Задачи на оптимизации (с использованием производной)

Наибольшее и наименьшее значения функции

Многие экономические задачи формулируются как задачи на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на некотором множестве. Рассмотрим наиболее простой случай, когда требуется найти наибольшее (наименьшее) значения функции на отрезке [a ; b]. Если функция y= f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах бывает важно найти те точки отрезка [a; b], которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка [a; b].

Итак, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значения непрерывной на отрезке [a; b] функции y =f(x), нужно:

1. Найти производную $f^{/}(x)$;
2. Найти критические точки;
3. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 – 12x$ на отрезке [- 3; 4].

Р е ш е н и е.

1. Найдём производную $f^{/}(x) = (x^3 – 12x)^{/} = 3x^2 – 12$.
2. Найдём критические точки: $3x^2 – 12 = 0$, решив уравнение, получим $x_1 = - 2$, $x_2 = 2$.
3. Найдём значения функции в критических точках:
   $f(-2) = (-2)^3 – 12\cdot(-2)= - 8 + 24 = 16$; $f(2) = 2^3 – 12\cdot2 = 8 – 24= - 16$.
   Найдём значения функции на концах отрезка:
   $f(-3) = (-3)^3 – 12\cdot(-3) = -27 + 36 = 9$; $f(4) = 4^3 – 12\cdot4 = 64 – 48 =16$.

Сравнивая значения функции, заключаем, что наименьшее значение функции $f_{наим}$ = f(2) = - 16 достигается в одной из критических точках, а наибольшее $f_{наиб}$= f (-2) = f(4) = 16 в другой критической точке и на правом конце отрезка.

Пример2. В пункте А находится месторождение сырья. Расстояние от пункта А до ближайшей точки В на железной дороге равно 200км (рис. 1). Железная дорога проходит через город С, в котором расположен завод по переработке упомянутого сырья. Расстояние от В до С равно 1 000км. Для доставки сырья на завод строится шоссе AD, соединяющее месторождение с железной дорогой. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. На каком расстоянии от А должен находиться пункт D, чтобы общая стоимость перевозок сырья с месторождения А в город С по маршруту ADC была минимальной?

Рис.1

Р е ш е н и е.

Обозначим BD = x. Тогда DC = 1 000 – x . Пусть а – денежных единиц стоит перевозка одной тонны груза по железной дороге. Тогда перевозка одной тонны по шоссе стоит 2а. По теореме Пифагора вычисляем длину шоссе AD: AD = $\sqrt{x^2+200^2}$. Стоимость перевозки одной тонны по маршруту ADC ***составляет*** ***f(x) = 2a$\sqrt{x^2+200^2}$ + a(1 000 – x).***

Из практических соображений ясно, что необходимо ***найти наименьшее значение этой функции на отрезке [0; 1 000]*** . При этом значению x = 0 соответствует маршрут ABC, а x = 1 000 – маршрут AC.

Вычислим производную: $f'(x) = \frac{2ax}{\sqrt{x^2+200^2}} - a$.

Находим критические точки, приравнивая производную к нулю:

$$\frac{2ax}{\sqrt{x^2+200^2}} - a = 0,$$

$$\frac{2ax - a\sqrt{x^2+200^2}}{\sqrt{x^2+200^2}} = 0,$$

$$2x = \sqrt{x^2+200^2},$$

$$3x^2 = 200^2.$$

Нас интересует только неотрицательное значение x: $\mathrm{x} = \frac{200}{\sqrt{3}}$.

Это означает, что BD $\approx$ 115,4км.

Надо убедится, что значение функции в точке $\mathrm{x} = \frac{200}{\sqrt{3}}$ - наименьшее. Для этого вычисляем значения f(x) в указанной точке , в точках x=0, x= 1 000 и сравниваем их:

f($\frac{200}{\sqrt{3}}$)=134a,

f(0) = 1 400a,

f(1 000) = 2a$\sqrt{1\ 040\ 000}$> 2 000a.

Итак, наименьшее значение достигается в критической точке $\mathrm{x} = \frac{200}{\sqrt{3}}$.

Схема решения задач на оптимизацию

1. Составление математической модели.

Задача переводится на язык функций.

Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию f(x);

2. Работа с составленной моделью.

Средствами математического анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;

3. Выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций результат).

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $y = (x - 5)e^x$; б) $y = \frac{x^2}{x+1}$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций на указанных отрезках:

а) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на $[-2 ; 1]$; б) $f(x) = x\ln x - x$ на $[1/e ; e]$.

3) Из круглого бревна, радиусом R, вытёсывают балку с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно x и высота y. прочность вытесанной балки пропорциональна величине $y^3 \cdot \sqrt{x^3}$

Какими должны быть размеры балки, имеющей наибольшую возможную прочность при данном радиусе бревна R ?