{\ell}; \quad \psi = \frac{\dot{q}}{D\ell}; \quad \mu = \frac{mD^2\ell}{2\sigma_T F},$$

а также учитывая, что  $\ddot{q} = \frac{d(\dot{q})}{2dq}$ , получаем дифференциальное

соотношение

$$\frac{d(\psi^2)}{1+\psi^n} = -\frac{d\xi}{\mu}.$$

Интегрируя с помощью определенных интегралов

$\psi_0$ n	10	20	30	40	50
0,00	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,05	0,478	0,469	0,464	0,46	0,458
0,1	0,455	0,438	0,428	0,421	0,416
0,15	0,433	0,408	0,393	0,383	0,375
0,2	0,411	0,378	0,359	0,346	0,336
0,25	0,389	0,349	0,327	0,311	0,30
0,3	0,368	0,322	0,296	0,278	0,265
0,35	0,348	0,295	0,267	0,248	0,234
0,4	0,328	0,271	0,240	0,22	0,205

## Содержание

1. Растяжение и сжатие	3
1.1 Общие сведения	3
1.2. Статически неопределимые системы	9
2. Геометрические характеристики плоских сечений	16
3. Кручение	22
4. Изгиб	29
Список литературы	39