

Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический  
университет им. И. И. Ползунова»

**Е. А. Перепелкин**

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**

**Учебное пособие**

Изд-во АлтГТУ  
Барнаул • 2017

УДК 681.5

Перепелкин, Е. А. Теория систем автоматического управления : учебное пособие / Е. А. Перепелкин. – Барнаул : Изд-во АлтГТУ, 2017. – 108 с.

ISBN 978-5-7568-1249-7

Описываются методы анализа и синтеза систем автоматического управления. Приводятся примеры систем управления техническими объектами. Для студентов технических специальностей и направлений, изучающих дисциплины: «Основы теории управления», «Теория автоматического управления», «Теория и системы управления».

Рекомендовано к печати кафедрой  
прикладной математики АлтГТУ

Рецензент: В. И. Поддубный, д.т.н.,  
зав. кафедрой теоретической механики и  
механики машин АлтГТУ

ISBN 978-5-7568-1249-7

© Перепелкин Е. А., 2017

© Алтайский государственный технический университет  
им. И. И. Ползунова, 2017

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Модели объектов управления</b>	<b>10</b>
1.1 Описание во временной области . . . . .	10
1.2 Описание в частотной области . . . . .	18
1.3 Электропривод как объект управления . . . . .	25
<b>2 Анализ и синтез систем регулирования</b>	<b>29</b>
2.1 Формула Коши для скалярной системы . . . . .	29
2.2 Устойчивость скалярных систем . . . . .	32
2.3 Временные и частотные характеристики . . . . .	38
2.4 Синтез ПИД-регулятора по заданным полюсам передаточной функции . . . . .	44
2.5 Синтез ПИД-регулятора по переходной функции . . . . .	51
<b>3 Управляемость и наблюдаемость</b>	<b>55</b>
3.1 Формула Коши для многосвязной системы . . . . .	55
3.2 Управляемость . . . . .	56
3.3 Наблюдаемость . . . . .	59
3.4 Анализ управляемости и наблюдаемости электропривода . . . . .	62
<b>4 Устойчивость многосвязных систем</b>	<b>64</b>
4.1 Устойчивость по Ляпунову . . . . .	64
4.2 Анализ устойчивости по собственным числам матрицы системы . . . . .	67
4.3 Анализ устойчивости на основе решения уравнения Ляпунова . . . . .	68
4.4 Линеаризация и анализ устойчивости по линейному приближению . . . . .	70

<b>5</b>	<b>Модальный синтез многосвязных систем</b>	<b>73</b>
5.1	Синтез систем с полной информацией о состоянии . . . . .	73
5.2	Наблюдатели состояния . . . . .	76
5.3	Синтез систем слежения . . . . .	81
5.4	Управление электроприводом . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Оптимизация систем с обратной связью</b>	<b>88</b>
6.1	Нормы системы . . . . .	88
6.2	Постановка задачи оптимизации . . . . .	90
6.3	Оптимизация по критерию $H_2$ . . . . .	92
6.4	Управление подвеской транспортного средства . . . . .	93
6.5	Оптимизация по критерию $H_\infty$ . . . . .	98
6.6	Управление продольным движением самолета . . . . .	100
	<b>Список литературы</b>	<b>107</b>

# Введение

Теория систем автоматического управления – наука о методах исследования и проектирования систем управления техническими объектами, такими как: летательные аппараты, манипуляторы, электроприводы, ядерные реакторы, химико-технологические процессы и т.д.

Можно выделить следующие этапы развития техники и теории управления. В 1765 году И. И. Ползунов применил поплавковый регулятор для регулирования уровня воды в котле паровой машины. В 1784 году английский механик Дж. Уатт предложил использовать центробежный регулятор для управления скоростью вращения вала паровой машины. Первая теоретическая работа принадлежит Дж. Максвелу. Статья с названием «О регуляторах» была опубликована в 1866 году. Русский учёный И. А. Вышнеградский в статье «Об общей теории регуляторов» в 1876 году представил результаты исследований по теории устойчивости функционирования паровых машин с регуляторами. Результаты И. А. Вышнеградского были успешно применены на практике. В дальнейшем теория устойчивости динамических систем была развита русским математиком А. М. Ляпуновым. Диссертация А. М. Ляпунова по теории устойчивости была опубликована в 1896 году. Первый учебник с названием «Теория регулирования хода машин» был написан русским механиком Н. Е. Жуковским и издан в 1909 году.

Основные результаты теории систем автоматического регулирования были получены в 30-е и 40-е годы. Этот этап развития теории систем автоматического управления характеризовался применением частотных методов для решения задач анализа и синтеза систем с одним входом одним выходом. Следующий этап развития теории систем автоматического управления начинается с 60-х годов. В

это время возникла необходимость решения более сложных, чем в теории автоматического регулирования, задач управления подвижными объектами и технологическими процессами. Это прежде всего задачи управления летательными аппаратами. На данном этапе получили развитие методы пространства состояний применительно к решению задач управления многосвязными системами.

Большой вклад в развитие современной теории систем автоматического управления внесли советские учёные Л. С. Понтрягин и Б. Н. Петров. Понтрягин Л. С. является автором принципа максимума – метода проектирования оптимальных систем управления. Работы Б. Н. Петрова и его учеников использовались при создании космической техники. Среди зарубежных учёных можно назвать Р. Беллмана и Р. Калмана. Беллману принадлежит метод динамического программирования, который наряду с принципом максимума применяется для решения задач оптимального управления. Калман является автором фильтра, успешно применённого в космической технике.

Начиная с 80-х годов развивается теория робастных (грубых) систем управления. В 1978 году советский учёный В. Л. Харитонов опубликовал работу об устойчивости интервальных многочленов. В это же время развивается теория оптимизации систем с обратной связью по критериям  $H_2$ ,  $H_\infty$ . Авторами данного направления являются Г. Зеймс, Б. Френсис, Дж. Дойл, К. Гловер.

Современная теория систем автоматического управления – это математическая теория, в которой используются результаты алгебры, теории дифференциальных уравнений, теории случайных процессов и других разделов математики.

Вычислительная техника выполняет двойную роль в теории и практике автоматического управления. Вычисли-

тельная техника применяется при проектировании систем управления и применяется в цифровых системах управления в качестве управляющих устройств.

Основные задачи теории систем автоматического управления можно разделить на два класса – задачи анализа и задачи синтеза. К задачам анализа относят: исследование устойчивости и качества переходных процессов, анализ управляемости, наблюдаемости, чувствительности и других свойств объекта управления. Задачи синтеза – это задачи построения программного управления и управления в виде обратной связи.

Программное управление зависит от времени и обеспечивает желаемую траекторию движения объекта управления. Обратная связь зависит от текущего состояния объекта управления и обеспечивает устойчивость реальной траектории относительно заданной.

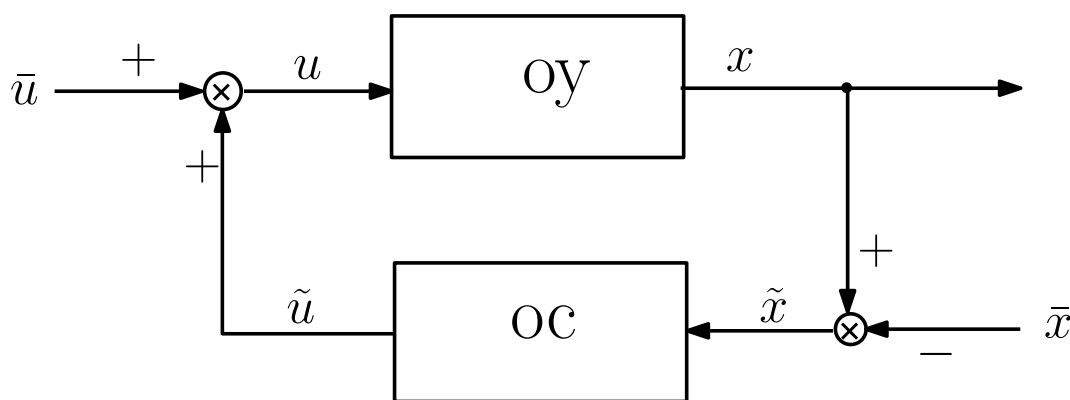


Рисунок 0.1 – Функциональная схема системы управления

Систему управления с обратной связью можно представить в виде функциональной схемы (рисунок 0.1). Здесь: ОУ – объект управления, ОС – обратная связь,  $x$  – состояние объекта управления,  $u$  – управление,  $\bar{x}$  – заданная траектория движения,  $\tilde{x} = x - \bar{x}$  – отклонение от

заданной траектории,  $\bar{u}$  – программное управление,  $\tilde{u}$  – управление в виде обратной связи,  $u = \bar{u} + \tilde{u}$ .

Среди задач синтеза выделим: задачу терминального управления, задачу стабилизации, задачу слежения и задачу регулирования.

Задача терминального управления или задача управления конечным состоянием заключается в переводе системы из заданного начального состояния в желаемое конечное.

Задача стабилизации заключается в удержании объекта управления на заданной траектории движения при наличии неконтролируемых внешних воздействий на объект управления.

Задача слежения заключается в следовании за заданным значением выхода системы. Задача регулирования является частным случаем задачи слежения, когда заданное значение выхода является постоянным.

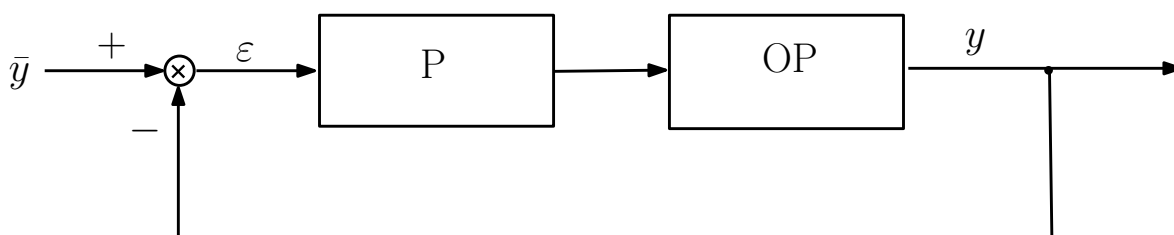


Рисунок 0.2 – Функциональная схема системы регулирования

Функциональная схема системы регулирования представлена на рисунке 0.2. Здесь: ОР – объект регулирования, Р – регулятор (контроллер),  $y$  – выход объекта регулирования,  $\bar{y}$  – желаемое значение выхода (командный сигнал),  $\varepsilon = \bar{y} - y$  – ошибка регулирования.

Методы классической теории автоматического управления достаточно полно описаны в учебниках [3, 4, 5, 6, 10].



В современной теории управления основное внимание уделяется многосвязным системам с неполной информацией о состоянии и модели объекта управления [8, 9].

Новые научные результаты публикуются в журналах: Автоматика и телемеханика, Известия РАН. Теория и системы управления, Automatica, IEEE Transactions on Automatic Control и др.

При решении задач теории систем автоматического управления широко применяется проприетарная система научных и инженерных расчётов Matlab. Свободным аналогом Matlab является система компьютерной математики Scilab. Все расчёты и моделирование в примерах, приведённых в учебном пособии, выполнялись с применением системы Scilab и подсистемы компьютерного моделирования Xcos системы Scilab [1, 2].

# 1 Модели объектов управления

## 1.1 Описание во временной области

При описании объектов управления во временной области применяют дифференциальные и разностные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения и операторные уравнения общего вида. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся описания объектов управления в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Описание «вход-выход» во временной области имеет следующий вид

$$f(y^{(n)}, \dots, y^{(1)}, y, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-1)}, t) = 0, \quad (1.1)$$

где  $y(t)$  – вектор выхода (измерения);  $u(t)$  – вектор входа (управления);  $t$  – время.

Здесь  $y^{(i)}$  – производная порядка  $i$ . Производные также будем обозначать точками и апострофами. Например,  $\dot{y}$  и  $y''$ .

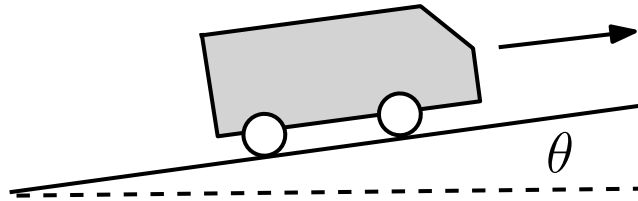


Рисунок 1.1 – Схема движения автомобиля

**Пример 1.1.** Прямолинейное движение автомобиля по наклонной поверхности описывается уравнением

$$m\dot{v} = -mgc_r v - \frac{1}{2}\rho c_d S v^2 - mg \sin \theta + F,$$

где  $v$  – скорость движения автомобиля;  $m$  – масса автомобиля;  $g$  – ускорение свободного падения;  $c_r$  – коэффициент

трения качения;  $\rho$  – плотность атмосферы;  $c_d$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;  $S$  – фронтальная площадь автомобиля;  $\theta$  – угол наклона поверхности движения;  $F$  – движущая сила.

Задача управления заключается в обеспечении заданной скорости движения автомобиля.

Обозначим переменные входа и выхода:  $u = F$ ,  $y = v$ . Уравнение (1.1) для автомобиля принимает вид

$$f(y^{(1)}, y, u) = 0,$$

где

$$f(y^{(1)}, y, u) = my^{(1)} + mgc_r y + \frac{1}{2}\rho c_d S y^2 + mg \sin \theta - u.$$

Описание объекта управления в пространстве состояний соответствует нормальной форме Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \\ y &= h(x, u, t),\end{aligned}$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u$  –  $m$ -мерный вектор входа (управления);  $y$  –  $l$ -мерный вектор выхода (измерения). Обычно  $l, m \leq n$ .

**Пример 1.2.** Космический аппарат (КА) совершает посадку на поверхность планеты без атмосферы (рисунок 1.2). Процесс посадки описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{m} &= -p, \\ \dot{H} &= v, \\ m\dot{v} &= -mg + qp,\end{aligned}$$

где  $m$  – масса КА;  $H$  – высота над поверхностью планеты;  $v$  – скорость спуска;  $p$  – скорость расхода топлива (управление);  $q$  – постоянная, характеризующая величину реактивной тяги;  $g$  – ускорение свободного падения.

Задача управления заключается в обеспечении мягкой посадки КА.

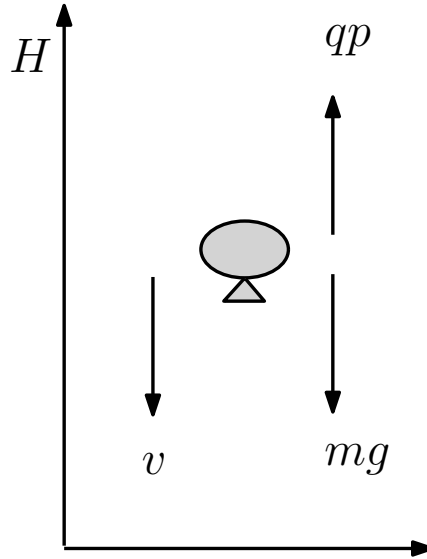


Рисунок 1.2 – Посадка космического аппарата

Введем обозначения для переменных состояния, входа и выхода:  $x_1 = m$ ;  $x_2 = H$ ;  $x_3 = v$ ;  $u = p$ ;  $y = H$ . Получим уравнения системы в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -u, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -g + qu/x_1, \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

Следовательно, в уравнениях, описывающих движение

КА,

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} -u \\ x_3 \\ -g + \frac{qu}{x_1} \end{bmatrix}, \quad h(x, u, t) = x_2.$$

Систему (1.1) с одним входом одним выходом будем называть скалярной (одномерной, односвязной). Систему с несколькими входами несколькими выходами – многосвязной (многомерной, многоканальной). Систему будем называть стационарной, если функции  $f$  и  $h$  не зависят от  $t$ .

Линейная система в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ y &= C(t)x + D(t)u, \end{aligned}$$

где  $A(t), B(t), C(t), D(t)$  – матрицы соответственно размеров  $n \times n, n \times m, l \times n, l \times m$ . В стационарной системе  $A, B, C, D$  – постоянные матрицы.

Линейная скалярная система во временной области описывается уравнением

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u + b_1 u^{(1)} + \dots + b_{n-1} u^{(n-1)}. \quad (1.2)$$

В стационарной системе коэффициенты уравнения (1.2) не зависят от времени.

Операторная запись уравнения (1.2) имеет следующий вид

$$a(p)y = b(p)u.$$

Здесь  $p$  – оператор дифференцирования, многочлены

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ b(p) &= b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} \end{aligned}$$

составлены из коэффициентов уравнения (1.2).

Как правило, можно перейти от описания «вход-выход» к описанию в пространстве состояний и наоборот. Пусть, например, исходное описание системы задано уравнением

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u.$$

Необходимо построить описание в пространстве состояний. Определим переменные состояния:  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y^{(1)}$ , ...,  $x_n = y^{(n-1)}$  и запишем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + b_0 u. \end{aligned}$$

В результате получим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D = 0.$$

В большинстве случаев полное описание объекта управления в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений является нелинейным. В то же время при проектировании систем управления с обратной связью, как правило, переходят к приближённому линейному описанию. Такой переход называется линеаризацией.

Рассмотрим нелинейную многосвязную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \\ y &= h(x, u, t).\end{aligned}$$

Пусть некоторый рабочий (номинальный) режим функционирования системы определяется входом  $\bar{u}(t)$ , соответствующей траекторией в пространстве состояний  $\bar{x}(t)$  и выходом  $\bar{y}(t)$ .

Обозначим через

$$\tilde{u} = u - \bar{u}, \quad \tilde{x} = x - \bar{x}, \quad \tilde{y} = y - \bar{y}$$

отклонение фактического входа, траектории и выхода от номинальных значений. Будем считать отклонения небольшими.

Раскладывая функции  $f$  и  $h$  в ряд Тейлора, получим приближённое линейное описание в виде

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u},\end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

– матрицы Якоби, матрицы, составленные из первых производных.

**Пример 1.3.** Объектом управления является магнитная подвеска (рисунок 1.3). Ток в электромагните создаёт электромагнитную силу, которая действует на шар. Задача управления заключается в удержании шара на заданной высоте.

Электромагнитная сила пропорциональна квадрату силы тока и обратно пропорциональна расстоянию шара от электромагнита. Динамика системы описывается уравнениями:

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kI^2}{y},$$

$$L\dot{I} + RI = u,$$

где  $y$  – смещение шара по отношению к электромагниту;  $I$  – сила тока;  $u$  – входное напряжение;  $R$  – сопротивление электрической цепи  $L$  – индуктивность электрической цепи;  $m$  – масса шара;  $g$  – ускорение свободного падения.



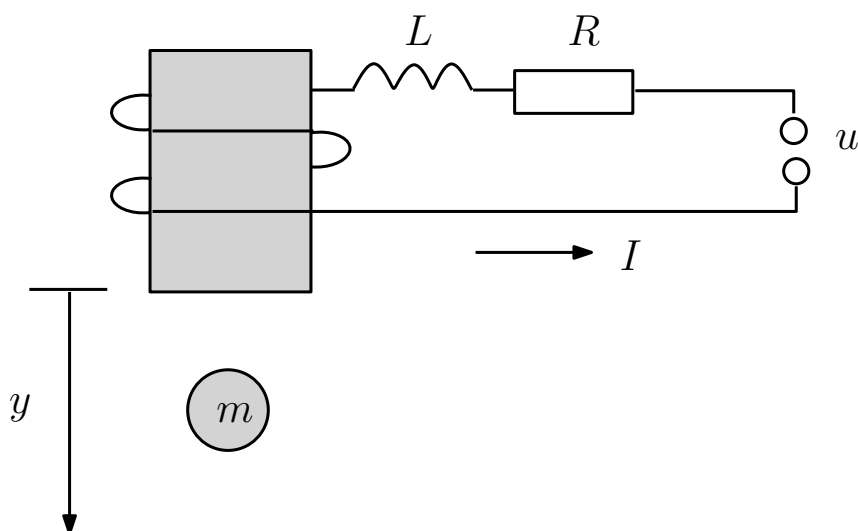


Рисунок 1.3 – Магнитная подвеска

Объект управления является нелинейным. Перейдем к описанию в пространстве состояний и выполним линеаризацию системы относительно заданного положения равновесия.

Пусть  $\bar{y}$  есть заданное положение шара. В положении равновесия должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= mg - \frac{k\bar{I}^2}{\bar{y}}, \\ R\bar{I} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

Из этих соотношений получим

$$\bar{I} = \sqrt{mg\bar{y}/k}, \quad \bar{u} = R\bar{I}.$$

Введем обозначения для переменных состояния:  $x_1 = y$ ;  $x_2 = \dot{y}$ ;  $x_3 = I$ . Получим описание объекта управления в

пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{kx_3^2}{mx_1}, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u, \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{kx_3^2}{mx_1} \\ -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u \end{bmatrix}, \quad h(x, u) = x_1.$$

Матрицы линеаризованной системы равны

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k\bar{x}_3^2}{m\bar{x}_1^2} & 0 & -\frac{2k\bar{x}_3}{m\bar{x}_1} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0,\end{aligned}$$

где  $\bar{x}_1 = \bar{y}$ ,  $\bar{x}_3 = \bar{I}$ .

## 1.2 Описание в частотной области

В частотной области линейные стационарные системы описываются передаточными функциями, передаточными матрицами (матричными передаточными функциями) и частотными характеристиками.

Передаточные функции и передаточные матрицы получаются в результате применения к уравнениям системы преобразования Лапласа.

Частотные характеристики можно определить по передаточным функциям и матрицам, а также экспериментально.

Преобразованием Лапласа функции  $f(t)$  называется функция комплексного аргумента

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Преобразование Лапласа обладает свойствами:

- 1)  $f(t) = a\varphi(t) + b\psi(t), \quad \hat{f}(s) = a\hat{\varphi}(s) + b\hat{\psi}(s);$
- 2)  $f(t) = \varphi^{(1)}(t), \quad \hat{f}(s) = s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0);$
- 3)  $f(t) = \varphi^{(n)}(t), \quad \hat{f}(s) = s^n\hat{\varphi}(s) - s^{n-1}\varphi(0) - \dots - \varphi^{(n-1)}(0);$
- 4)  $f(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau)\psi(\tau) d\tau, \quad \hat{f}(s) = \hat{\varphi}(s)\hat{\psi}(s).$

Применим преобразование Лапласа к стационарной линейной системе с одним входом одним выходом

$$a(p)y = b(p)u.$$

При нулевых начальных условиях получим описание в частотной области

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \hat{g}(s)\hat{u}(s), \\ \hat{g}(s) &= \frac{b(s)}{a(s)}. \end{aligned}$$

Функция  $\hat{g}(s)$  называется передаточной функцией системы. Многочлен  $a(s)$  называется характеристическим

многочленом системы. Корни характеристического многочлена  $a(s)$  есть полюсы системы. Корни многочлена  $b(s)$  называются нулями системы.

Линейная многосвязная стационарная система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

в частотной области описывается уравнением

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s).$$

Матрица

$$\hat{G}(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$$

называется передаточной матрицей системы или матричной передаточной функцией.

Для системы с одним входом одним выходом ( $m = 1$ ,  $l = 1$ ) передаточная матрица является передаточной функцией

$$\hat{G}(s) = \hat{g}(s).$$

Структурные схемы объектов управления состоят из блоков. Каждый блок имеет вход, выход и передаточную функцию соответствующего звена (рисунок 1.4).

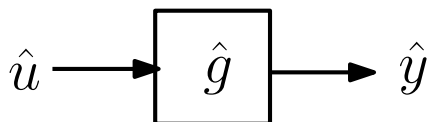


Рисунок 1.4 – Динамическое звено

К элементарным динамическим звеньям относят:

1) безынерционное звено

$$\begin{aligned}y &= ku, \\ \hat{g}(s) &= k;\end{aligned}$$

2) инерционное звено первого порядка

$$T\dot{y} + y = ku,$$
$$\hat{g}(s) = \frac{k}{Ts + 1};$$

3) инерционное звено второго порядка

$$T_1T_2\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = ku,$$
$$\hat{g}(s) = \frac{k}{T_1T_2s^2 + T_1s + 1};$$

4) дифференцирующее звено

$$y = \dot{u},$$
$$\hat{g}(s) = s;$$

5) интегрирующее звено

$$\dot{y} = u,$$
$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s};$$

6) нелинейные звенья  $y = f(u)$  типа гистерезиса, люфта, насыщения.

К структурным схемам можно применять следующие правила преобразования:

1) Передаточная функция последовательного соединения звеньев (рисунок 1.5) равна произведению передаточных функций

$$\hat{g} = \hat{g}_1\hat{g}_2.$$

- 2) Передаточная функция параллельного соединения звеньев (рисунок 1.6) равна сумме передаточных функций

$$\hat{g} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2.$$

- 3) Передаточная функция звена с обратной связью (рисунок 1.7) определяется формулой

$$\hat{g} = \frac{\hat{g}_1}{1 - \hat{g}_1 \hat{g}_2}.$$

- 4) Эквивалентные структурные схемы в случае переноса точки разветвления сигнала показаны на рисунке 1.8.
- 5) Эквивалентные структурные схемы в случае переноса точки суммирования сигнала показаны на рисунке 1.9.

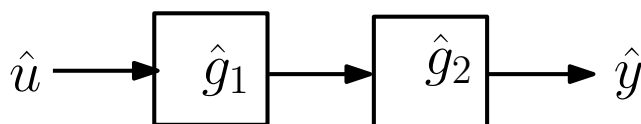


Рисунок 1.5 – Последовательное соединение звеньев

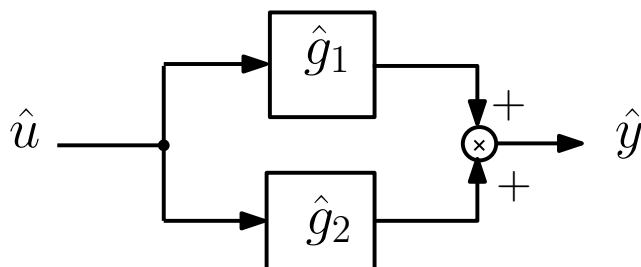


Рисунок 1.6 – Параллельное соединение звеньев

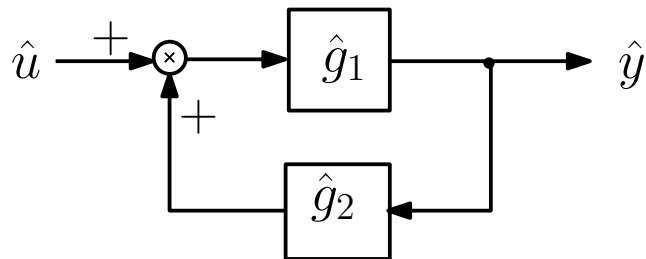


Рисунок 1.7 – Звено с обратной связью

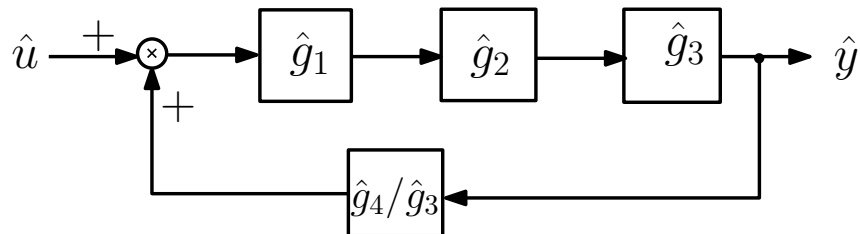
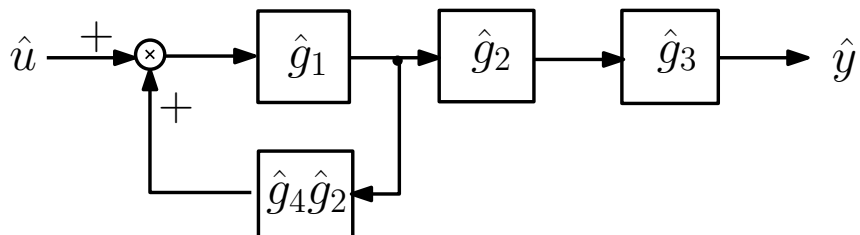
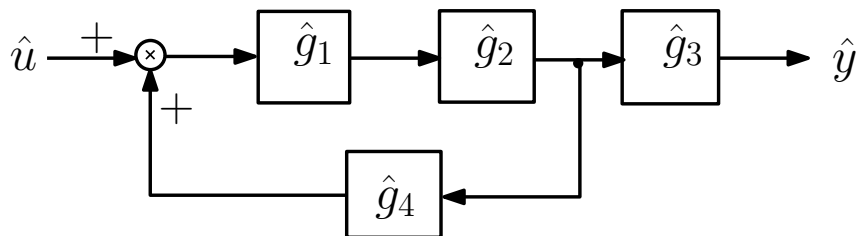


Рисунок 1.8 – Перенос точки разветвления сигнала

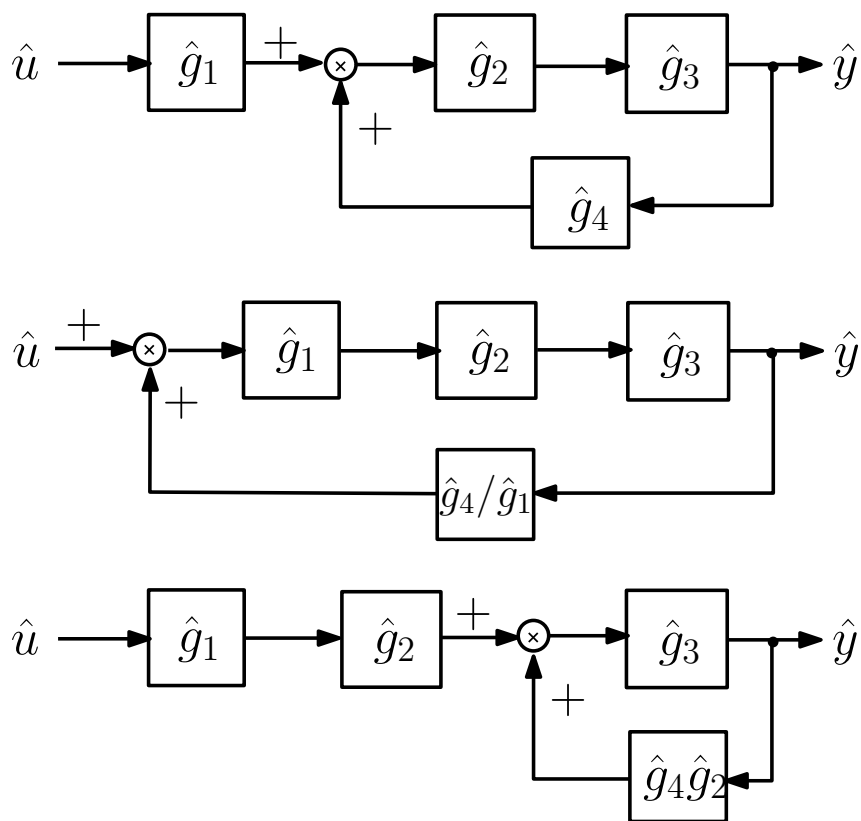


Рисунок 1.9 – Перенос точки суммирования сигнала



### 1.3 Электропривод как объект управления

Динамика электропривода с электродвигателем постоянного тока (рисунок 1.10) описывается уравнениями

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad (1.3)$$

$$J\dot{\omega} = -k_1\omega + k_2I, \quad (1.4)$$

$$L\dot{I} + RI = u - k_3\omega, \quad (1.5)$$

где  $\varphi$  – угол поворота вала двигателя;  $\omega$  – угловая скорость вала двигателя;  $I$  – сила тока;  $u$  – управляющее напряжение;  $J$  – момент инерции, приведённый к валу двигателя;  $L$  – индуктивность якорной цепи;  $R$  – сопротивление якорной цепи;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  – конструктивные параметры.

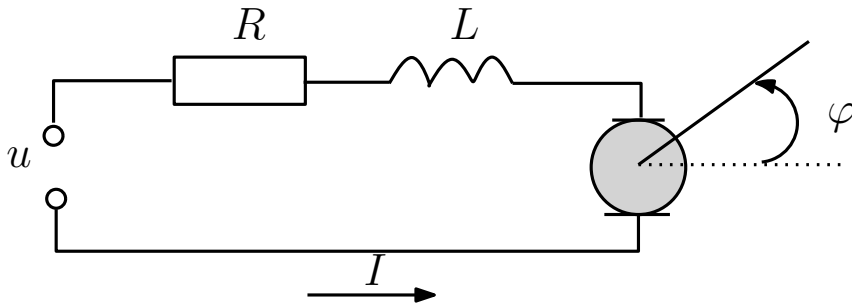


Рисунок 1.10 – Электропривод

Построим описание объекта управления в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du.$$

Вектор состояния

$$x = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ I \end{bmatrix}.$$

Выход системы  $y = \varphi$ . Матрицы системы равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{J} & \frac{k_2}{J} \\ 0 & -\frac{k_3}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Передаточная функция системы

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= C(sE - A)^{-1}B = \\ &= \frac{\frac{k_2}{JL}}{s^3 + \frac{RJ + k_1L}{JL}s^2 + \frac{k_1R + k_2k_3}{JL}s}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Описание «вход-выход» имеет вид

$$y^{(3)} + \frac{RJ + k_1L}{JL}y^{(2)} + \frac{k_1R + k_2k_3}{JL}y^{(1)} = \frac{k_2}{JL}u.$$

Составим структурную схему системы. Применяя преобразование Лапласа к уравнениям системы (1.3)-(1.5), получим алгебраические соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(s) &= \frac{1}{s}\hat{\omega}(s), \\ \hat{\omega}(s) &= \frac{1}{Js}(k_2\hat{I}(s) - k_1\hat{\omega}), \\ \hat{I}(s) &= \frac{1}{Ls + R}(\hat{u}(s) - k_3\hat{\omega}(s)). \end{aligned}$$

На основе этих соотношений составляем структурную схему (рисунок 1.11). После преобразования структурной схемы получим передаточную функцию (1.6).

На рисунке 1.12 показана Xcos-модель электропривода, соответствующая структурной схеме.

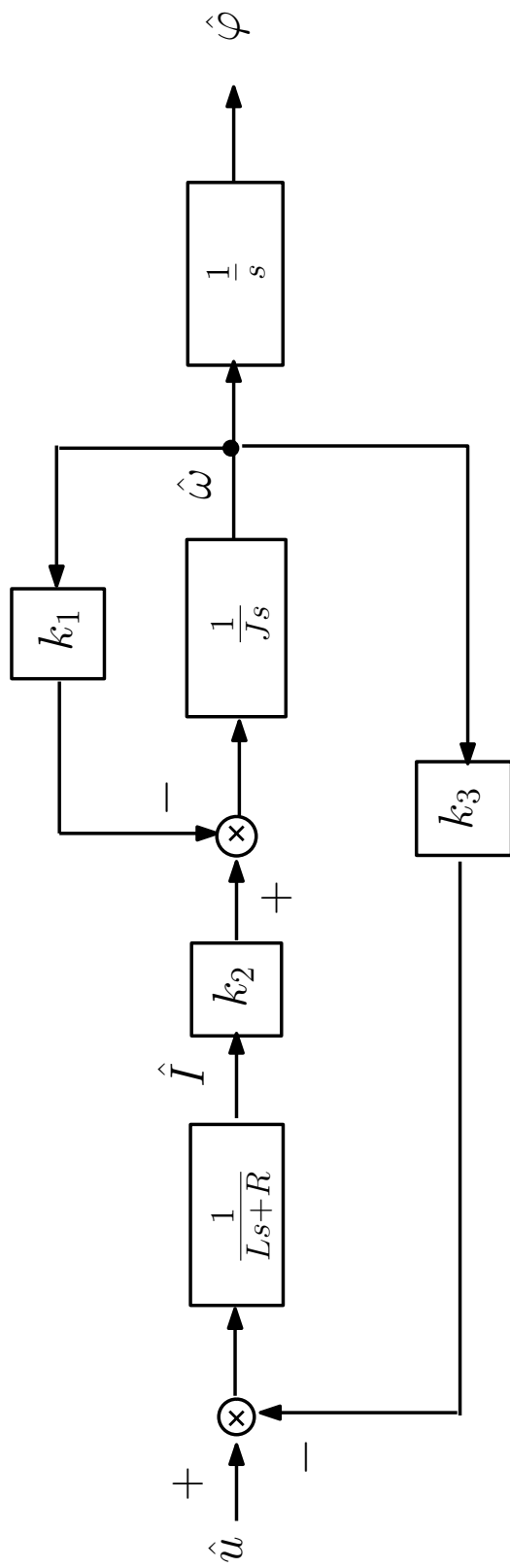


Рисунок 1.11 – Структурная схема электропривода

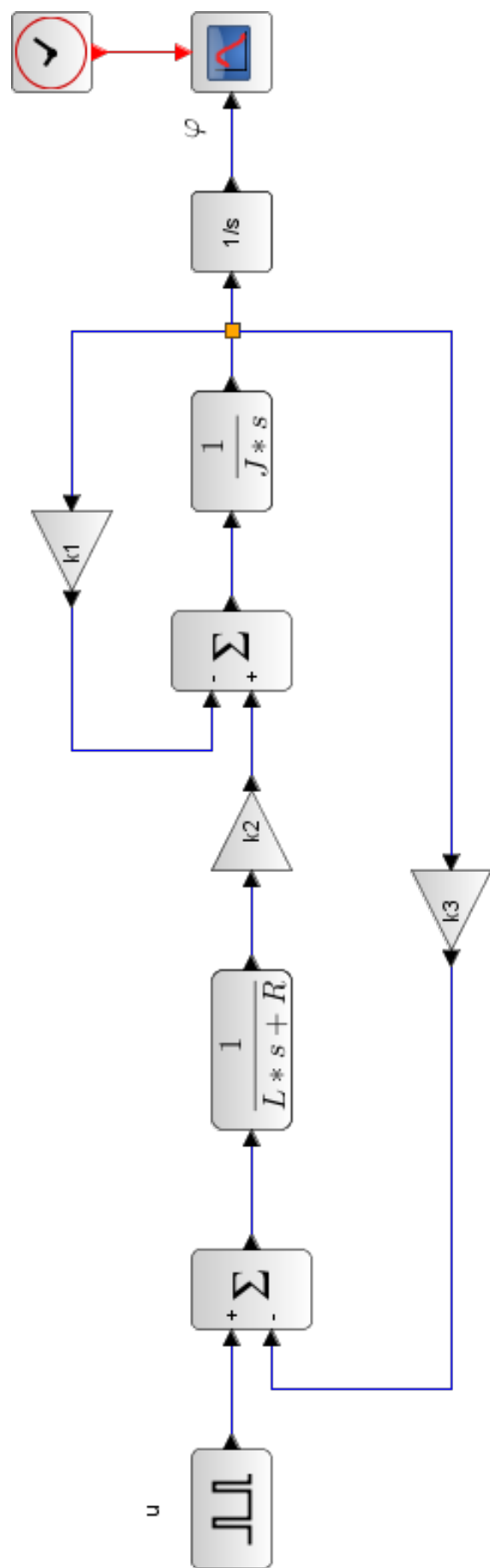


Рисунок 1.12 – Xcos-модель электропривода

## 2 Анализ и синтез систем регулирования

### 2.1 Формула Коши для скалярной системы

Рассмотрим систему с одним входом одним выходом

$$a(p)y = b(p)u, \quad (2.1)$$

где  $p$  – оператор дифференцирования,

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ b(p) &= b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} \end{aligned}$$

– операторные многочлены.

Общее решение уравнения (2.1) равно  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , где  $\bar{y}$  – общее решение однородного уравнения

$$a(p)\bar{y} = 0,$$

$\tilde{y}$  – частное решение неоднородного уравнения

$$a(p)\tilde{y} = b(p)u.$$

Частное решение неоднородного уравнения можно записать в виде интеграла

$$\tilde{y}(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau,$$

где  $g(t, \tau)$  – решение однородного уравнения с начальными условиями

$$\begin{aligned} g(t, \tau) &= g_0, \\ g^{(1)}(t, \tau) &= g_1, \\ &\vdots \\ g^{(n-1)}(t, \tau) &= g_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

заданными при  $t = \tau$ .

Значения начальных условий (2.2) определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} b_0 &= a_{n-1}g_0 + a_{n-2}g_1 + \cdots + g_{n-1}, \\ b_1 &= a_{n-2}g_0 + \cdots + g_{n-2}, \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= g_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим структуру общего решения однородного уравнения

$$a(p)\bar{y} = 0.$$

Если система нестационарная, то аналитическое решение в общем случае построить нельзя. Рассмотрим случай стационарной системы. Обозначим через

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

корни характеристического многочлена  $a(\lambda)$ , а через  $n_1, n_2, \dots, n_m$  кратности корней. Таким образом,

$$a(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i}.$$

Действительному корню  $\lambda$  кратности  $r$  соответствует решение

$$\bar{y}(t) = c(t)e^{\lambda t},$$

где

$$c(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{r-1} t^{r-1}$$

— многочлен степени  $r - 1$  с произвольными коэффициентами.

Паре комплексно сопряжённых корней  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  кратности  $r$  соответствуют решения

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= c_1(t)e^{\operatorname{Re}\lambda t} \sin(\operatorname{Im}\lambda t), \\ \bar{y}(t) &= c_2(t)e^{\operatorname{Re}\lambda t} \cos(\operatorname{Im}\lambda t),\end{aligned}$$

где  $c_1(t)$  и  $c_2(t)$  – многочлены степени  $r - 1$  с произвольными коэффициентами.

Общее решение однородного уравнения строится как сумма указанных частных решений. Таким образом, общее решение уравнения (2.1) равно

$$y(t) = \bar{y}(t) + \int_{t_0}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) называется формулой Коши системы (2.1). Функция  $g(t, \tau)$  называется весовой функцией системы (2.1).

**Пример 2.1.** Построим весовую функцию системы

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = u + 2u^{(1)}.$$

Здесь

$$a(p) = p^2 + 2p + 1, \quad b(p) = 1 + 2p.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(t) = (c_0 + c_1 t)e^{-t},$$

где  $c_0, c_1$  – произвольные константы.

По определению  $g(t, \tau) = \bar{y}(t)$ , причем,

$$g(\tau, \tau) = \bar{y}(\tau) = g_0, \quad g^{(1)}(\tau, \tau) = \bar{y}^{(1)}(\tau) = g_1.$$

Определим  $g_0, g_1$  из системы уравнений (2.3)

$$\begin{aligned}b_0 &= a_1 g_0 + g_1, \\b_1 &= g_0.\end{aligned}$$

Получим  $g_0 = 2, g_1 = -3$ .

Из соотношений

$$\begin{aligned}\bar{y}(\tau) &= (c_0 + c_1 \tau) e^{-\tau} = 2, \\ \bar{y}^{(1)}(\tau) &= (c_1 - c_0 - c_1 \tau) e^{-\tau} = -3\end{aligned}$$

находим  $c_0 = (2 + \tau)e^\tau, c_1 = -e^\tau$ . Весовая функция равна

$$g(t, \tau) = (2 + \tau - t) e^{-(t-\tau)}.$$

## 2.2 Устойчивость скалярных систем

**Определение.** Систему

$$a(p)y = b(p)u$$

будем называть асимптотически устойчивой, если любое решение однородного уравнения

$$a(p)\bar{y} = 0$$

обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = 0.$$

Характеристический многочлен  $a(\lambda)$  асимптотически устойчивой системы называется устойчивым или гурвицевым многочленом.



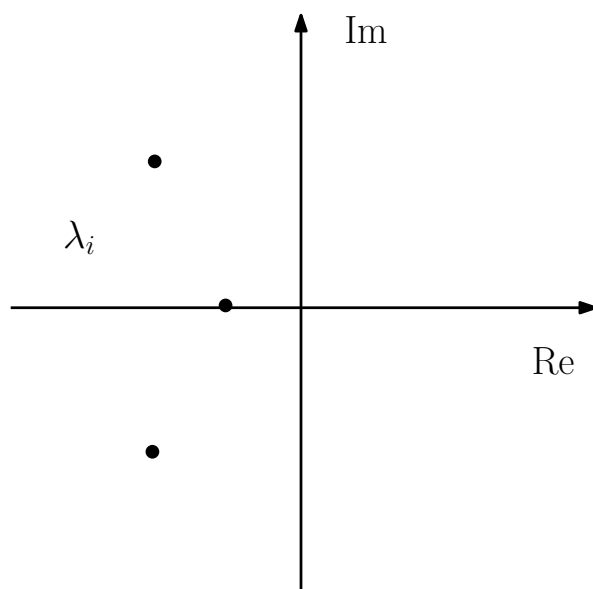


Рисунок 2.1 – Расположение полюсов асимптотически устойчивой системы

**Теорема 2.1** (Спектральный критерий устойчивости). Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все корни характеристического многочлена  $a(\lambda)$  (полюсы системы) имеют отрицательные действительные части (находятся в левой части комплексной плоскости).

**Теорема 2.2** (Критерий Гурвица, параметрический критерий устойчивости). Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

строго больше нуля

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_1 > 0, \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det H > 0.\end{aligned}$$

**Пример 2.2.** Пусть коэффициенты характеристического многочлена зависят от двух параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$

$$a(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\theta_1}{\theta_2}\lambda^2 + \frac{\theta_2}{\theta_1}\lambda + \theta_1\theta_2.$$

Составим матрицу Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} \theta_1/\theta_2 & 1 & 0 \\ \theta_1\theta_2 & \theta_2/\theta_1 & \theta_1/\theta_2 \\ 0 & 0 & \theta_1\theta_2 \end{bmatrix}.$$

По критерию Гурвица все корни многочлена  $a(\lambda)$  лежат в левой части комплексной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 = \frac{\theta_1}{\theta_2} > 0, \quad \Delta_2 = 1 - \theta_1\theta_2 > 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2\theta_1\theta_2 > 0.$$

Таким образом, область асимптотической устойчивости (рисунок 2.2) описывается неравенствами

$$\theta_1\theta_2 > 0, \quad \theta_1\theta_2 < 1.$$

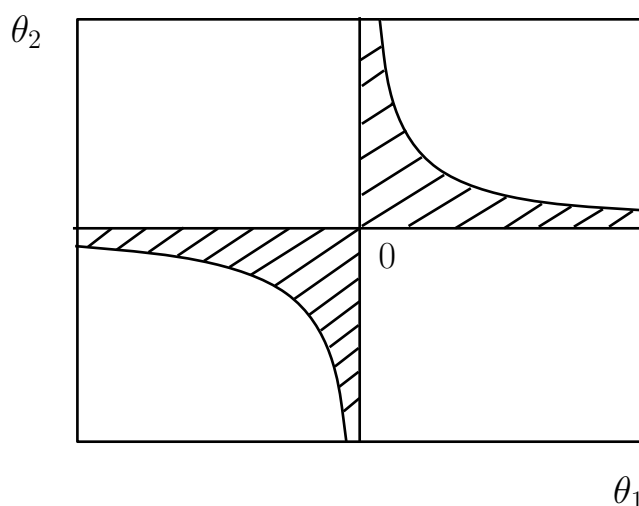


Рисунок 2.2 – Область асимптотической устойчивости

**Определение.** Годографом системы называется кривая движения точки

$$a(j\omega) = (j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$$

на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

**Теорема 2.3** (Критерий Михайлова, частотный критерий устойчивости). Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда годограф начинается на положительной части действительной оси и проходит последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки, не попадая в ноль.

Для построения годографа, функцию  $a(j\omega)$  следует записать в виде

$$a(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega),$$

где  $u(\omega) = \operatorname{Re} a(j\omega)$ ,  $v(\omega) = \operatorname{Im} a(j\omega)$ . Точки годографа определяются координатами  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$ .

**Пример 2.3.** Пусть

$$a(\lambda) = \lambda^5 + 0,9\lambda^4 + 2,31\lambda^3 + 1,251\lambda^2 + 1,234\lambda + 0,3151.$$

Годограф (рисунок 2.3) проходит ровно  $n = 5$  квадрантов комплексной плоскости. Следовательно, система асимптотически устойчива.

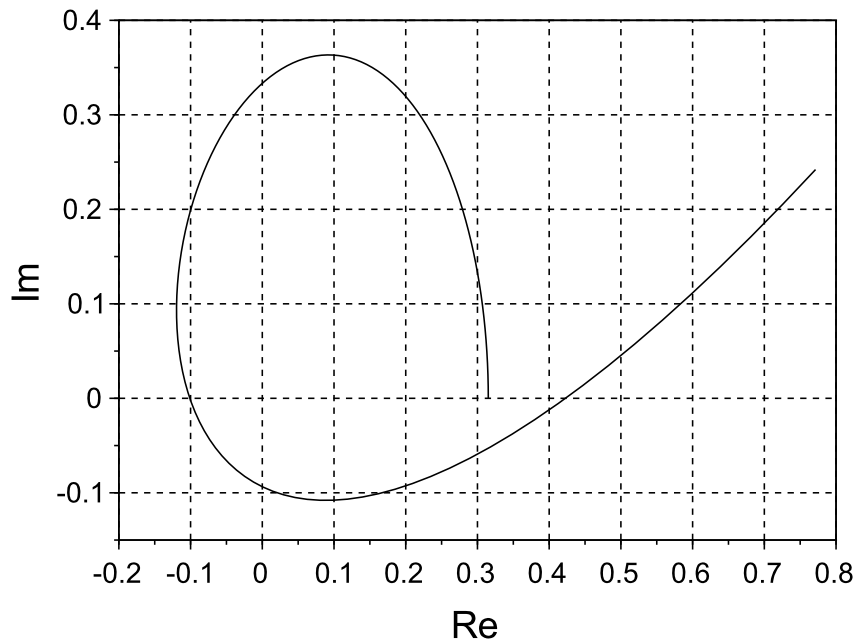


Рисунок 2.3 – Годограф асимптотически устойчивой системы

Рассмотрим понятие робастной (грубой) устойчивости. Пусть задано множество  $A$  многочленов

$$a(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

с коэффициентами

$$a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i], \quad \underline{a}_i \leq \overline{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Систему

$$a(p)y = b(p)u$$

будем называть робастно устойчивой, если эта система асимптотически устойчива при любом  $a(\lambda) \in A$ .

**Теорема 2.4** (Харитонов). *Необходимым и достаточным условием робастной устойчивости является устойчивость четырёх многочленов с коэффициентами*

$$\begin{array}{cccccc}
 \underline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-2}} & \underline{a_{n-3}} & \underline{a_{n-4}} & \dots \\
 \underline{a_n} & \underline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-2}} & \overline{a_{n-3}} & \underline{a_{n-4}} & \underline{a_{n-5}} \quad \dots \\
 \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \underline{a_{n-2}} & \underline{a_{n-3}} & \overline{a_{n-4}} & \overline{a_{n-5}} \quad \dots \\
 \overline{a_n} & \underline{a_{n-1}} & \underline{a_{n-2}} & \overline{a_{n-3}} & \overline{a_{n-4}} & \dots
 \end{array}$$

**Пример 2.4.** Рассмотрим необходимые и достаточные условия робастной устойчивости системы третьего порядка с характеристическим многочленом

$$a(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \quad (2.5)$$

где  $0 < \underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Построим многочлены Харитонова

$$\begin{aligned}
 f_1(\lambda) &= \lambda^3 + \overline{a_1}\lambda^2 + \overline{a_2}\lambda + \underline{a_3}, \\
 f_2(\lambda) &= \lambda^3 + \overline{a_1}\lambda^2 + \underline{a_2}\lambda + \underline{a_3}, \\
 f_3(\lambda) &= \lambda^3 + \underline{a_1}\lambda^2 + \overline{a_2}\lambda + \overline{a_3}, \\
 f_4(\lambda) &= \lambda^3 + \underline{a_1}\lambda^2 + \underline{a_2}\lambda + \overline{a_3}.
 \end{aligned}$$

Применим к этим многочленам критерий Гурвица, получим неравенства

$$\overline{a_1} \overline{a_2} > \underline{a_3}, \quad \overline{a_1} \underline{a_2} > \underline{a_3}, \quad \underline{a_1} \overline{a_2} > \overline{a_3}, \quad \underline{a_1} \underline{a_2} > \overline{a_3}. \quad (2.6)$$

Все неравенства (2.6) выполняются, если выполняется одно из них

$$\underline{a_1} \underline{a_2} > \overline{a_3}. \quad (2.7)$$

Если (2.7) не выполняется, то многочлен

$$a(\lambda) = \lambda^3 + \underline{a_1}\lambda^2 + \underline{a_2}\lambda + \overline{a_3}$$

будет неустойчив. Следовательно, условие (2.7) является необходимым и достаточным условием робастной устойчивости системы с характеристическим многочленом (2.5).

## 2.3 Временные и частотные характеристики

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему

$$a(p)y = b(p)u. \quad (2.8)$$

По формуле Коши

$$y(t) = \bar{y}(t) + \int_{t_0}^t g(t, \tau)u(\tau) d\tau.$$

Из асимптотической устойчивости следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = 0.$$

Таким образом,

$$y(t) \rightarrow \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau)u(\tau) d\tau$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

Асимптотически устойчивая система «забывает» начальные условия и при больших  $t$  ведет себя также как и система с нулевыми начальными условиями.

В случае стационарной системы функция  $g(t, \tau)$  зависит только от разности аргументов

$$g(t, \tau) = g(t - \tau).$$

Поэтому при нулевых начальных условиях

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t g(t)u(t - \tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Интеграл (2.9) называется интегралом свертки. Применяя преобразование Лапласа к (2.9), получим

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s). \quad (2.10)$$

Сравнивая (2.10) с описанием системы (2.8) в частотной области, видим, что весовая функция стационарной системы и передаточная функция связаны преобразованием Лапласа

$$\hat{g}(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt.$$

Рассмотрим реакции асимптотически устойчивой системы на типовые входные воздействия при нулевых начальных условиях.

Реакция на ступеньку  $u(t) = 1$  называется переходной функцией системы

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Типичная переходная функция асимптотически устойчивой системы показана на рисунке 2.4.

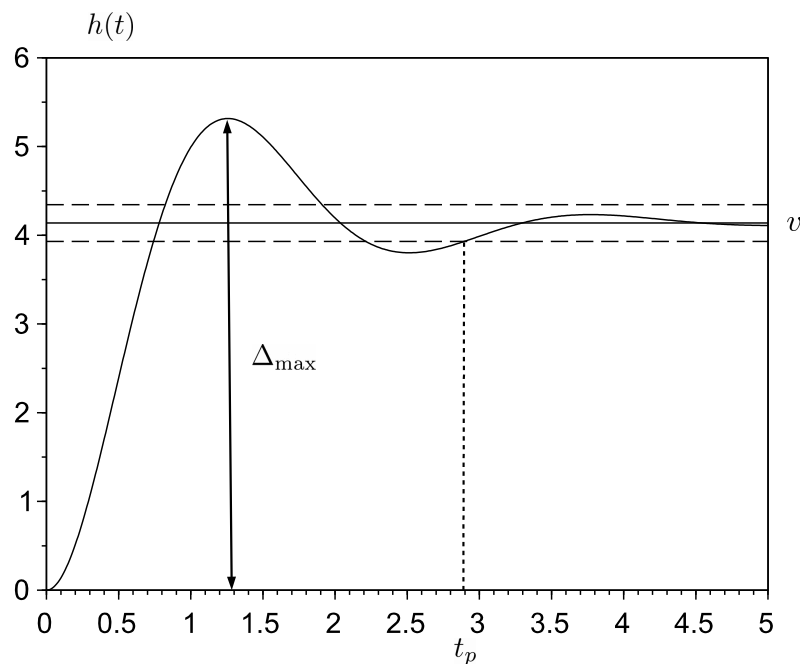


Рисунок 2.4 – Переходная функция системы

По переходной функции оценивают качество системы, вычисляя временные характеристики: время переходного процесса, перерегулирование, число колебаний.

Из асимптотической устойчивости системы следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = v = \frac{b_0}{a_n} = \hat{g}(0).$$

Время переходного процесса  $t_p$  определяется как время, начиная с которого

$$\frac{|y(t) - v|}{v} 100\% < \delta,$$

где  $\delta$  – заданная величина. Обычно  $\delta$  не должно быть больше 5%.

Перерегулирование вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta_{\max} - v}{v} 100\%.$$

В большинстве случаев  $\sigma$  должно быть меньше 20%.

Число колебаний  $N$  – число перемен знака функции  $y(t) - v$  за время  $t_p$ . Как правило  $N$  не должно быть больше 3.

Чем меньше время переходного процесса, перерегулирование и число колебаний, тем лучше качество переходного процесса.

Время переходного процесса зависит от полюсов системы. Чем меньше действительные части полюсов тем меньше время переходного процесса.

Реакция на импульсный вход типа  $\delta$ -функции называется импульсной характеристикой системы. В силу фильтрующего свойства  $\delta$ -функции импульсная характеристика равна весовой функции системы

$$g(t) = \int_0^t g(t - \tau) \delta(\tau) d\tau.$$



Переходная функция и импульсная характеристика связаны соотношением

$$\frac{dh(t)}{dt} = g(t).$$

Рассмотрим реакцию системы на гармонический сигнал

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – фаза сигнала. Выход системы также является гармоническим сигналом

$$y(t) = \bar{A} \sin(\omega t + \bar{\varphi}),$$

с амплитудой  $\bar{A} = A|\hat{g}(j\omega)|$  и фазой  $\bar{\varphi} = \varphi + \arg \hat{g}(j\omega)$ . Следовательно, линейная непрерывная система меняет амплитуду и фазу гармонического сигнала. Частота сигнала при этом не меняется.

Реакция линейной системы на гармонический сигнал описывается частотными характеристиками. Основные частотные характеристики:

$\hat{g}(j\omega)$  – амплитудно-фазовая частотная характеристика;

$|\hat{g}(j\omega)|$  – амплитудная частотная характеристика;

$\arg \hat{g}(j\omega)$  – фазовая частотная характеристика;

$\operatorname{Re} \hat{g}(j\omega)$  – вещественная частотная характеристика;

$\operatorname{Im} \hat{g}(j\omega)$  – мнимая частотная характеристика;

$20 \lg |\hat{g}(j\omega)|$  – логарифмическая амплитудная частотная характеристика.

**Пример 2.5.** На рисунке 2.5 показана реакция асимптотически устойчивой системы с передаточной функцией

$$\hat{g}(s) = \frac{3 + 30s}{s^3 + 3s^2 + 9.25s + 7.25}$$

на типовые входные воздействия: реакция на ступеньку (—); реакция на импульсный вход (---); реакция на гармонический вход (- ·).

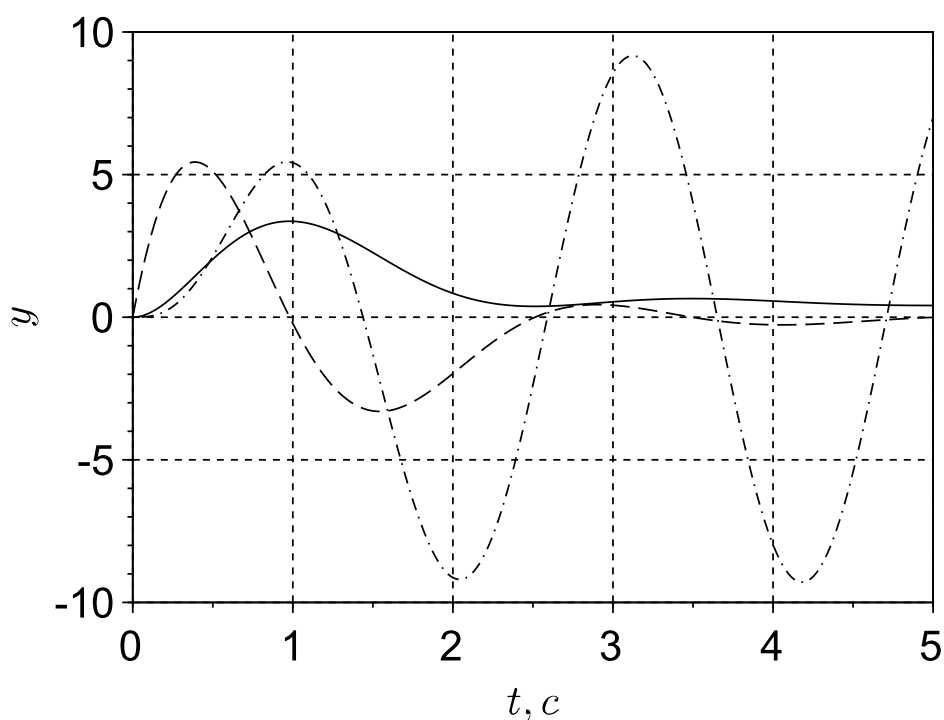


Рисунок 2.5 – Реакция системы на типовые входные воздействия

На рисунке 2.6 представлена диаграмма Боде, на которой показаны логарифмическая амплитудная частотная характеристика и фазовая частотная характеристика. Частота по оси абсцисс откладывается в логарифмическом масштабе.

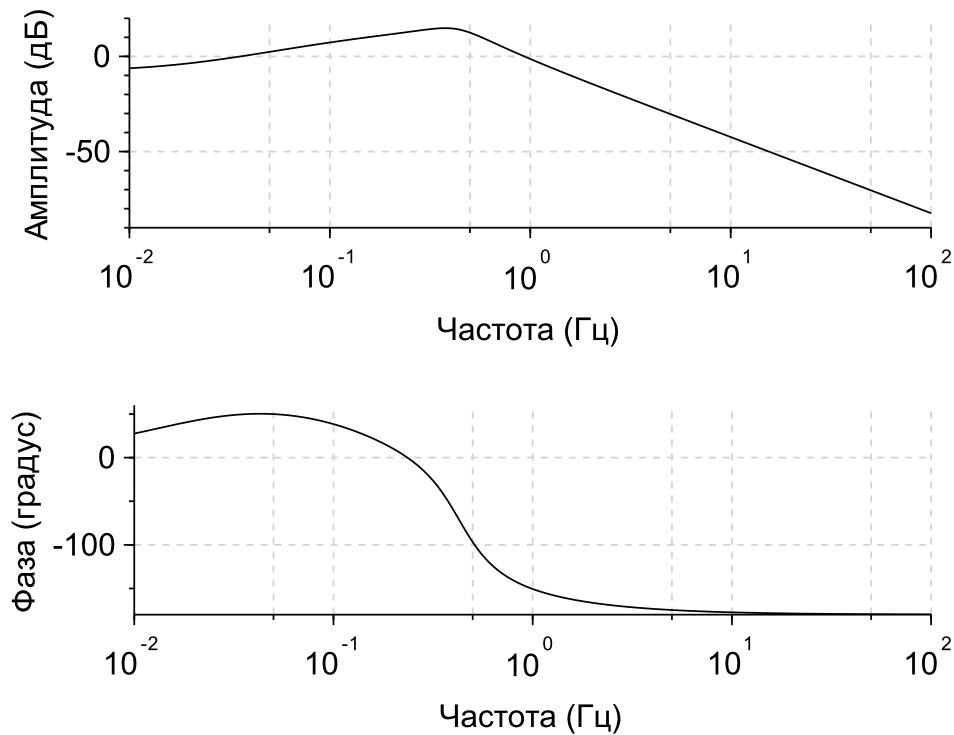


Рисунок 2.6 – Диаграмма Боде

Код программы на языке Scilab:

```
// Система
s=poly(0,'s');
a=s^3+3*s^2+9.25*s+7.25;
b=3+30*s;
sys=syslin('c',b,a);
// Реакции на типовые входные воздействия
T=0:0.01:5;
y1=csim('step',T,sys);
y2=csim('impuls',T,sys);
deff('v=u(t)','v=2*sin(3*t)');
y3=csim(u,T,sys);
scf()
plot(T,y1,'k',T,y2,'k--',T,y3,'k-.');
xlabel('$t$, c$')
```

```

ylabel ( '$y$ ' )
xgrid ( ) ;
// Диаграмма Боде
scf ( ) ;
bode ( sys , 0.01 , 100 )

```

## 2.4 Синтез ПИД-регулятора по заданным полюсам передаточной функции

В системах автоматики часто применяют типовые регуляторы простой структуры такие, как ПИД-регулятор. Передаточная функция ПИД-регулятора

$$\hat{g}_1(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s = \frac{k(s)}{s}, \quad k(s) = k_i + k_p s + k_d s^2$$

содержит три составляющие: пропорциональную, интегральную, дифференцирующую и соответственно три коэффициента  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$ .

Обозначим через

$$\hat{g}_2(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

передаточную функцию объекта регулирования. На рисунке 2.7 показана структурная схема системы с ПИД-регулятором в контуре управления. Здесь  $\bar{y}$  – командный сигнал,  $y$  – выход системы,  $\varepsilon = \bar{y} - y$  – ошибка регулирования. Система должна отрабатывать командный сигнал и обладать приемлемым качеством переходных процессов.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\hat{g}_3(s) = \frac{\hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s)}{1 + \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s)} = \frac{b(s)k(s)}{sa(s) + b(s)k(s)}.$$

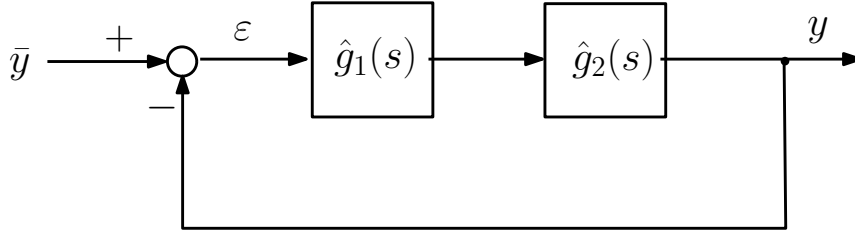


Рисунок 2.7 – Система с регулятором

Характеристический многочлен замкнутой системы

$$\bar{a}(s) = sa(s) + b(s)k(s).$$

Замкнутая система должна быть асимптотически устойчивой. Это означает, что полюсы замкнутой системы, корни многочлена  $\bar{a}(s)$ , должны иметь отрицательные действительные части.

Рассмотрим задачу синтеза ПИД-регулятора по заданным полюсам замкнутой системы для системы второго порядка с передаточной функцией

$$\hat{g}_2(s) = \frac{b_0 + b_1s}{s^2 + a_1s + a_2}.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы равен

$$\begin{aligned} \bar{a}(s) &= (s^2 + a_1s + a_2)s + (b_0 + b_1s)(k_i + k_ps + k_ds^2) = \\ &= (1 + b_1k_d)s^3 + (a_1 + b_0k_d + b_1k_p)s^2 + \\ &\quad + (a_2 + b_0k_p + b_1k_i)s + b_0k_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Зададим желаемый характеристический многочлен замкнутой системы в виде

$$\begin{aligned} \bar{a}(s) &= (1 + b_1k_d)(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = \\ &= (1 + b_1k_d)(s^3 + \bar{a}_1s^2 + \bar{a}_2s + \bar{a}_3). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь  $s_1, s_2, s_3$  – полюсы замкнутой системы. Их можно задать все равными  $-r$ , где  $r > 0$ . В этом случае  $\bar{a}_1 = 3r$ ,  $\bar{a}_2 = 3r^2$ ,  $\bar{a}_3 = r^3$ .

Приравняем коэффициенты многочленов (2.11) и (2.12). Получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов регулятора

$$\begin{aligned} a_1 + b_0 k_d + b_1 k_p &= (1 + b_1 k_d) \bar{a}_1, \\ a_2 + b_0 k_p + b_1 k_i &= (1 + b_1 k_d) \bar{a}_2, \\ b_0 k_i &= (1 + b_1 k_d) \bar{a}_3. \end{aligned}$$

Запишем эту систему в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_0 - b_1 \bar{a}_1 \\ b_0 & b_1 & -b_1 \bar{a}_2 \\ 0 & b_0 & -b_1 \bar{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 - a_1 \\ \bar{a}_2 - a_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix}.$$

Пусть матрица системы невырождена

$$\det \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_0 - b_1 \bar{a}_1 \\ b_0 & b_1 & -b_1 \bar{a}_2 \\ 0 & b_0 & -b_1 \bar{a}_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда коэффициенты регулятора находятся по формуле

$$\begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_0 - b_1 \bar{a}_1 \\ b_0 & b_1 & -b_1 \bar{a}_2 \\ 0 & b_0 & -b_1 \bar{a}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 - a_1 \\ \bar{a}_2 - a_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix}.$$

В частном случае при  $b_1 = 0$  получим

$$k_p = \frac{\bar{a}_2 - a_2}{b_0}, \quad k_i = \frac{\bar{a}_3}{b_0}, \quad k_d = \frac{\bar{a}_1 - a_1}{b_0}.$$

Это начальные значения коэффициентов, которые можно уточнить в зависимости от качества переходного процесса. Например, можно увеличить или уменьшить эти коэффициенты. Коэффициент  $k_p$  влияет на время переходного процесса, коэффициент  $k_d$  – на перерегулирование, коэффициент  $k_i$  – на точность регулирования.

**Пример 2.6.** Рассмотрим задачу синтеза контроллера (регулятора) привода магнитной головки жёсткого диска, схема которого показана на рисунке 2.8.

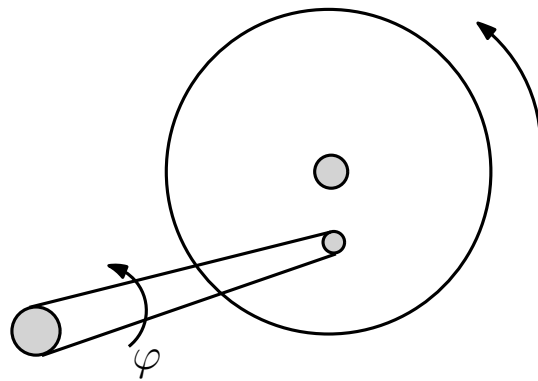


Рисунок 2.8 – Схема привода

Уравнение движения магнитной головки записывающего жёсткого диска имеет следующий вид

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k_1\varphi = k_2I,$$

где

$\varphi$  – угловое положение магнитной головки;

$I$  – ток якоря двигателя;

$J$  – момент инерции магнитной головки;

$c$  – коэффициент вязкого трения;

$k_1$  – коэффициент жесткости пружины;

$k_2$  – моментный коэффициент двигателя.

Значения параметров равны:  $J = 0,01$  кгм<sup>2</sup>;  $c = 0,004$ ;  $k_1 = 10$ ;  $k_2 = 0,05$ .

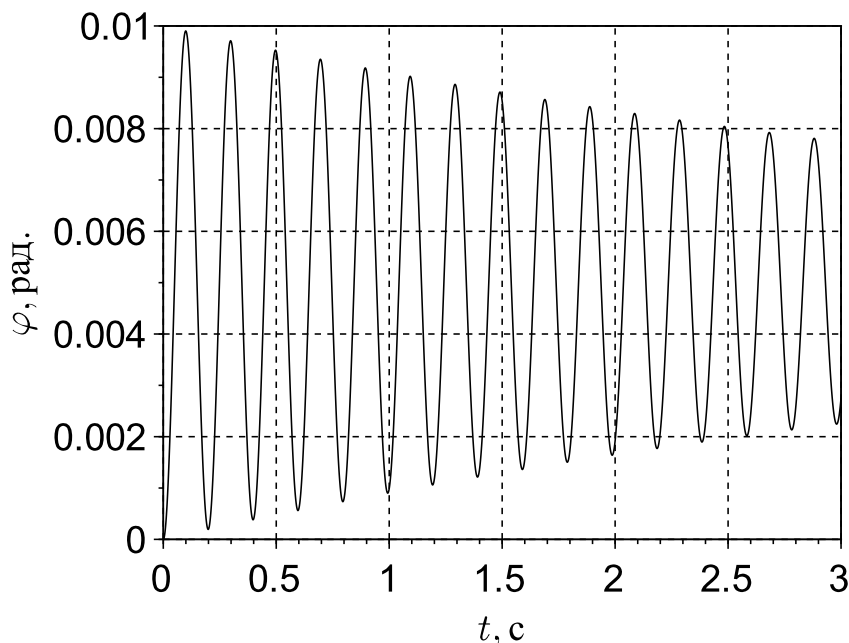


Рисунок 2.9 – Переходный процесс в системе без управления

На рисунке 2.9 показан переходный процесс в разомкнутой системе. Построим контроллер в виде ПИД-регулятора. Зададим желаемый характеристический многочлен замкнутой системы в виде многочлена 3-го порядка, все корни которого равны  $-30$ . Получим значения коэффициентов регулятора:  $k_p = 340$ ;  $k_i = 27000$ ;  $k_d = 179,2$ . На рисунке 2.10 показан переходный процесс в системе с регулятором при командном сигнале  $\bar{y} = 1$ .

Корректируя коэффициенты регулятора

$$k_p = k_p, \quad k_i = 5k_i, \quad k_d = 10k_d,$$

получаем более качественный переходный процесс (рисунок 2.11).



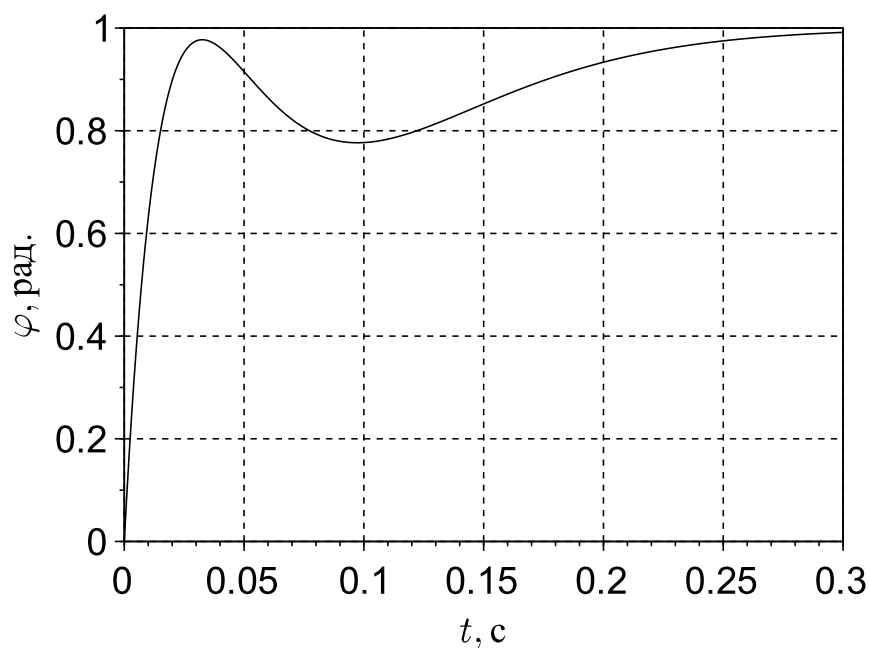


Рисунок 2.10 – Переходный процесс в системе с регулятором

Код программы на языке Scilab:

```
// ПИД-регулятор
s=poly(0,'s');
J=0.01; c=0.004; k1=10; k2=0.05;
a1=c/J; a2=k1/J;
a=s^2+a1*s+a2;
b0=k2/J; b1=0;
b=b0+b1*s;
r=30;
aa1=3*r; aa2=3*r^2; aa3=r^3;
kp=(aa2-a2)/b0;
ki=aa3/b0;
kd=(aa1-a1)/b0;
k=ki+kp*s+kd*s^2;
// Моделирование
```

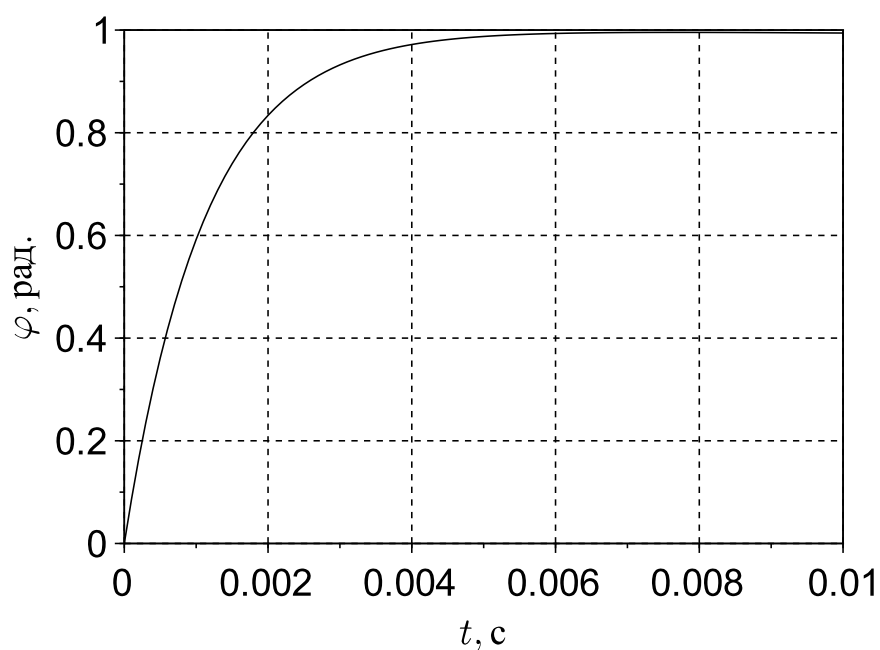


Рисунок 2.11 – Переходный процесс в системе с исправленными коэффициентами регулятора

```
// Система без управления
g=b/a;
sys=syslin('c',g);
T=0:0.001:3;
y=csim('step',T,sys);
scf()
plot(T,y,'k-');
xlabel('$t, с$');
ylabel('$\varphi, рад.$');
xgrid();
// Система с управлением
g=b*k/(a*s+b*k);
sys=syslin('c',g);
T=0:0.001:0.3;
y=csim('step',T,sys);
scf()
```

```

plot (T,y, 'k-');
xlabel ( '$t', c$ );
ylabel ( '$\varphi$, рад.$ ');
xgrid ();
// Корректировка
kp=kp;
ki=ki*5;
kd=kd*10;
k=ki+kp*s+kd*s ^ 2;
g=b*k/( a*s+b*k );
sys=syslin ( 'c', g );
T=0:0.0001:0.01;
y=csim ( 'step', T, sys );
scf ()
plot (T,y, 'k-');
xlabel ( '$t', c$ );
ylabel ( '$\varphi$, рад.$ ');
xgrid ();

```

## 2.5 Синтез ПИД-регулятора по переходной функции

На практике во многих случаях настройка ПИД-регулятора возможна без построения модели объекта управления виде передаточной функции. Рассмотрим один из таких методов синтеза ПИД-регулятора, получивший название метода Циглера-Никольса.

Предположим, что известна переходная функция – реакция объекта регулирования на ступенчатое входное воздействие. По графику переходной функции (рисунок 2.12) определяют наклон  $R = H/L$  и задержку  $\Delta$  переходного процесса. Наклон равен значению производной переходной

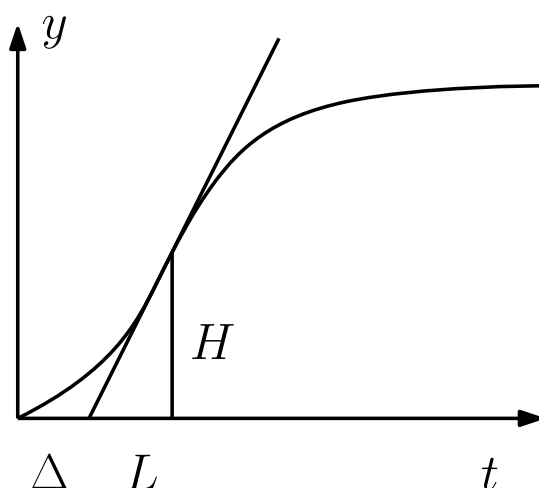


Рисунок 2.12 – Переходная функция

функции в точке изгиба этой функции. Коэффициенты регулятора выбирают равными

$$k_p = \frac{1,2}{R\Delta}, \quad k_i = \frac{0,6}{R\Delta^2}, \quad k_d = \frac{0,6}{R}.$$

**Пример 2.7.** Рассмотрим задачу управления скоростью движения автомобиля (пример 1.1). Необходимо обеспечить заданную скорость движения независимо от сопротивления атмосферы и угла наклона поверхности движения.

В модели автомобиля

$$m\dot{v} = -mgc_r v - \frac{1}{2}\rho c_d S v^2 - mg \sin \theta + F,$$

учтём динамику трансмиссии в виде звена первого порядка

$$T\dot{F} + F = ku.$$

Пусть  $m = 1500$  кг;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $c_r = 0,01$ ;  $\rho = 1,3$ ;  $c_d = 0,32$ ;  $S = 2,4$  м<sup>2</sup>;  $T = 3$ ;  $k = 7000$ . Коэффициенты ПИД-регулятора, рассчитанные по методу Циглера-Никольса, равны:  $k_p = 0,25$ ;  $k_i = 0,0625$ ;  $k_d = 0,25$ .

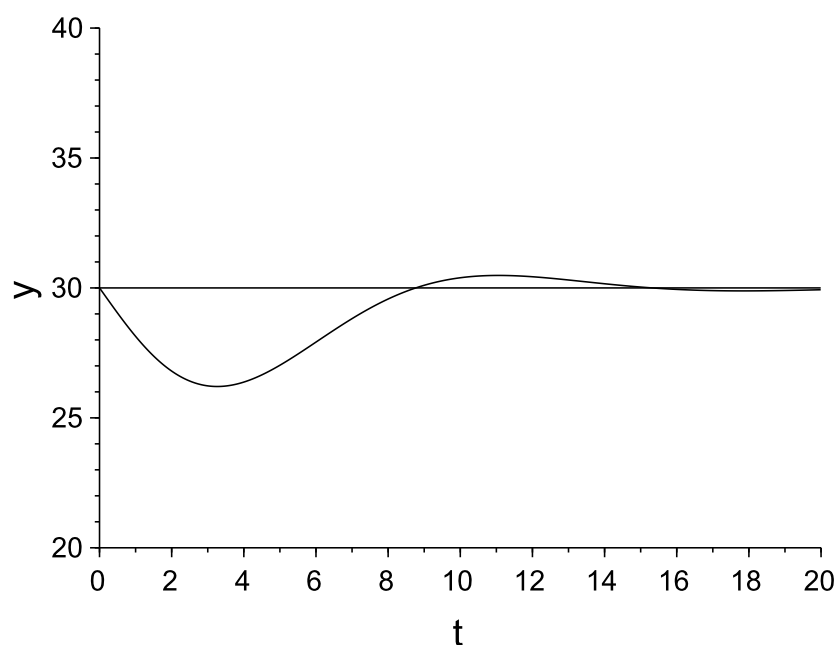


Рисунок 2.13 – Скорость движения автомобиля м/с

На рисунке 2.13 показана реакция автомобиля на изменение угла наклона поверхности движения с 0 до 0,2 рад. Моделирование выполнялось в системе компьютерной математики Scilab с использованием подсистемы компьютерного моделирования Xcos. На рисунке 2.14 показана Xcos-модель автомобиля с ПИД-регулятором в контуре управления.

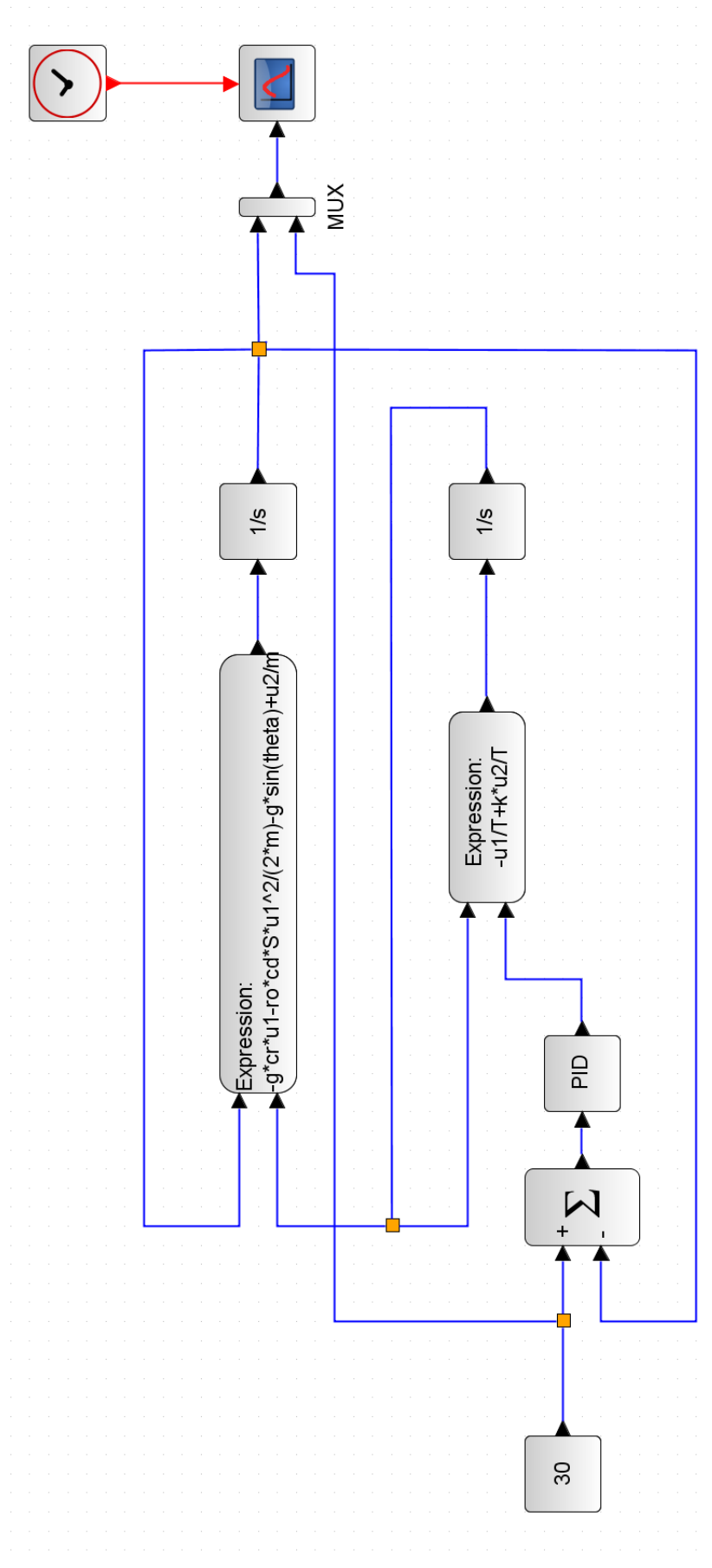


Рисунок 2.14 – Xcos-модель автомобиля

## 3 Управляемость и наблюдаемость

### 3.1 Формула Коши для многосвязной системы

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (3.1)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния,  $u$  –  $m$ -мерный вектор управления.

Формула Коши определяет зависимость состояния системы от управления. Формула Коши строится на основе переходной матрицы системы.

**Определение.** Переходной матрицей системы (3.1) называется матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau)$$

с начальным условием  $\Phi(\tau, \tau) = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

**Теорема 3.1** (Формула Коши непрерывной системы). *Решение уравнения (3.1) равно*

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau.$$

Для стационарной системы переходная матрица определяется в виде матричной экспоненты

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)},$$

где

$$e^{At} = E + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Формула Коши для стационарной системы принимает вид

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau.$$

**Пример 3.1.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}$$

Матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$e^{At} = E + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формула Коши принимает вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} t - \tau \\ 1 \end{bmatrix}u(\tau) d\tau.$$

## 3.2 Управляемость

Рассмотрим многосвязную систему, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{3.2}$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния,  $u$  —  $m$ -мерный вектор управления.



**Определение.** Система (3.2) полностью управляема на интервале времени  $[t_0, t_1]$ , если для любого начального состояния  $x(t_0) = x_0$  и любого конечного состояния  $x(t_1) = x_1$  существует управление  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , которое переводит систему из  $x_0$  в  $x_1$ .

В дальнейшем будем говорить об управляемости системы, подразумевая полную управляемость.

Рассмотрим условия управляемости линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u. \quad (3.3)$$

**Теорема 3.2** (Критерий управляемости нестационарной системы). Система (3.3) управляема на интервале времени  $[t_0, t_1]$  тогда и только тогда, когда матрица

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_1, t) dt$$

невыврожденная.

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (3.4)$$

Обозначим через

$$X(A, B) = \begin{bmatrix} B, & AB, & \dots, & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

матрицу, состоящую из  $n$  строк и  $nt$  столбцов. Матрицу  $X(A, B)$  будем называть матрицей управляемости системы (3.4).

**Теорема 3.3** (Параметрический критерий управляемости). Система (3.4) управляема на любом из интервалов времени  $[t_0, t_1]$  тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } X(A, B) = n.$$

**Теорема 3.4** (Спектральный критерий управляемости). Система (3.4) управляема на любом из интервалов времени  $[t_0, t_1]$  тогда и только тогда, когда для любого собственного числа  $\lambda$  матрицы  $A$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A, & B \end{bmatrix} = n.$$

Для стационарных систем вместо «управляемость системы» принято говорить «управляемость пары  $(A, B)$ ».

*Замечание 3.1.* Ранг матрицы есть максимальный порядок отличного от нуля минора матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк и максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы.

В системе Scilab ранг матрицы можно вычислить с помощью функции `rank(A)`. Функция `contr_mat(A,B)` возвращает матрицу управляемости. С помощью функции `contr(A,B)` можно провести анализ управляемости пары  $(A, B)$ .

**Пример 3.2.** Рассмотрим систему второго порядка с одним управлением

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 + b_2 u. \end{aligned}$$

Матрицы системы равны

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости

$$X(A, B) = \begin{bmatrix} B, & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 b_1 \\ b_2 & a_2 b_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости квадратная, следовательно,

$$\text{rank } X(A, B) = 2$$

тогда и только тогда, когда

$$\det X(A, B) = (a_2 - a_1)b_1b_2 \neq 0.$$

Таким образом, система управляема только, если  $a_1 \neq a_2$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $b_2 \neq 0$ .

### 3.3 Наблюдаемость

Рассмотрим многосвязную систему с неполной информацией о состоянии

$$\dot{x} = f(x, t), \quad y = h(x, t), \quad (3.5)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния,  $y$  —  $l$ -мерный вектор измерений. Неполнота информации означает, что число измерений меньше числа переменных состояния ( $l < n$ ).

**Определение.** Система (3.5) полностью наблюдаема на интервале времени  $[t_0, t_1]$ , если для любых двух траекторий  $x(t)$  и  $\bar{x}(t)$  из условия  $x(t_0) \neq \bar{x}(t_0)$  следует, что  $y(t) \neq \bar{y}(t)$  при некотором  $t \in [t_0, t_1]$ .

Далее будем говорить о наблюдаемости системы, предполагая полную наблюдаемость.

Для линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad y = C(t)x \quad (3.6)$$

справедлива

**Теорема 3.5** (Критерий наблюдаемости нестационарной системы). Система (3.6) наблюдаема на интервале времени  $[t_0, t_1]$  тогда и только тогда, когда матрица

$$V(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

невыврожденная.

Рассмотрим критерии наблюдаемости линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx. \quad (3.7)$$

Обозначим через

$$Y(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

матрицу, состоящую из  $nl$  строк и  $n$  столбцов. Матрицу  $Y(A, C)$  будем называть матрицей наблюдаемости системы (3.7).

**Теорема 3.6** (Параметрический критерий наблюдаемости). Система (3.7) наблюдаема на любом из интервалов времени  $[t_0, t_1]$  тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } Y(A, C) = n.$$

**Теорема 3.7** (Спектральный критерий наблюдаемости системы). Система (3.7) наблюдаема на любом из интервалов времени  $[t_0, t_1]$  тогда и только тогда, когда для любого собственного числа  $\lambda$  матрицы  $A$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n.$$

**Пример 3.3.** Рассмотрим систему второго порядка с одним измерением

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2, \\ y &= c_1x_1 + c_2x_2.\end{aligned}$$

Необходимо определить те значения  $c_1$  и  $c_2$ , при которых система наблюдаема.

Матрицы системы равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу наблюдаемости

$$Y(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 - 2c_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\text{rank } Y(A, C) = 2$$

тогда и только тогда, когда

$$\det Y(A, C) = (c_1 - c_2)^2 \neq 0.$$

Согласно параметрическому критерию наблюдаемости система наблюдаема при всех  $c_1 \neq c_2$ .

В дальнейшем будем говорить о наблюдаемости пары  $(A, C)$ , подразумевая наблюдаемость системы (3.7).

Свойства управляемости и наблюдаемости дуальны в том смысле, что пара  $(A, B)$  управляема тогда и только тогда, когда наблюдаема пара  $(A^T, B^T)$ .

### 3.4 Анализ управляемости и наблюдаемости электропривода

Рассмотрим модель электропривода (1.3)-(1.5). Матрицы системы равны

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{J} & \frac{k_2}{J} \\ 0 & -\frac{k_3}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости

$$X(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_2}{JL} \\ 0 & \frac{k_2}{JL} & -\frac{k_1 k_2}{J^2 L} - \frac{k_2 R}{JL^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & -\frac{k_2 k_3}{JL^2} + \frac{R^2}{L^3} \end{bmatrix}.$$

Система управляема, поскольку  $\text{rank } X(A, B) = 3$ .

Пусть измеряется угловое положение вала двигателя

$$y = \varphi.$$

Угловая скорость и сила тока не измеряются. Тогда

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank } Y(A, C) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{J} & \frac{k_2}{J} \end{bmatrix} = 3.$$

Система наблюдаема.

Пусть измеряются угловая скорость и сила тока

$$y = \begin{bmatrix} \omega \\ I \end{bmatrix}.$$

В этом случае

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y(A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1}{J} & \frac{k_2}{J} \\ 0 & -\frac{k_3}{L} & -\frac{R}{L} \\ 0 & \frac{k_1^2}{J^2} - \frac{k_2 k_3}{JL} & -\frac{k_1 k_2}{J^2} - \frac{k_2 R}{JL} \\ 0 & \frac{k_1 k_3}{JL} + \frac{k_3 R}{L^2} & -\frac{k_2 k_3}{JL} + \frac{R^2}{L^2} \end{bmatrix}.$$

Система ненаблюдаема, поскольку  $\text{rank } Y(A, C) = 2$ .

## 4 Устойчивость многосвязных систем

### 4.1 Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим стационарную нелинейную систему

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

с нулевым положением равновесия  $f(0) = 0$ .

**Определение.** Систему (4.1) будем называть устойчивой, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любой траектории  $x(t)$  из условия  $\|x(0)\| \leq \delta$  следует  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  при  $t \geq 0$ .

Здесь

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

– евклидова норма вектора.

**Определение.** Систему (4.1) будем называть асимптотически устойчивой, если эта система просто устойчива и существует  $h > 0$  такое, что для любой траектории  $x(t)$  из условия  $\|x(0)\| \leq h$  следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Далее будем рассматривать дифференцируемые по  $x$  функции  $V(x)$  такие, что  $V(0) = 0$ .

Производная функции  $V(x)$  в силу системы (4.1) (на траекториях системы) равна

$$\dot{V}(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \dot{x} = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x),$$



где

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Под окрестностью начала координат будем понимать множество  $x$  таких, что  $\|x\| \leq c$ , для некоторого  $c > 0$ .

Следующие теоремы формулируют достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости системы (4.1).

**Теорема 4.1.** *Если существует функция  $V(x)$ , обладающая свойствами:*

- 1)  $V(x) > 0, \quad x \neq 0;$
- 2) *в некоторой окрестности начала координат*

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

*то система (4.1) устойчива.*

**Теорема 4.2.** *Если существует функция  $V(x)$ , обладающая свойствами:*

- 1)  $V(x) > 0, \quad x \neq 0;$
- 2) *в некоторой окрестности начала координат*

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \neq 0,$$

*то система (4.1) асимптотически устойчива.*

Функции  $V(x)$ , удовлетворяющие условиям теорем 4.1, 4.2, будем называть функциями Ляпунова.

**Пример 4.1.** Исследуем на устойчивость систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 3x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 - x_2^3.\end{aligned}$$

Функцию Ляпунова запишем в виде квадратичной формы

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Заметим, что  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ .

Производная функции Ляпунова в силу системы

$$\dot{V}(x) = -(x_1 - x_2^2)^2 \leq 0.$$

Следовательно, система устойчива.

**Пример 4.2.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V(x) = ax_1^2 + bx_2^4,$$

где  $a > 0$  и  $b > 0$ . Производная функции Ляпунова в силу системы равна

$$\dot{V}(x) = 2ax_1x_2^3 - 2ax_1^4 - 4bx_1x_2^3 - 4bx_2^4.$$

При  $a = 2b$  получим

$$\dot{V}(x) = -4b(x_1^4 + x_2^4).$$

Следовательно,

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

Система асимптотически устойчива.

## 4.2 Анализ устойчивости по собственным числам матрицы системы

Рассмотрим условия асимптотической устойчивости линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax. \quad (4.2)$$

Если система (4.2) асимптотически устойчива, то любая траектория  $x(t)$  этой системы обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

**Теорема 4.3** (Спектральный критерий). *Для асимптотической устойчивости системы (4.2) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы  $A$  имели отрицательные действительные части.*

Обозначим через

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

характеристический многочлен матрицы  $A$ . Собственные числа матрицы  $A$  есть корни  $\Delta(\lambda)$ . Следовательно, система (4.2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда корни многочлена  $\Delta(\lambda)$  имеют отрицательные действительные части. Последнее можно проверить с помощью критериев Гурвица и Михайлова.

**Пример 4.3.** Матрица системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 22x_1 - 13x_2, \\ \dot{x}_2 &= 45x_1 - 26x_2 \end{aligned}$$

равна

$$A = \begin{bmatrix} 22 & -13 \\ 45 & -26 \end{bmatrix}.$$

Составим характеристический многочлен

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

и найдем его корни

$$\lambda_1 = -2 + 3j, \quad \lambda_2 = -2 - 3j.$$

Действительные части корней строго меньше нуля. Следовательно, система асимптотически устойчива.

### 4.3 Анализ устойчивости на основе решения уравнения Ляпунова

Для системы (4.2) функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Q x,$$

где  $Q$  – симметричная положительно определённая матрица. Следующая теорема формулирует необходимое и достаточное условие положительной определённости симметричной матрицы.

**Теорема 4.4** (Критерий Сильвестра). *Симметричная матрица*

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

*является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры этой матрицы больше нуля*

$$\Delta_1 = q_{11} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \dots \quad \det Q > 0.$$

**Определение.** Линейное матричное уравнение

$$QA + A^T Q = -P,$$

где  $P$  – заданная симметричная положительно определённая матрица,  $Q$  – искомая матрица, называется уравнением Ляпунова.

**Теорема 4.5.** *Справедливы утверждения:*

- 1) *Если система (4.2) асимптотически устойчива, то матричное уравнение Ляпунова имеет единственное симметричное положительно определённое решение  $Q$  при любой симметричной положительно определённой матрице  $P$ .*
- 2) *Если при некоторой симметричной положительно определённой матрице  $P$  матричное уравнение Ляпунова имеет единственное симметричное положительно определённое решение  $Q$ , то система асимптотически устойчива.*

Из теоремы 4.5 следует, что для проверки асимптотической устойчивости системы (4.2) достаточно решить уравнение Ляпунова для одной симметричной положительно определённой матрицы  $P$ . Например, для единичной матрицы.

**Пример 4.4.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Составим уравнение Ляпунова с единичной матрицей в правой части

$$QA + A^T Q = -E.$$

Решение уравнения Ляпунова сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы  $Q$ . Решение существует, является единственным и симметричным

$$Q = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Положительная определённость матрицы  $Q$  подтверждается критерием Сильвестра. Следовательно, система асимптотически устойчива.

В системе Scilab решение уравнения Ляпунова можно получить с помощью функции `lyap`.

## 4.4 Линеаризация и анализ устойчивости по линейному приближению

Рассмотрим стационарную нелинейную систему

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.3}$$

с нулевым положением равновесия.

Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора в т.  $x = 0$ . Учитывая, что  $f(0) = 0$ , получим

$$f(x) = f(0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + o(\|x\|) = Ax + \varphi(x).$$

Здесь

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0}.$$

Если пренебречь влиянием  $\varphi(x)$ , то получим линейную систему

$$\dot{x} = Ax,$$

которая приближённо описывает систему (4.3) при малых  $x$ .

**Теорема 4.6.** Система (4.3) асимптотически устойчива, если все собственные числа матрицы линеаризованной системы имеют отрицательные действительные части, и неустойчива, если хотя бы одно из собственных чисел имеет положительную действительную часть.

**Пример 4.5.** Движение маятника при наличии вязкого трения описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= -mgl \sin \varphi - c\omega, \end{aligned}$$

где

$\varphi$  – угол отклонения маятника от нулевого положения равновесия;

$\omega$  – угловая скорость маятника;

$J = ml^2$  – момент инерции маятника;

$m$  – масса маятника;

$l$  – длина маятника;

$c$  – коэффициент вязкого трения.

Введем переменные состояния:  $x_1 = \varphi$ ;  $x_2 = \omega$ . Уравнение системы в пространстве состояний принимает вид

$$\dot{x} = f(x),$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{J} \sin x_1 - \frac{c}{J} x_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица линеаризованной системы равна

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J} & -\frac{c}{J} \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы  $A$  есть корни характеристического многочлена

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{J}\lambda + \frac{mgl}{J}.$$

Собственные числа равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2J} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4J^2} - \frac{mgl}{J}}.$$

Действительные части собственных чисел меньше нуля. Следовательно, система асимптотически устойчива.



## 5 Модальный синтез многосвязных систем

### 5.1 Синтез систем с полной информацией о состоянии

Объект управления описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния,  $u$  –  $m$ -мерный вектор управления,  $A$ ,  $B$  – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Необходимо построить управление в виде обратной связи по состоянию  $u = Fx$ , при котором замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BF)x$$

асимптотически устойчива.

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы замкнутой системы  $A + BF$  находились в левой части комплексной плоскости.

Задача модального синтеза или задача модального управления заключается в выборе матрицы обратной связи из условия совпадения собственных чисел матрицы замкнутой системы с заданным набором значений.

Следующая теорема формулирует необходимые и достаточные условия существования решения задачи модального синтеза.

**Теорема 5.1.** *Все собственные числа матрицы  $A + BF$  можно произвольно задать, выбирая матрицу обратной связи  $F$ , тогда и только тогда, когда пара  $(A, B)$  управляема.*

Существует взаимно-однозначное соответствие между собственными числами матрицы и коэффициентами ее характеристического многочлена. Поэтому задачу модального синтеза можно сформулировать как задачу назначения желаемого характеристического многочлена матрицы  $A + BF$ .

**Пример 5.1.** Боковое движение самолета (рисунок 5.1) описывается системой уравнений [7]

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,098 & 0 & 0,038 & 0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,089 & 0 & -1,52 & -3,4 \\ 0 & 1 & 0,38 & 0,11 & -0,09 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,63 & 0,16 \\ 0 & 0 \\ 0,9 & -2,3 \\ -0,016 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор состояния включает переменные:

$x_1 = \tilde{\psi}$  – отклонение угла курса (рад);

$x_3 = \tilde{\gamma}$  – отклонение угла крена (рад);

$x_5 = \tilde{\beta}$  – отклонение угла скольжения (рад);

$x_2 = \tilde{\omega}_y$ ,  $x_4 = \tilde{\omega}_x$  – проекции вектора угловой скорости на связанные оси координат (рад/с).

Вектор управления состоит из угла отклонения руля направления  $u_1 = \tilde{\delta}_n$  (рад) и угла отклонения элеронов  $u_2 = \tilde{\delta}_\epsilon$  (рад).

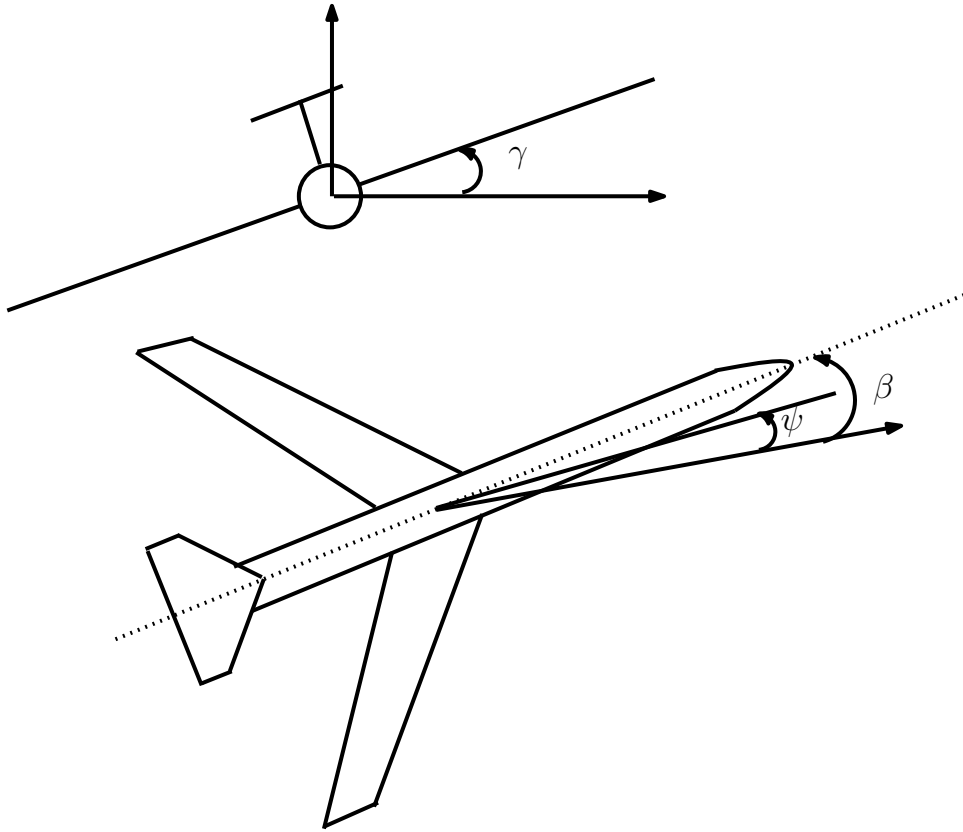


Рисунок 5.1 – Боковое движение самолета

Необходимо построить стабилизирующее управление в виде обратной связи по состоянию. Зададим желаемые собственные числа матрицы замкнутой системы все равными «-2». Для вычисления матрицы обратной связи применим функцию `prol` системы Scilab. Матрица обратной связи равна:

$$F = \begin{bmatrix} 3,43 & 6,72 & 1,44 & 0,70 & 1,67 \\ -7,22 & 2,71 & 4,79 & 2,22 & 8,19 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутой системы при на-

чальном состоянии

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

показаны на рисунке 5.2.

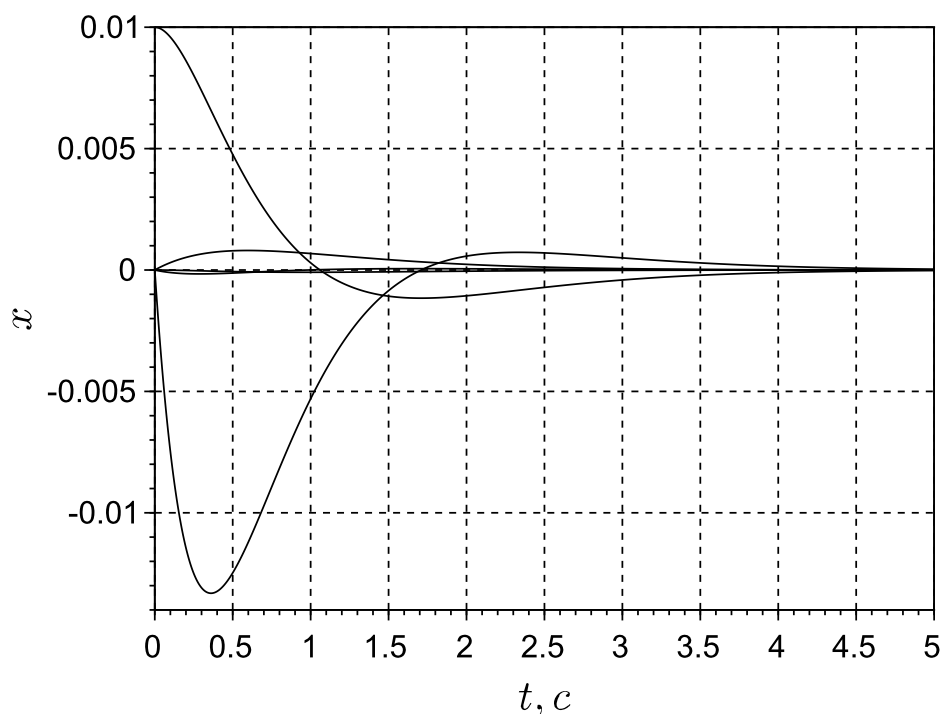


Рисунок 5.2 – Переходные процессы в замкнутой системе

## 5.2 Наблюдатели состояния

Рассмотрим линейную многосвязную стационарную систему с неполной информацией о состоянии

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния,  $u$  –  $m$ -мерный вектор управления,  $y$  –  $l$ -мерный вектор измерений (вектор выхода).

Стабилизирующее управление будем искать в виде статической обратной связи по выходу  $u = Fu$ . Замкнутая система описывается уравнением

$$\dot{x} = (A + BFC)x.$$

Следующие теоремы формулируют достаточные условия существования решения задачи модального синтеза для системы с обратной связью по выходу.

**Теорема 5.2.** *Если пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема и  $m + l - 1 \geq n$ , то все собственные числа матрицы  $A + BFC$  можно произвольно задать, выбирая матрицу  $F$ .*

**Теорема 5.3.** *Если  $ml \geq n$ , то «почти для всех» матриц  $A, B, C$  таких, что пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема, собственные числа матрицы  $A + BFC$  можно произвольно задать, выбирая матрицу  $F$ .*

Статическая обратная связь по выходу имеет существенные ограничения, связанные с размерностью системы. Например, при  $n = 5$ ,  $m = 2$ ,  $l = 2$  условия теорем 5.2, 5.3 не выполняются.

Рассмотрим динамическую обратную связь по выходу, в которой применяется наблюдатель состояния.

Наблюдатель – динамическая система, предназначенная для построения оценки состояния. Обозначим через  $\bar{x}$  оценку состояния, через  $\varepsilon = x - \bar{x}$  ошибку оценки. Предположим, что ошибка оценки обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Тогда стабилизирующее управление можно строить в виде обратной связи по оценке состояния

$$u = F\bar{x}.$$

Рассмотрим наблюдатель полного порядка (наблюдатель Калмана)

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu - L(y - C\bar{x}),$$

где  $L$  – матрица коэффициентов наблюдателя.

Уравнение для ошибки оценки имеет следующий вид

$$\dot{\varepsilon} = (A + LC)\varepsilon.$$

Это тоже динамическая система и эта система должна быть асимптотически устойчивой.

Матрицу  $L$  можно определить, решая задачу модального синтеза для матрицы  $\Psi = A + LC$ . Собственные числа  $\Psi$  совпадают с собственными числами  $\Psi^T = A^T + C^T L^T$ . Собственные числа  $\Psi^T$  можно произвольно задать, выбирая матрицу  $L$ , тогда и только тогда, когда пара  $(A^T, C^T)$  управляема.

В силу дуальности свойств управляемости и наблюдаемости пара  $(A^T, C^T)$  управляема, если и только если наблюдаема  $(A, C)$ . Таким образом, условие наблюдаемости является необходимым и достаточным условием существования решения задачи модального синтеза наблюдателя.

Замкнутая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BF\bar{x}, \\ \dot{\bar{x}} &= -LCx + (A + BF + LC)\bar{x},\end{aligned}$$

или уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Phi x - BF\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= \Psi\varepsilon,\end{aligned}$$

где  $\Phi = A + BF$ .

В целом система с наблюдателем является асимптотически устойчивой, если собственные числа матриц  $\Phi$  и  $\Psi$  имеют отрицательные действительные части.

Таким образом, задача модального синтеза системы с наблюдателем сводится к решению двух задач модального синтеза для системы с полной информацией о состоянии.

**Пример 5.2.** Вновь рассмотрим задачу стабилизации бокового движения самолета. Предположим, что измерению доступны угол курса и угол крена. Следовательно, матрица

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверка показывает, что система наблюдаема. Рассчитаем матрицу коэффициентов наблюдателя из условия, что все собственные числа матрицы  $A + LC$  равны «-3». Получим

$$L = \begin{bmatrix} -5,9 & -0,68 \\ -10,68 & -3,93 \\ -4,35 & -7,39 \\ -15,7 & -14,5 \\ 4,76 & 5,39 \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $F$  возьмём из примера 5.1.

Моделирование замкнутой системы с наблюдателем выполнялось при начальных условиях

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}^T.$$

На рисунке 5.3 показаны графики для угла скольжения и оценки угла скольжения.

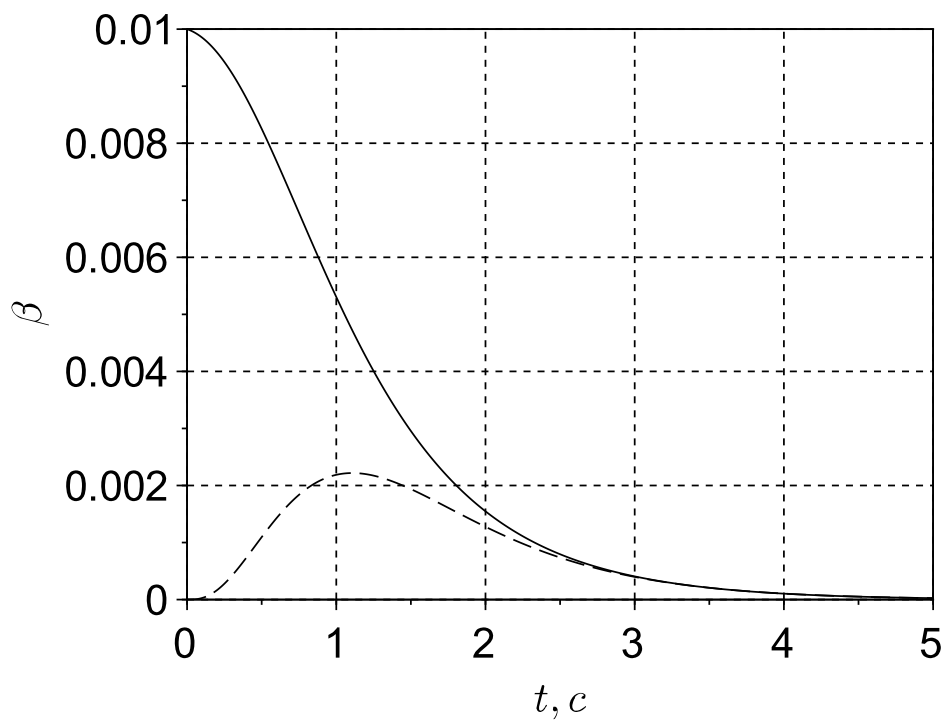


Рисунок 5.3 – Угол скольжения (—) и оценка угла скольжения (---)

Код программы на языке Scilab:

```
// Система с наблюдателем
function xdot=f(t,x)
    xdot=AA*x;
endfunction
// Матрицы системы
A=[ 0      1      0      0      0
    0     -0.098  0      0.038  -0.75
    0      0      0      1      0
    0     -0.089  0     -1.52  -3.4
    0      1      0.38   0.11  -0.09 ];
B=[ 0      0
    -0.63  0.16
    0      0
```



```

        0.9      -2.3
        -0.016   0      ];
C=[1  0  0  0  0
    0  0  1  0  0];
// Матрица F
r=2;
sp=[-r  -r  -r  -r  -r ];
F=-ppol(A,B,sp);
// Матрица L
C=[1  0  0  0  0
    0  0  1  0  0];
r=3;
sp=[-r  -r  -r  -r  -r ];
L=-ppol(A',C',sp)';
// Моделирование
AA=[ A      B*F
     -L*C  A+B*F+L*C];
x0=[0  0  0  0  0.01  0  0  0  0  0]';
T=0:0.01:5;
X=ode(x0,0,T,f);
scf();
plot(T,X(5,:), 'k-',T,X(10,:), 'k--');
xlabel(' $t$, c$ ');
ylabel(' $\backslash beta$ ');
xgrid();

```

### 5.3 Синтез систем слежения

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + v, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u$  –  $m$ -мерный вектор управления;  $y$  –  $l$ -мерный вектор выхода;  $v$  – постоянное неконтролируемое возмущение на входе системы.

Необходимо построить управление в виде обратной связи, при котором выход системы стремится к заданному значению командного сигнала  $\bar{y}$  независимо от начальных условий.

Обозначим через  $\varepsilon = \bar{y} - y$  ошибку слежения. Уравнения системы дополним уравнением для интеграла от ошибки слежения

$$\dot{z} = \varepsilon.$$

Управление будем искать в виде обратной связи с интегральной составляющей

$$u = Fx + Gz.$$

Если замкнутая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BF)x + BGz + v, \\ \dot{z} &= -Cx + \bar{y}\end{aligned}$$

асимптотически устойчива, то состояние этой системы стремится к некоторому постоянному значению. Из уравнения для  $z$  следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) = 0$  и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо выбрать матрицы обратной связи  $F$  и  $G$  так, чтобы собственные числа матрицы замкнутой системы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A + BF & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

имели отрицательные вещественные части.

Матрицу замкнутой системы можно записать в виде

$$\Gamma = \bar{A} + \bar{B}\bar{F},$$

где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix}.$$

Следовательно, все собственные числа матрицы  $\Gamma$  можно произвольно задать, выбирая матрицы обратной связи  $F$  и  $G$  тогда и только тогда, когда пара  $(\bar{A}, \bar{B})$  управляема.

Следующая теорема формулирует необходимые и достаточные условия существования решения задачи модального синтеза.

**Теорема 5.4.** *Все собственные числа матрицы  $\Gamma$  можно произвольно задать, выбирая матрицы обратной связи  $F$  и  $G$ , тогда и только тогда, когда пара  $(A, B)$  управляема и*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + l.$$

Матрицы обратной связи можно найти решая задачу модального синтеза для матрицы замкнутой системы как задачу для системы с обратной связью по состоянию.

## 5.4 Управление электроприводом

Рассмотрим задачу управления угловым положением вала электропривода (рисунок 1.1). В модели электропривода (1.3), (1.4), (1.5) учтём момент внешних сил  $M_c$  как неконтролируемое возмущение. Получим систему уравне-

ний

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= -k_1\omega + k_2I + M_c, \\ L\dot{I} + RI &= u - k_3\omega.\end{aligned}$$

Необходимо построить управление в виде обратной связи, которое обеспечивает заданное угловое положение вала электропривода, независимо от момента внешних сил.

Уравнения системы в пространстве состояний имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + v, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ I \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_c}{J} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{J} & \frac{k_2}{J} \\ 0 & -\frac{k_3}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пара  $(A, B)$  управляема,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

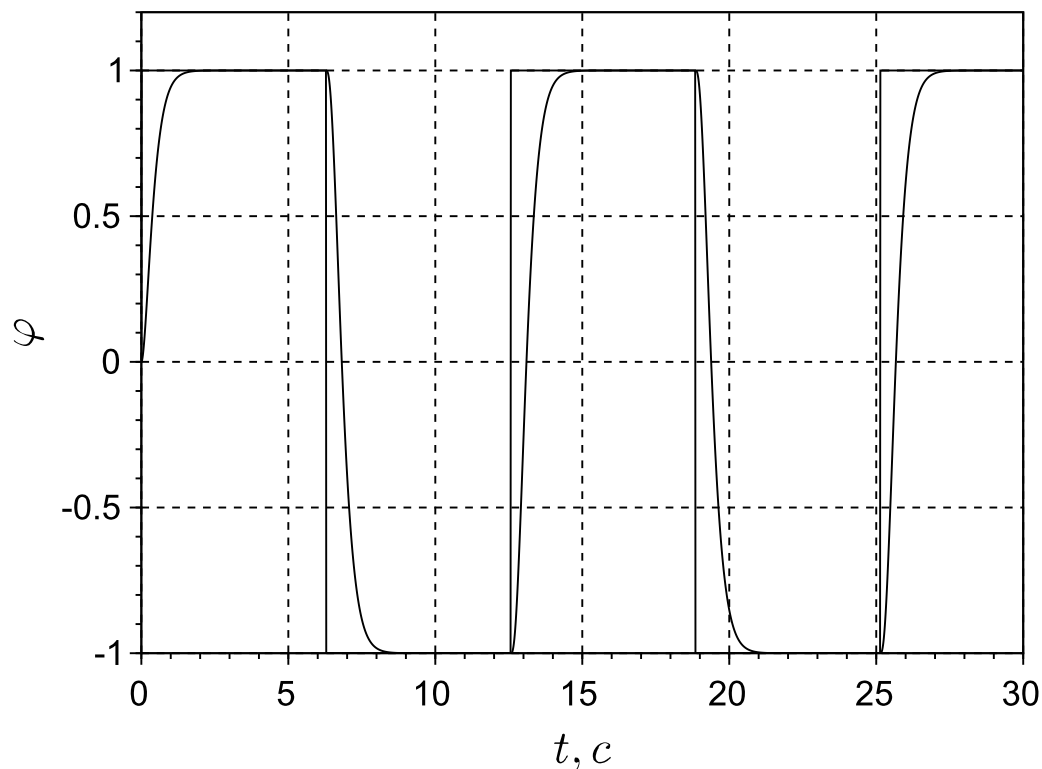


Рисунок 5.4 – Слежение за командным сигналом

Следовательно, все собственные числа матрицы замкнутой системы можно произвольно задать, выбирая матрицы обратной связи с интегральной составляющей

$$\begin{aligned} u &= Fx + Gz, \\ \dot{z} &= \bar{y} - y, \end{aligned}$$

где  $\bar{y}$  – заданное угловое положение вала двигателя (командный сигнал).

Расчёты выполнялись при:  $J = 0,68$ ;  $R = 0,45$ ;  $L = 0,0052$ ;  $k_1 = 7,5$ ;  $k_2 = 7,14$ ;  $k_3 = 0,098$ . Все собственные числа матрицы расширенной замкнутой системы были выбраны равными «-5». Коэффициенты обратной связи

равны

$$F = \begin{bmatrix} -0,2476 & 0,07271 & 0,4034 \end{bmatrix},$$
$$G = 0.3095.$$

На рисунке 5.4 показана реакция системы на периодический импульсный командный сигнал при моменте внешних сил  $M_c = 20$ .

Код программы на языке Scilab:

```
// Задача слежения для электропривода
function xdot=f(t,x)
    xdot=Gam*x+[0 20 0 sign(sin(0.5*t))]' ;
endfunction
// Матрицы объекта управления
J=0.68; R=0.45; L=0.0052;
k1=7.5; k2=7.14; k3=0.098;
A=[0 1 0
    0 -k1/J k2/J
    0 -k3/L -R/L ];
B=[0
    0
    1/L ];
C=[1 0 0];
// Матрицы обратной связи
AA=[ A zeros(3,1)
     -C 0 ];
BB=[B
     0];
r=5;
sp=[-r -r -r -r ];
FG=-ppol(AA,BB,sp);
// Моделирование
Gam=AA+BB*FG;
```

```
x0=[0 0 0 0]';  
T=0:0.01:30;  
X=ode(x0,0,T,f);  
plot(T,X(1,:), 'k', T, sign(sin(0.5*T)), 'k');  
xlabel(' $t$, c$ ');  
ylabel(' $\varphi$ ');  
xgrid();
```

## 6 Оптимизация систем с обратной связью

### 6.1 Нормы системы

Рассмотрим линейную стационарную систему, поведение которой в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

где  $x$  – вектор состояния;  $u$  – вектор входа;  $y$  – вектор выхода.

В частотной области система описывается соотношением

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s),$$

где

$$\hat{G}(s) = C(sE - A)^{-1}B$$

передаточная функция системы. В случае многосвязной системы это передаточная матрица (матричная передаточная функция).

Под нормой асимптотически устойчивой системы понимается норма передаточной функции этой системы [8, 9]. В теории систем автоматического управления рассматривают нормы

$$\begin{aligned}\|\hat{G}\|_2 &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr } \hat{G}^T(-j\omega) \hat{G}(j\omega) d\omega \right)^{1/2}, \\ \|\hat{G}\|_{\infty} &= \sup_{\omega} \sigma_{\max}(\hat{G}(j\omega)).\end{aligned}$$

Здесь  $\text{tr}$  – след квадратной матрицы;  $\sigma_{\max}(\cdot)$  – максимальное сингулярное число матрицы. Эти нормы получили соответственно названия  $H_2$ -норма и  $H_{\infty}$ -норма.



*Замечание 6.1.* След квадратной матрицы есть сумма её диагональных элементов.

*Замечание 6.2.* Сингулярные числа матрицы  $M$  есть арифметические значения квадратных корней из общих собственных чисел матриц  $M^*M$  и  $MM^*$ , где  $M^*$  – сопряжённая к  $M$  матрица.

В частном случае системы с одним входом одним выходом

$$\|\hat{g}\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2},$$

$$\|\hat{g}\|_{\infty} = \sup_{\omega} |\hat{g}(j\omega)|.$$

Здесь  $|\hat{g}(j\omega)|$  – амплитудная частотная характеристика системы.

Норма системы позволяет количественно оценить влияние входа системы на выход. Чем меньше норма, тем меньше влияние входа на выход.

Нормы системы можно вычислить, применяя функции Scilab: `h2norm` для вычисления  $H_2$ -нормы, и `h_norm`, `linf`, `linfn` для вычисления  $H_{\infty}$ -нормы.

**Пример 6.1.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 - 0,4x_3, \\ \dot{x}_3 &= -7x_1 - 3x_3 + u_2, \\ y_1 &= x_1, \quad y_2 = x_2.\end{aligned}$$

Матрицы системы равны

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -0,4 \\ -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значения норм

$$\|\hat{G}\|_2 = 0,41, \quad \|\hat{G}\|_\infty = 0,27.$$

Код программы на языке Scilab:

```
// Матрицы системы
A=[-2  0  3
    0 -5 -0.4
   -7  0 -3 ];
B=[1 0
   0 0
   0 1];
C=[1 0 0
   0 1 0];
// Система
sys=syslin('c',A,B,C);
// Нормы
norm2=h2norm(sys);
norminf=h_norm(sys);
disp(norm2,'H_2=');
disp(norminf,'H_inf=');
```

## 6.2 Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим линейную стационарную систему, поведение которой описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + B_1v + B_2u,$$

$$z = C_1x + D_{12}u,$$

$$y = C_2x + D_{21}v,$$

где  $x$  – вектор состояния;  $u$  – вектор управления;  $v$  – вектор возмущений (вход системы);  $z$  – вектор управляемых переменных (выход системы);  $y$  – вектор измерений.

Будем предполагать, что система обладает свойствами:

- 1) пара  $(A, B_1)$  стабилизируема, пара  $(A, C_1)$  детектируема;
- 2) пара  $(A, B_2)$  стабилизируема, пара  $(A, C_2)$  детектируема;
- 3)  $D_{12}^T C_1 = 0, D_{12}^T D_{12} = E$  ;
- 4)  $B_1 D_{21}^T = 0, D_{21} D_{21}^T = E$ .

*Замечание 6.3.* Пара матриц  $(A, B)$  называется стабилизируемой, если существует матрица  $F$  такая, что все собственные числа матрицы  $A + BF$  имеют отрицательные действительные части.

*Замечание 6.4.* Пара матриц  $(A, C)$  называется детектируемой, если существует матрица  $L$  такая, что все собственные числа матрицы  $A + LC$  имеют отрицательные действительные части.

Задача оптимизации заключается в построении управления в виде обратной связи, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы и при этом минимизирует  $H_2$  или  $H_\infty$ -норму системы, т.е. норму передаточной функции  $\hat{G}_{vz}(s)$ .

Оптимизация систем с обратной связью связана с решением алгебраических уравнений Риккати. Например, при оптимизации по критерию  $H_2$  решаются два уравнения Риккати следующего вида

$$A^T P + P A - P B R B^T P + C^T C = 0,$$

где  $A, B, C, R$  – заданные матрицы,  $P$  – искомая матрица.

Уравнение Риккати нелинейное, поэтому может иметь несколько решений. При определённых условиях, уравнение Риккати имеет единственное симметричное неотрицательно или положительно определённое решение. В системе Scilab решение уравнения Риккати можно получить с помощью функции `ricc`.

### 6.3 Оптимизация по критерию $H_2$

Основной результат можно сформулировать в виде следующего утверждения [8].

**Теорема 6.1.** *Оптимальное по критерию  $H_2$  стабилизирующее управление строится в виде динамического регулятора*

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}y, \\ u &= \bar{C}\bar{x},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A - B_2 B_2^T P - Q C_2^T C_2, \\ \bar{B} &= Q C_2^T, \quad \bar{C} = -B_2^T P.\end{aligned}$$

Матрицы  $P$  и  $Q$  находятся на основе решения двух уравнений Риккати

$$\begin{aligned}A^T P + P A - P B_2 B_2^T P + C_1^T C_1 &= 0, \\ A Q + Q A^T - Q C_2^T C_2 Q + B_1 B_1^T &= 0.\end{aligned}$$

Замкнутая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + B_2 \bar{C} \bar{x} + B_1 v, \\ \dot{\bar{x}} &= \bar{B} C_2 x + \bar{A} \bar{x} + \bar{B} D_{21} v.\end{aligned}$$

В системе Scilab задачу  $H_2$ -оптимизации можно решить с помощью функции `lqg`. Можно также использовать функцию `ricc` для решения двух уравнений Риккати.

## 6.4 Управление подвеской транспортного средства

Объектом управления является механическая система, состоящая из двух масс (колеса и корпуса транспортного средства), соединённых пружиной и демпфером.

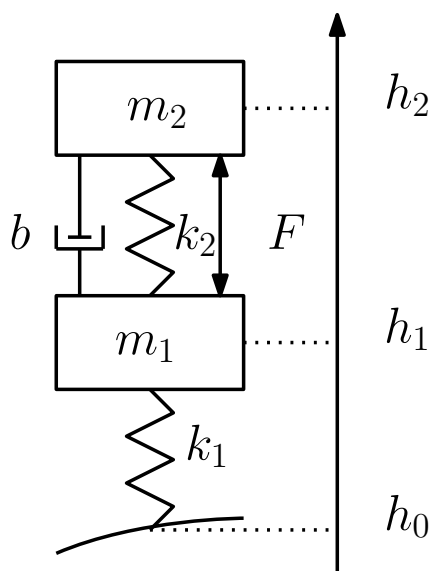


Рисунок 6.1 – Подвеска транспортного средства

Схема подвески показана на рисунке 6.1. Здесь:

$h_1$  – вертикальное перемещение колеса (м);

$h_2$  – вертикальное перемещение корпуса (м);

$h_0$  – уровень поверхности (м);

$F$  – управляющая сила (Н);

$m_1$  – масса колеса (кг);

$m_2$  – масса корпуса в расчете на одно колесо(кг);

$k_1, k_2$  – коэффициенты жесткости колеса и рессоры (Н/м);

$b$  – коэффициент демпфирования амортизатора (Нс/м).

Динамика системы в отклонениях от положения равновесия описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 h_1}{dt^2} &= -k_1(h_1 - h_0) + k_2(h_2 - h_1) + b \left( \frac{dh_2}{dt} - \frac{dh_1}{dt} \right) - F, \\ m_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2} &= -k_2(h_2 - h_1) - b \left( \frac{dh_2}{dt} - \frac{dh_1}{dt} \right) + F, \end{aligned}$$

В положении равновесия значения всех переменных состояния, управления и возмущения равны нулю. Необходимо построить управление в виде обратной связи, которое обеспечивает приемлемую реакцию системы на изменения уровня поверхности, по которой осуществляется движение транспортного средства.

Предположим, что измеряется только разность перемещений масс

$$y = h_2 - h_1 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – ошибка измерений. Вектор управляемых переменных зададим в виде

$$z = \begin{bmatrix} r(h_2 - h_1) \\ F \end{bmatrix},$$

где  $r > 0$  – весовой коэффициент. Следовательно, в данной системе:

$$x = \begin{bmatrix} h_1 \\ \frac{dh_1}{dt} \\ h_2 \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} h_0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad u = F,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -r & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров объекта управления:  $m_1 = 345$ ;  $m_2 = 2300$ ;  $k_1 = 510000$ ;  $k_2 = 78000$ ;  $b = 320$ ;  $r = 10^5$ . Матрицы оптимального по критерию  $H_2$  регулятора равны:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -30,2 & 1 & 30,2 & 0 \\ -2350 & -3,947 & 1098 & 45,27 \\ 5,415 & 0 & -5,415 & 1 \\ 30,03 & 0,592 & -63,95 & -6,79 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -30,19 \\ -638,8 \\ 5,415 \\ -4,954 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2452 & 1042 & -80479 & -15297 \end{bmatrix}.$$

Реакция системы на возмущение  $h_0 = 0,1$  показана на рисунке 6.2. При моделировании ошибка измерений учиты-

валась как случайная величина с нормальным распределением.

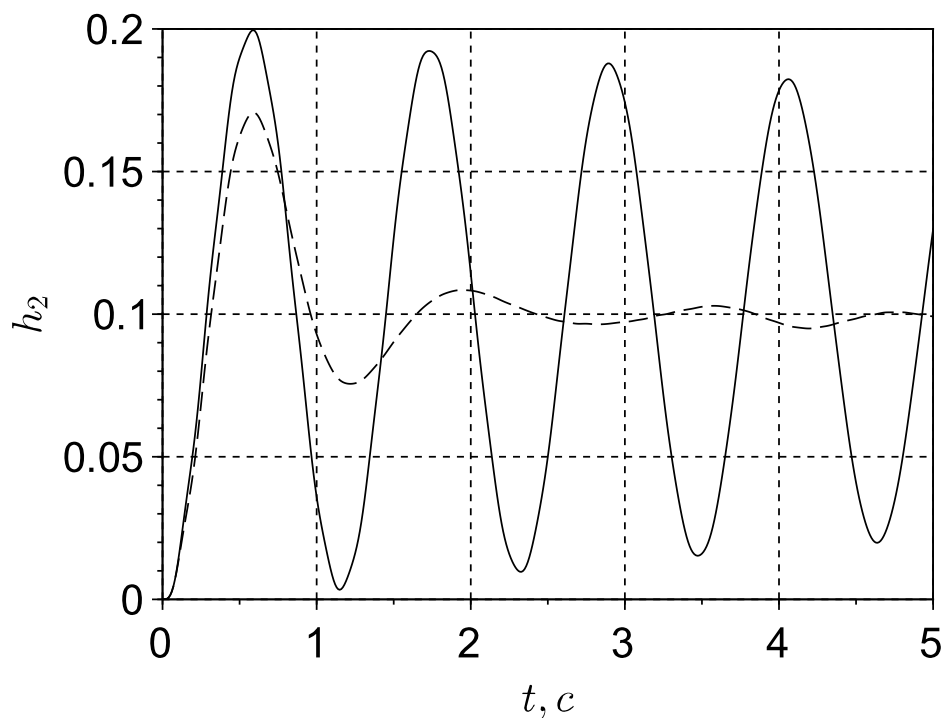


Рисунок 6.2 – Реакция корпуса на возмущение: без управления (—); с управлением (---)

Код программы на языке Scilab:

```
// Оптимизация подвески автомобиля по
// критерию H_2
// Матрицы системы
m1=345; m2=2300; k1=510000; k2=78000; b=320;
A=[0 1 0 0
   -(k1+k2)/m1 -b/m1 k2/m1 b/m1
   0 0 0 1
   k2/m2 b/m2 -k2/m2 -b/m2 ];
B1=[0 0
     k1/m1 0
```



```

0      0
0      0   ];
B2=[0
     -1/m1
     0
     1/m2];
r=1.0e5;
C1=[-r  0  r  0
     0  0  0  0];
D11=[0  0
     0  0];
D12=[0
     1];
C2=[-1  0  1  0];
D21=[0  1];
D22=[ 0];
// Синтез обратной связи
B=[B1 B2];
C=[C1
   C2];
D=[D11 D12
   D21 D22];
nn=[1  1];
sys=syslin('c',A,B,C,D);
R=lqg(sys,nn);
AR=R(2);
BR=R(3);
CR=R(4);
AA=[A B2*CR
     BR*C2 AR];
BB=[B1
     BR*D21];
// Система без обратной связи

```

```

sys1=syslin('c',A,B1,[0 0 1 0]);
// Система с обратной связью
sys2=syslin('c',AA,BB,[0 0 1 0 0 0 0 0]);
// Моделирование
rand('normal');
T=0:0.01:5;
v=[0.1*ones(T)
    0.01*rand(T)];
z1=csim(v,T,sys1);
z2=csim(v,T,sys2);
scf();
plot(T,z1,'k-',T,z2,'k--');
xlabel('$t$, c$');
ylabel('$h_2$');
xgrid();

```

## 6.5 Оптимизация по критерию $H_\infty$

Задача оптимизации по критерию  $H_\infty$ , в отличие от задачи оптимизации по критерию  $H_2$ , не допускает точного аналитического решения. Поэтому вместо задачи минимизации критерия  $H_\infty$  решают задачу построения стабилизирующего управления, при котором выполняется условие

$$\|\hat{G}_{vz}\|_\infty < \gamma$$

для некоторого  $\gamma > 0$ . Выбирая значение  $\gamma$  достаточно малым, можно получить решение близкое к оптимальному по критерию  $H_\infty$ . Справедливо следующее утверждение [9]

**Теорема 6.2.** Пусть  $\gamma > 0$ . Существует управление виде

динамического регулятора

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}y, \\ u &= \bar{C}\bar{x},\end{aligned}$$

при котором замкнутая система является асимптотически устойчивой и значение  $\|\hat{G}_{vz}\|_\infty < \gamma$  тогда и только тогда, когда

а) уравнение Риккати

$$A^T P + P A - P(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)P + C_1^T C_1 = 0$$

имеет симметричное неотрицательно определённое решение  $P$  такое, что матрица

$$A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)P$$

асимптотически устойчивая;

б) уравнение Риккати

$$A Q + Q A^T - Q(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1)Q + B_1 B_1^T = 0$$

имеет симметричное неотрицательно определённое решение  $Q$  такое, что матрица

$$A + Q(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)$$

асимптотически устойчивая;

в)  $\rho(PQ) < \gamma^2$ , где  $\rho$  – спектральный радиус матрицы.

При этом матрицы регулятора равны

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P + B_2 \bar{C} + Z L C_2, \quad \bar{B} = -Z L \\ \bar{C} &= -B_2^T P, \quad L = -Q C_2^T, \\ Z &= (E - \gamma^{-1} P Q)^{-1}.\end{aligned}$$

*Замечание 6.5.* Спектральным радиусом квадратной матрицы называется максимальный из модулей её собственных чисел.

В системе Scilab задачу  $H_\infty$  оптимизации можно решить с помощью функций `h_inf` и `scontrg`.

## 6.6 Управление продольным движением самолета

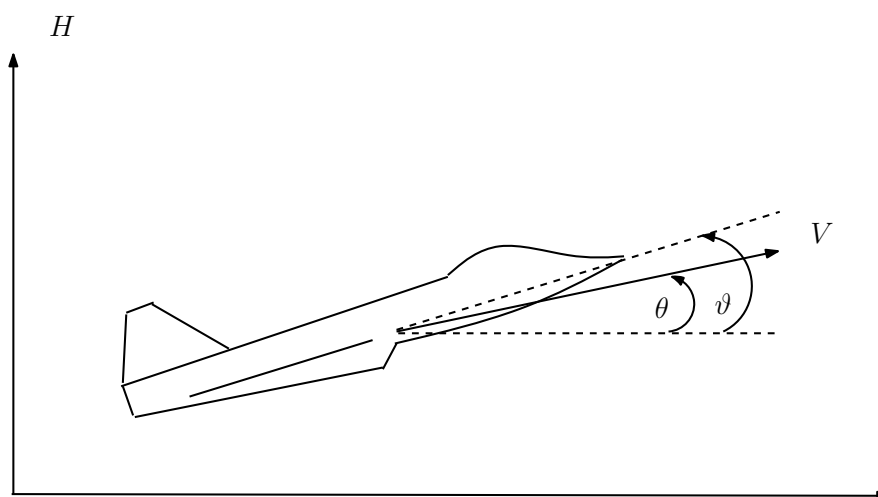


Рисунок 6.3 – Продольное движение самолета

Продольное движение самолета в отклонениях от заданной траектории полета описывается уравнением [7]

$$\dot{x} = Ax + Gu + Rw,$$

где  $x$  – вектор состояния,  $u$  – управление,  $w$  – возмущение. Вектор состояния включает следующие переменные:

$x_1 = \theta$  – отклонение угла наклона траектории (рад);

$x_2 = \vartheta$  – отклонение угла тангажа (рад);

$x_3 = \omega_z$  – отклонение угловой скорости тангажа (рад /с);

$x_4 = H$  – отклонение высоты (м).

Управление осуществляется отклонением руля высоты  $u = \delta_v$  (рад). В качестве внешнего возмущения рассматривается скорость вертикального ветра  $w$  (м/с). Матрицы системы равны:

$$A = \begin{bmatrix} -0,86 & 0,86 & 0 & 0,61 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4,85 & -4,85 & 0,777 & 0,12 \cdot 10^{-4} \\ 257 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$G = \begin{bmatrix} 0,0268 \\ 0 \\ -1,625 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0,0248 \\ 0 \\ -0,019 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Задача заключается в синтезе регулятора, обеспечивающего оптимальную реакцию самолета по углу тангажа и высоте на произвольные изменения скорости ветра.

Будем считать, что измеряются угол тангажа и высота:

$$y_1 = \vartheta + \varepsilon_1, \quad y_2 = H + \varepsilon_2,$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – ошибки измерения. Следовательно в данной

системе:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,0248 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,0268 \\ 0 \\ -1,625 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы оптимального регулятора равны:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 49,46 & -45,63 & 29,28 & 67,36 \\ -871,3 & 822,2 & -493,2 & -1135 \\ -1946 & 1852 & -1112 & -2552 \\ -337,4 & 321,2 & -191,3 & -445,7 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0,06310 & 39,68 \\ -1,016 & -668,3 \\ -2,280 & -1502 \\ -0,3936 & -260,5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1,701 & 0,9039 & -1,199 & 1,080 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутой системы показаны на рисунке 6.4.

Код программы на языке Scilab:

```
// Оптимальное управление продольным
// движением самолета по критерию H_inf
```

```

function y=w(t)
    // Возмущение
    y=0;
    if (t >=0)&(t <=5)
        y=2*t ;
    end
    if (t >5)&(t <=10)
        y=10;
    end
    if (t >10)&(t <=20)
        y=-2*t +30;
    end
    if (t >20)&(t <=25)
        y=-10;
    end
    if (t >25)&(t <=30)
        y=2*t -60;
    end
endfunction
// Матрицы системы
A=[-0.86    0.86    0        0.00061
    0        0        1        0
    4.85   -4.85   0.777   0.000012
    257     0        0        0        ];
B1=[0.00248  0  0
    0        0  0
    -0.019   0  0
    0        0  0];
B2=[ 0.0268
    0
    -1.625
    0];
C1=[0  1  0  0

```

```

        0 0 0 1
        0 0 0 0];
D11=[0 0 0
      0 0 0
      0 0 0];
D12=[0
      0
      1];
C2=[0 1 0 0
      0 0 0 1];
D21=[0 1 0
      0 0 1];
D22=[0
      0];
// Синтез обратной связи
B=[B1 B2];
C=[C1
    C2];
D=[D11 D12
    D21 D22];
sys=syslin('c',A,B,C,D);
[R,ro]=h_inf(sys,[2 1],0,2,10);
AR=R(2);
BR=R(3);
CR=R(4);
AA=[A B2*CR
    BR*C2 AR];
BB=[B1
    BR*D21];
// Моделирование
sys=syslin('c',AA,BB,[0 1 0 0 0 0 0 0]);
T=0:0.1:50;
rand('normal');

```



```

v=[];
for t=T
    v=[v w(t)];
end
v=[v
0.001*rand(T)
0.001*rand(T)];
z=csim(v,T,sys);
scf();
plot(T,v(1,:), 'k');
xlabel(' $t$, c$ ');
ylabel(' $\omega$ ');
xgrid();
scf();
plot(T,z, 'k');
xlabel(' $t$, c$ ');
ylabel(' $\vartheta$ ');
xgrid();

```

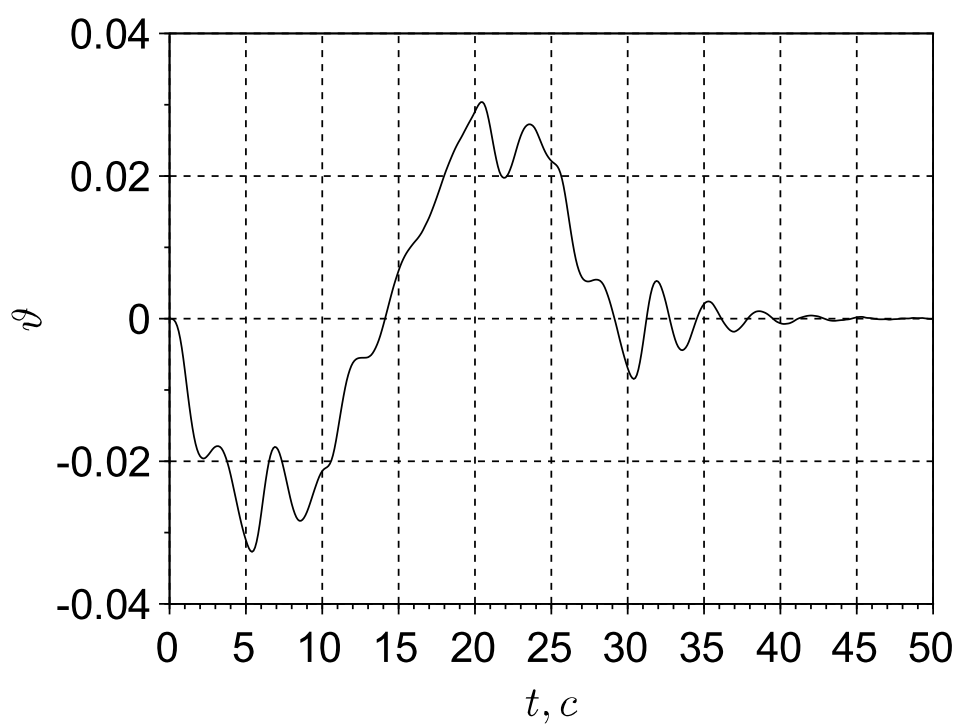
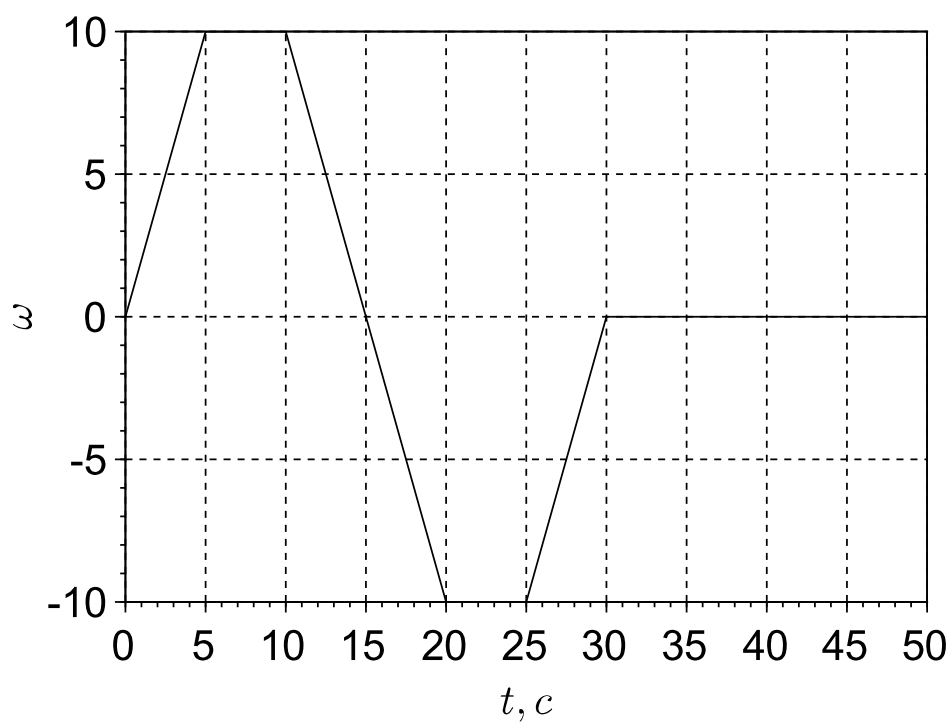


Рисунок 6.4 – Реакция самолета по углу тангажа  $\vartheta$  на возмущение  $\omega$

## Список литературы

1. Алексеев, Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. – М. : ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 269 с.
2. Андриевский, А. Б. Решение инженерных задач в среде Scilab. Учебное пособие / А. Б. Андриевский, Б. Р. Андриевский, А. А. Капитонов, А. Л. Фрадков. – СПб. : НИУ ИТМО, 2013. – 97 с.
3. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М. : Высшая школа, 2003. – 614 с.
4. Востриков, А. С. Теория автоматического регулирования: Учеб. пособие / А. С. Востриков, Г. А. Французова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 364 с.
5. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2003. – 288 с.
6. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2004. – 464 с.
7. Крутько, П. Д. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем / П. Д. Крутько, А. И. Максимов, Л. М. Скворцов. – М. : Радио и связь, 1988. – 306 с.

8. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5 т., Т. 3. Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под. ред. Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 616 с.
9. Методы робастного, нейро-нечёткого и адаптивного управления: Учебник / Под. ред. Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 744 с.
10. Первозванский, А. А. Курс теории автоматического управления / А. А. Первозванский. – СПб. : Изд-во Лань, 2015. – 624 с.

Евгений Александрович Перепелкин

**Теория систем автоматического управления**

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Подписано в печать 10.11.17. Формат 60x84 1/16.

Печать – цифровая. Усл.п.л. 6,28.

Тираж 100 экз. Заказ 2017 -

Издательство Алтайского государственного  
технического университета им. И. И. Ползунова,  
656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46

Отпечатано в типографии АлтГТУ,  
656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46  
тел.: (8-3852) 29-09-48