

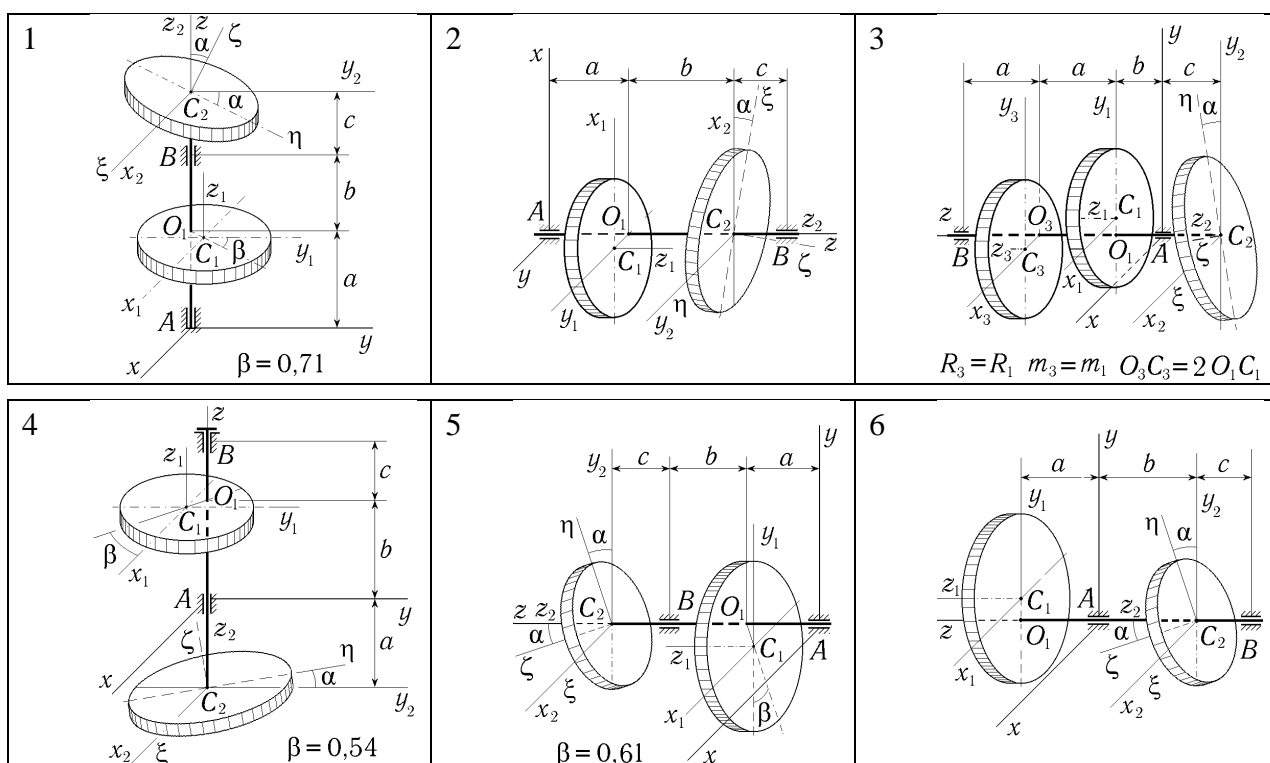
## Динамические реакции в подшипниках ротора КУРСОВОЙ ПРОЕКТ ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

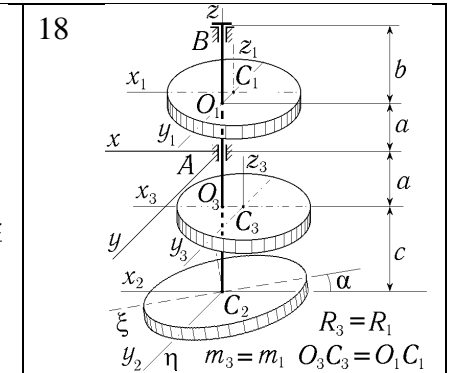
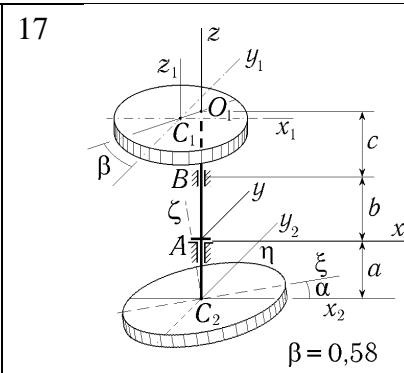
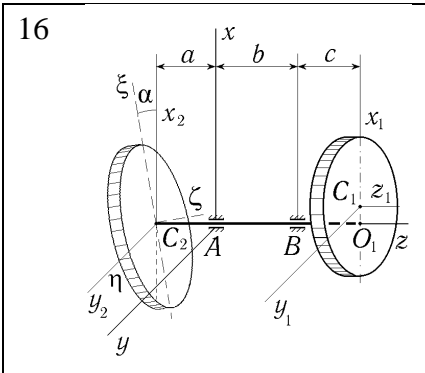
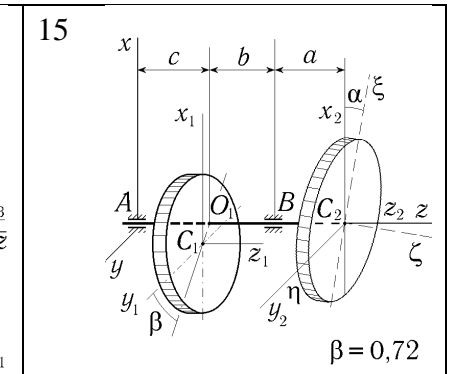
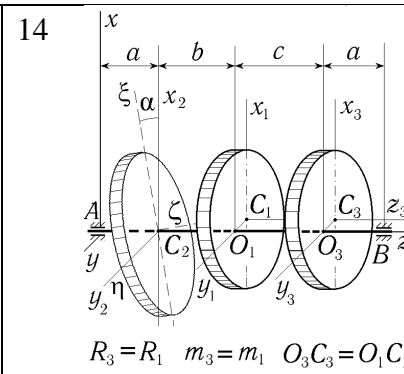
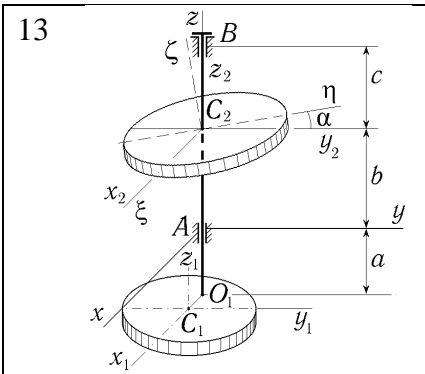
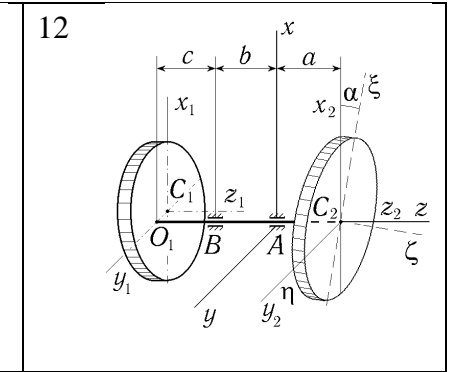
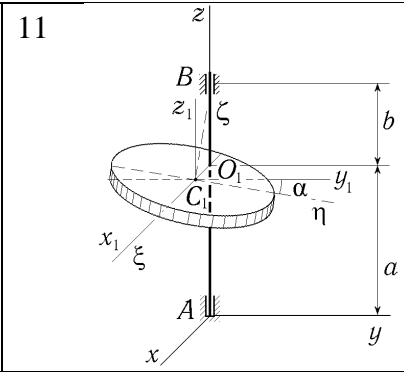
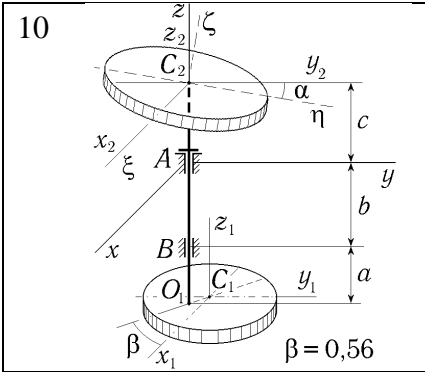
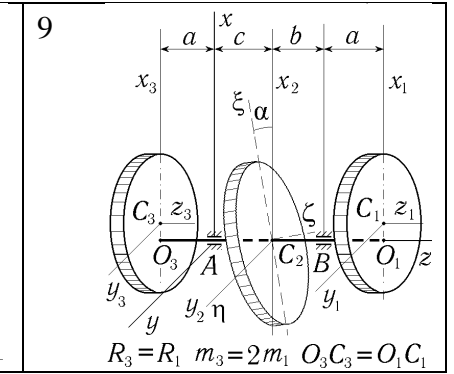
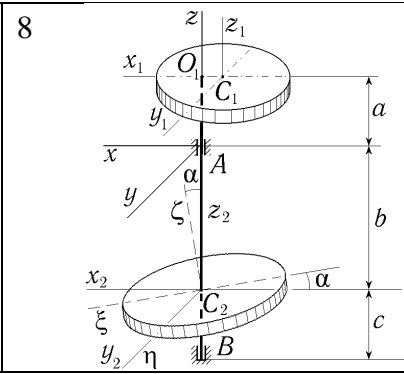
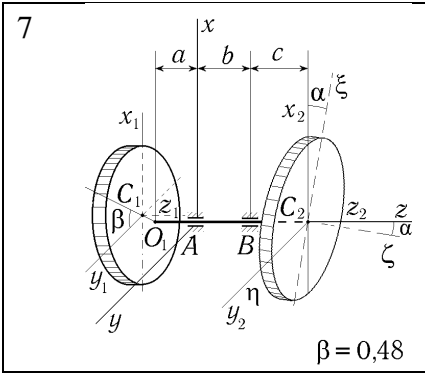
**Описание задания.** Цель проекта — приобретение опыта исследования роторных машин: вычисление масс-инерционных характеристик ротора, составление дифференциальных уравнений его вращения и уравнений для динамических реакций в подшипниках (исследование уравнений на ЭВМ).

Рассматриваются роторные машины типа турбины, компрессора и т. п. в неустановившемся режиме разгона или выбега.

Варианты схем машин представлены на рисунках. Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими, подшипники А, В — точечными, ось ротора бесконечно тонкая, совпадающая с осью вращения. Рабочие колеса принимаются однородными дисками. Через  $C_1, C_2, C_3$  на рисунках обозначены центры масс колес, через  $O_1, O_2, O_3$  — точки пересечения оси с ортогональными ей плоскостями, проходящими через центры масс колес. Колеса на оси насажены с технологическими несовершенствами: перекосом второго колеса на угол  $\alpha$ , указанным на рисунках и смещением  $O_i, C_i$  ( $i = 1, 3$ ) центров масс первого и третьего. Во всех вариантах для простоты принято, что центр масс второго колеса совпадает с осью вращения, а первое и третье колеса насажены без перекоса.

На приведенных ниже рисунках введены вращающиеся с ротором ортогональные системы координат:  $Ax_1y_1z_1$ , ось  $z_1$  которой совпадает с осью вращения;  $C_i x_i y_i z_i$  полученная из  $Ax_1y_1z_1$  параллельным переносом в центры масс соответствующих колес;  $C_2 \xi \eta \zeta$ , оси которой совпадают с главными осями инерции второго колеса. Ротор вращается под действием момента  $\overline{M}_D$  и сопротивления  $\overline{M}_C$ .





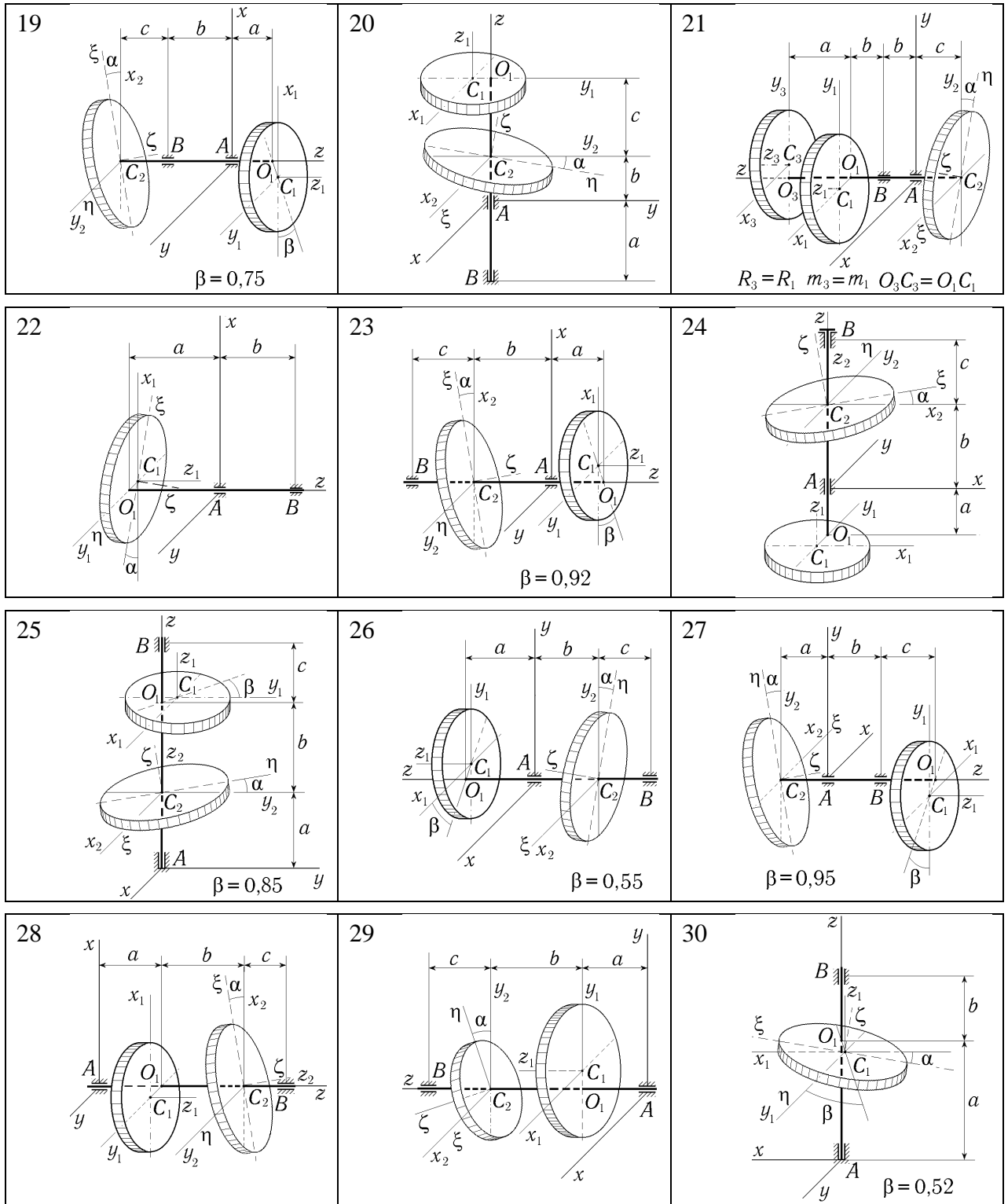


Таблица 13.

Вар.	$m_{1T}$	$m_{2T}$	$R_1$	$R_2$	$O_1 C_1^T$	$\alpha$	$a_T$	$b_T$	$c_T$	$M_{OT}$	$k_{1T}$	$k_{2T}$	$\omega_0$	$\tau$
1	100	90	0.23	0.21	0,2	0,022	0.20	0.20	0.15	12	1,1	0.3	0	5.76
2	80	90	0.27	0.29	0,3	0,018	0.10	0.15	0.10	10	1.2	0,7	990	3.36

3	60	70	0.25	0.30	0,2	0.021	0.12	0.11	0.14	13	1,2	0,2	400	6,72
4	79	80	0,12	0.18	0.1	0,024	0.15	0,20	.0.15	в	1,3	ОД.	590	1,20
5	80	90	0.21	0.28	0,1	0.028	0.18	0,18	0.14	12	1,6	0,3	0	5.52
6	40	60	0.20	0.18	0,2	0.015	0.11	0.12	0.12	13	1,1	0,9	600	0,96
7	100	120	0.25	0.30	0,5	0.023	0.12	0.45	0.14	12	1,7	0,1	300	9,84
8	80	100	0,21	0.23	0,2	0.026	0.12	0.25	0.12	6	1,1	0,9	500	2.88
9	100	110	0.29	0.30	0,4	0.024	0.14	0.18	0.18	14	1,2	0,2	200	9.84
10	70	90	0.23	0.28	0,2	0.016	0.11	0,22	0.14	10	1,3	0,7	0	4,80
11	160	—	0.31	—	0,3	0.026	0.30	0.28	—	6	1,2	1,2	600	3.60
12	60	80	0.24	0.28	0,2	0.018	0.10	0.25	0.10	15	1,4	0,1	400	5,76
13	40	50	0,15	0.18	0,1	0.015	0,08	0.15	0.09	9	1,5	0,5	0	1.44
14	80	90	0.26	0.30	0,2	0.022	0.10	0.10	0.10	8	1,3	0,9	500	6.24
15	90	70	0,16	0.28	0,1	0.019	0.11	0,16	0.15	7	1,2	0,4	0	5.04
16	30	40	0.21	0.25	0,2	0.020	0.08	0,22	0.09	13	1,1	0,5	800	1,44
17	70	80	0.20	0.28	0,4	0.026	0.11	0.30	0.08	11	1,3	0,2	0	6.00
18	30	50	0.18	0,21	0,3	0.021	0.10	0.10	0.09	9	1,6	0,5	0	2.16
19	60	70	0.17	0.19	0,2	0,023	0.08	0.25	0.08	30	1,5	0,2	0	1.92
20	50	70	0.14	0.17	0,3	0.024	0.28	0.08	0.08	12	1,7	0,9	800	0.72
21	40	60	0.23	0.26	0,3	0.018	0.07	0.27	0.09	10	1,2	0,8	500	2.88
22	90	—	0.31	—	0,4	0.025	0.10	0.25	—	10	1,6	1,5	580	1.68
23	60	70	0.25	0.30	0,2	0,022	0.12	0,15	0.15	18	1,1	0,2	0	6.00
24	30	50	0.28	0.31	0,3	0.027	0.10	0.16	0.16	10	1,2	0,2	0	5,04
25	40	50	0.23	0.24	0,1	0.019	0.12	0.12	0.12	5	1,4	0,8	400	2,16
26	30	40	0.18	0.19	0,1	0.015	0.11	0.16	0.15	26	1.3	0,1	600	1.20
27	40	30	0.20	0.17	0,1	0.018	0.08	0.25	0,07	19	1.5	1,6	600	0,48
28	50	50	0.22	0.22	0,3	0.024	0.12	0.10	0.12	5	1.2	1.3	490	1.20
29	50	40	0.18	0.15	0,2	0.017	0.11	0.12	0.12	6	1.3	0,8	500	0.96
30	100	—	0.35	—	0,3	0.023	0.18	0,18	—	3	1,1	1,6	400	3.36

Исходные данные определяются по формулам (1) и табл. 13:

$$M_{Dz} = M_0 - k_1 \omega_z; k_1 = k_{1T}; M_{Cz} = -k_2 \omega_z^2;$$

$$M_0 = M_{0T} 10^2; m_i = m_{iT};$$

$$O_1 C_1 = O_1 C_1^T 10^{-3}; k_2 = k_{2T} 10^{-2};$$

$$a = a_T; b = b_T;$$

$$c = c_T n.$$

(1)

Требуется исследовать движение ротора и динамические реакции в подшипниках. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

**Указания к вычислению масс-инерционных характеристик ротора.** Масса ротора  $m$  определяется как сумма масс всех его колес. Координаты  $x_{C_i}, y_{y_i}$  центров масс  $C$  колес в системе координат  $Axuz$  определяются в соответствии с рисунком. Координаты  $x_C, u_C$ . Центра масс ротора находятся по формулам

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_{C_i}}{m}; y_C = \frac{\sum_i m_i y_{C_i}}{m}. \quad (2)$$

(Для ряда вариантов часть величин  $m_i$  в (2) равна нулю.)

В осях симметрии  $C_i x_i y_i z_i$  для колес 1, 3 и осях  $C_2 \xi \eta \xi$  для колеса 2 вычисляются числовые значения экваториального и полярного моментов инерции. Тензоры инерции  $I_1^{(1)}, I_0^{(2)}, I_3^{(3)}$  колес в этих осях будут диагональными. Тензор инерции колеса 2 в осях  $C_2 x_2 y_2 z_2$  вычисляется с помощью матричного преобразования:

$$I_2^{(2)} = \mathcal{I}_0^{(2)} \gamma^T. \quad (3)$$

В (3) через  $\gamma$  обозначена матрица направляющих косинусов между осями трехгранников  $C_2 \xi \eta \xi$  и  $C_2 x_2 y_2 z_2$  а через  $\gamma^T$ —транспонированная матрица. Компоненты тензоров  $I_1^{(1)}, I_0^{(2)}, I_3^{(3)}$  колес в осях  $Axuz$  вычисляются затем с помощью формул пересчета при параллельном переносе [16]. Тензор инерции ротора /в осях  $Axuz$  получается, если сложить тензоры колес:  $I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}$ .

**Указания к составлению уравнений.** Уравнения вращательного движения и уравнения для динамических реакций составляются по (3). В качестве координатного трехгранника, в осях которого записываются, теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента, выбирается система  $Axuz$ .

После исключения статических составляющих находим:

$$X_B = X_B(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}); Y_B = Y_B(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (4)$$

$$X_A = f_1(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - X_B; Y_A = f_2(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - Y_B, \quad (5)$$

где  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  — соответствующие проекции динамических составляющих реакции;  $\varphi$  — угол поворота ротора. Уравнение кинетического момента по оси  $z$  дает

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = M_{Dz} + M_{Cz}. \quad (6)$$

**Указания к решению задачи на ЭВМ.** Уравнение (6) приводится к форме Коши по переменной  $\omega_z = \dot{\varphi}$ :

$$\dot{\omega}_z = \varepsilon_z; \varepsilon_z = (M_{Dz} + M_{Cz}) / I_{zz}. \quad (7)$$

Уравнение (7) интегрируется при заданном начальном условии  $\omega_z(0)$  на интервале времени  $\tau$ . Шаг печати выбирается равным  $\Delta t = \tau/24$ . Одновременно с интегрированием вычисляют динамические реакции по уравнениям (4), (5).

**Защита проекта.** Типовые вопросы:

1. Назвать размерность величин  $I_{xx}, I_{xy}, \dots$
2. Вычислить тензор инерции тела, состоящего из двух материальных точек, связанных невесомыми стержнями. Массы и координаты точек заданы.
3. Какие дополнительные вычисления следовало бы провести, если бы центр масс колеса 2 не лежал на оси  $z$ ?
4. Как изменятся уравнения системы в осях координатного трехгранника, начало которого не совпадает с точкой А?
5. Проинтегрировать уравнение (7) аналитически.
6. Проинтегрировать аналитически уравнение (7) для случая  $k_2=0$ .

7. Оценить непосредственно из уравнений значения  $R_A$ ,  $R_B$  при  $t \rightarrow \infty$ .
8. Объяснить поведение векторов реакций  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  в неподвижном пространстве.

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ**

(Вариант 31,  $n=3, N=7$ )

**Постановка задачи.** Рассматривается переходный режим вращения ротора турбины после увеличения нагрузки. Значение вращающего момента  $M_{Dz} = M_0 + k_1 \omega_z$ . Момент сопротивления  $M_{Cz} = -k_2 \omega_z^2$ . Схема ротора приведена на рис. 1.

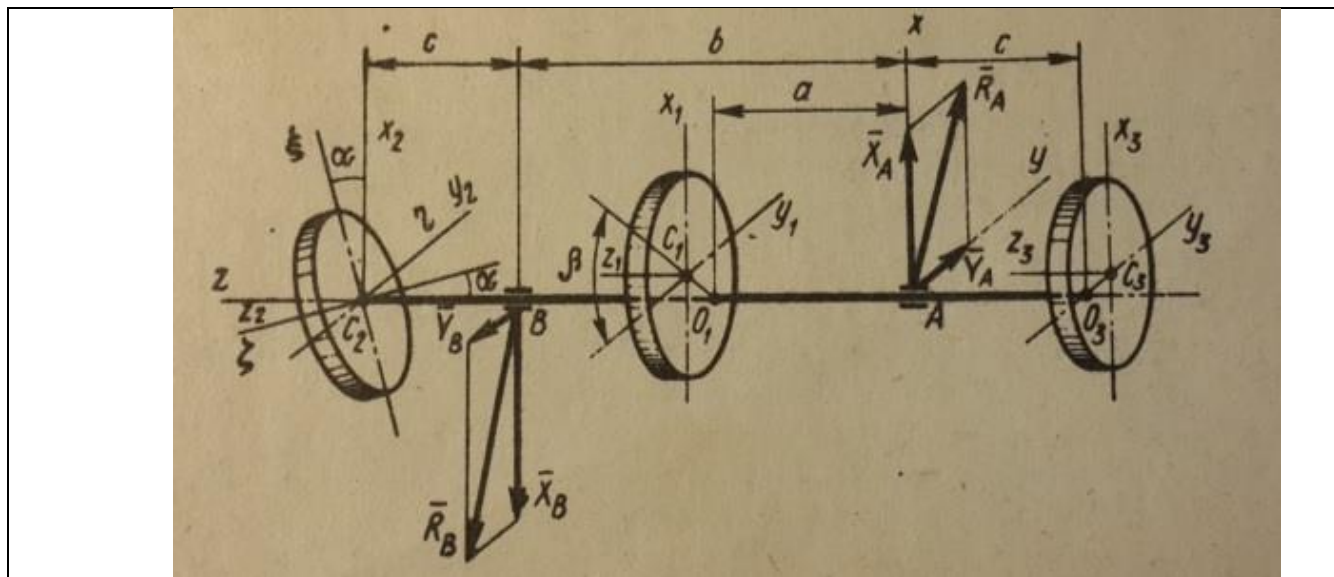


Рис.1. Схема ротора.

Дано:  $M_0=1950 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $k_1=1.57 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ ;  $k_2=0,039 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$ ;  $m_1=47 \text{ кг}$ ;  $m_2=57 \text{ кг}$ ;  $m_3=37 \text{ кг}$ ;  $R_1=0,17 \text{ м}$ ;  $R_2=0,2 \text{ м}$ ;  $R_3=0,15 \text{ м}$ ;  $O_1C_1=4\cdot 10^{-4} \text{ м}$ ;  $O_3C_3=3\cdot 10^{-4} \text{ м}$ ;  $\alpha=0.019 \text{ рад}$ ;  $\beta=0,68 \text{ рад}$ ;  $a=0,133 \text{ м}$ ;  $b=0.267 \text{ м}$ ;  $c=0,093 \text{ м}$ ;  $\omega_z(0)=600 \text{ рад/с}$ ;  $\tau=0,48 \text{ с}$ ;  $\Delta t=0,02 \text{ с}$ .

Требуется: 1. Определить в осях  $Axyz$  координаты центра масс  $C$  ротора и его тензор инерции. 2. Составить уравнение вращательного движения ротора и уравнения для определения динамических реакций в подшипниках. 3. С помощью ЭВМ. Проинтегрировать уравнение движения для заданных начальных условий на интервале времени  $\tau$  и определить изменение во времени динамических реакций. 4. Построить графики  $\omega_z(t)$ ,  $\varepsilon_z(t)$ ,  $R_A(t)$ . 5. Для момента времени  $t=\Delta t(N+1)=0,16 \text{ с}$  изобразить векторы динамических реакций на рисунке.

**Вычисление масс-инерционных характеристик ротора.** Масса ротора определяется как сумма масс колес:  $m=m_1+m_2+m_3=47+57+37=141 \text{ кг}$ . Координаты центров масс  $C$ , в системе координат  $Axyz$  в соответствии с рис. 96

$$C_1(2,52\cdot 10^{-4}; -3,12\cdot 10^{-4}; 0,133);$$

$$C_2(0;0;0,36); C_3(0;3\cdot 10^{-4};-0,093).$$

Координаты  $x_C, y_C$

центра масс ротора находят по формулам:

$$x_C = \sum_i m_i x_{C_i} / m; y_C = \sum_i m_i y_{C_i} / m.$$

Отсюда  $x_C=$

$$0,837 \cdot 10^{-4} \text{ м}; y_C=-0,255\cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Тензор инерции  $i$ -го диска в осях  $C_i x_i y_i z_i$  ( $i=1,3$ )

$$I_i^{(2)} = \frac{m_i R_i^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичный вид имеет тензор  $I_0^{(2)}$  диска 2 в осях  $C_2 \xi \eta \zeta$ . В осях  $C_2 x_2 y_2 z_2$  его тензор инерции  $I_2^{(2)}$  определяется с помощью матричного преобразования:

$$I_2^{(2)} = \mathcal{M}_0^{(2)} \gamma^T.$$

Здесь  $\gamma$ —матрица направляющих косинусов между осями трехгранников  $C_2 \xi \eta \zeta$  и  $C_2 x_2 y_2 z_2$ ;  $\gamma^T$ —транспонированная матрица.

Трехгранник  $C_2 x_2 y_2 z_2$  повернут на угол  $\alpha$  против часовой стрелки относительно трехгранника  $C_2 \xi \eta \zeta$  вокруг оси  $\eta$ , совпадающей с осью  $y_2$ . В этом случае матрица  $\gamma$  такова:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Так как угол  $\alpha$  мал, то будем далее пренебрегать величинами второго и более высокого порядка малости по  $\alpha$ . Тогда  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} &= \frac{m_2 R_2^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{m_2 R_2^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Компоненты тензоров инерции колес в осях трехгранника  $A x y z$  находят по формулам пересчета при параллельном переносе осей. Тензор инерции системы

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}.$$

Выпишем необходимые для решения задачи компоненты тензора инерции системы в осях  $A x y z$ :

$$\begin{aligned} I_{zz} &= m_1 x_{C_1} z_{C_1} + m_3 x_{C_3} z_{C_3} + \alpha m_2 R_3^2 / 2 = \\ &= 47 \cdot 2,52 \cdot 10^{-4} \cdot 0,133 + 0,019 \cdot 57 \cdot 0,2^2 / 4 = 0,0124 \\ I_{yz} &= m_1 x_{C_1} z_{C_1} + m_3 x_{C_3} z_{C_3} = 47(-3,12 \cdot 10^{-4})0,133 + \\ &+ 37 \cdot 3 \cdot 10^{-4}(-0,093) = -0,003 \end{aligned}$$

При вычислении  $I_{zz}$  слагаемыми с множителем  $(O_1C_1)^2$  пренебрегаем:

$$I_{zz} = m_1 R_1^2 / 2 + m_2 R_2^2 / 2 + m_3 R_3^2 / 2 = \\ = (47 \cdot 0,17^2 + 57 \cdot 0,2^2 + 37 \cdot 0,15^2) / 2 = 2,24$$

**Составление уравнений.** Дифференциальное уравнение вращения ротора и уравнения для определения динамических реакций подшипников в осях трехгранника  $Axuz$  имеют такой вид:

$$m x_C \ddot{\phi} - m y_C \dot{\phi}^2 = Y_A + A_B; \\ -I_{zz} \ddot{\phi} + I_{yz} \dot{\phi}^2 = -z_B Y_B; \\ -I_{yz} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi}^2 = z_B Y_B.$$

Запишем (8) в форме Коши, введя переменную  $\omega_z = \dot{\phi}$ :

$$\dot{\omega}_z = \varepsilon_z; \varepsilon_z = (M_0 - k_1 \omega_z - k_2 \omega_z^2) / I_{zz}. \quad (10)$$

Подставим в уравнение (9) числовые значения параметров и разрешим эти уравнения относительно искомых реакций:

$$X_B = (0,003 \varepsilon_z - 0,0124 \omega_z^2) / 0,267; \\ Y_B = -(0,0124 \varepsilon_z + 0,003 \omega_z^2) / 0,267; \\ X_A = 0,0036 \varepsilon_z - 0,0118 \omega_z^2 - X_B; \\ Y_A = 0,0118 \varepsilon_z + 0,0036 \omega_z^2 - Y_B. \quad (11)$$

Значения реакций находят по формулам

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (12)$$

**Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов.** Вычисления в силу уравнений (10), (11), (12) выполним с помощью калькулятора. Вычисления проводятся для трех последовательных значений времени:  $t=0$ ,  $t=0,02$ ,  $t=0,04$ . Для интегрирования дифференциального уравнения (10) применим метод Эйлера.

Найдем скорость установившегося вращения. Приравнивая правую часть (10) нулю, получим  $M_0 - k_1 \omega_z - k_2 \omega_z^2 = 0$ . Отсюда

$$(\omega_z)_{1,2} = \frac{-1,57 \pm \sqrt{1,57^2 + 4 \cdot 0,039 \cdot 1950}}{2 \cdot 0,039} = -20,1 \pm 224.$$

Так как по условию задачи ротор не изменяет направления вращения, то в качестве установившегося значения угловой скорости возьмем положительное значение корня  $\omega_z^* = 204$  рад/с. Используя это значение вычисляем реакции подшипников в стационарном режиме.