ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 2

Учебное пособие

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 2

Учебное пособие

Оглавление

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Неопределенный интеграл

Теоретический материал

Функцию $y = F(x)$, заданную на промежутке X, называют *первообразной для функции* $y = f(x)$, заданной на том же промежутке, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается так: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Операция нахождения первообразной по её производной или неопределённого интеграла по заданной подынтегральной функции называется интегрированием этой функции. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int df(x)dx = f(x) + C$;
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$; (k–постоянная);
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Заметим, что последнее свойство справедливо для любого числа слагаемых в подынтегральной функции.

Таблица основных неопределенных интегралов

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ где $n \neq -1$;

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$;

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

IV. $\int e^x \, dx = e^x + C$;

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

VI. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$;

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$;

VIII. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;

IX. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

XII. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$

XIII. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

Интегралы этой таблицы принято называть табличными.

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с использованием основных свойств неопределенных интегралов и таблицы основных неопределённых интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приёмов сведения неопределённого интеграла к табличному. Такой приём называется также методом подстановки.

Теорема 1. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T, а X – некоторое множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Выражение (1.1) называется формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Интегрирование по частям

Теорема 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на промежутке X, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx. \tag{1.2}$$

С учётом определения дифференциалов функций равенство (1.2) можно переписать в виде

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{1.3}$$

Равенство (1.2) или (1.3) называется формулой интегрирования по частям.

Формулу интегрирования по частям можно применять многократно.

Рекомендации по использованию метода интегрирования по частям

В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}\,dx,\ \int P(x)\sin ax\,dx,\ \int P(x)\cos ax\,dx,$$

где $P(x)$ – многочлен относительно x, a – некоторое число, полагают $u=P(x)$, а все остальные сомножители принимают за dv.

В интегралах вида

$$\int P(x)\ln|ax|\,dx,\ \int P(x)\arcsin ax\,dx,\ \int P(x)\arccos ax\,dx,$$

$$\int P(x)\mathrm{arctg}\,ax\,dx,\ \int P(x)\mathrm{arcctg}\,ax\,dx$$

полагают $P(x)dx=dv$, а остальные сомножители полагают равной функции u.

Интегрирование тригонометрических функций

Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, которую будем называть универсальной, рационализирует интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$, т. е. сводит его к интегралу от рациональной дроби нового аргумента *t;* при такой подстановке

$$\sin\, x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\, x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=2\left(\operatorname{arctg}\, t\right)'dt=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Интегралы вида $\int\sin ax\cos bx\,dx$, $\int\sin ax\sin bx\,dx$, $\int\sin ax\cos bx\,dx$ вычисляются с использованием формул тригонометрии

$$\sin ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x);$$

$$\sin ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x);$$

$$\cos ax\cdot\cos bx=\frac{1}{2}(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x).$$

При вычислении интеграла $\int\sin^m x\cos^n x dx$, m и n – четные натуральные числа, применяем формулы понижения степени

$$\cos^2 kx=\frac{1+\cos 2kx}{2},\quad \sin^2 kx=\frac{1-\cos 2kx}{2},$$

которые позволяют повторным уменьшением вдвое показателей степеней синуса и косинуса в конечном счете свести рассматриваемые интегралы к сумме интегралов от констант и нечетных степеней синуса и косинуса.

Образцы решения задач

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись действиями со степенями:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C\,.$$

Пример 2. Найти $\int\left(\frac{2}{1+x^2}+6x-3x^2+7\right)dx$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись свойствами 4 и 5:

$$\int\left(\frac{2}{1+x^2}+6x-3x^2+7\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}+6\int xdx-3\int x^2dx+7\int dx=$$

$$=2\mathrm{arctg}x+6\cdot\frac{x^2}{2}-3\cdot\frac{x^3}{3}+7x+C.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{2x^2+x-3}{x^3}dx.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель на знаменатель. Затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int\frac{2x^2+x-3}{x^3}dx=2\int\frac{dx}{x}.+\int x^{-2}dx-3\int x^{-3}dx=2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+C.$$

Пример 4. Найти $\int\cos 3xdx$.

Решение. Умножаем и делим интеграл на 3 и вносим множитель 3 под знак интеграла, затем под знак дифференциала:

$$\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

Пример 5. Найти $\int(3-2x)^7dx$.

Решение. Применим метод замены переменной. Обозначим $t=(3-2x)$, тогда $dt=-2dx$ или $dx=-\frac{1}{2}dt$. Получим

$$\int(3-2x)^7dx=-\frac{1}{2}\int t^7dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^8}{8}+C.$$

Пример 6. Найти $\int\sin(3x+1)dx.$

Решение. Целесообразно ввести новую переменную $t=3x+1$. Тогда $dt=3dx$ или $dx=\frac{1}{3}dt$. Отсюда по формуле (1.1) получаем

$$\int\sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int\sin tdt=-\frac{1}{3}\cos t=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Введём новую переменную $t=\cos x$. Тогда

$dt = -\sin x dx$ или $\sin x\,dx = -dt$. В результате подстановки исходный интеграл преобразуется к табличному виду

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}\,dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Пример 8. Найти $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение. С целью упрощения подынтегрального выражения положим $x-3=t^2$. Отсюда $x = t^2+3$, $dx = d\left(t^2+3\right)$, $dx = d\left(t^2+3\right)'\,dt$, $dx = \left[(t^2)' + 3'\right]dt$, $dx = [2t+0]dt$, $dx = 2t\,dt$. Заменим под знаком интеграла x, $x-3$ и dx, затем выполним преобразования и получаем

$$\int x\left(\sqrt{x-3}\right)dx = \int \left(t^2+3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = \int\left(2t^4+6t^2\right)dt = 2\int t^4dt + 6\int t^2dt =$$

$$= 2\int t^4dt + 6\int t^2dt = 2\,\frac{t^{4+1}}{4+1} + 6\,\frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5 +$$

$$+ 2\left(\sqrt{x-3}\right)^3 + C.$$

Пример 9. Найти $\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+C}}$.

Решение. Заметим, что $e^{4x} = \left(e^{2x}\right)^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x} = t$. Тогда $de^{2x} = dt$, $\left(e^{2x}\right)'dx = dt$, $e^{2x}2dx = dt$. Заменив всюду под интегралом $e^{2x}dx$ на $\frac{dt}{2}$, e^{2x} на t, получим

$$\int \frac{3dt}{2\sqrt{t^2+5}} = \frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} = \frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right| + C = \frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+5}\right| + C.$$

Пример 10. Найти $\int \frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение. Введём переменную $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x dx$. Заменив всюду под интегралом $\sin x\,dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t, получим

$$\int \frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}} = -2\int\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} = -2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right| + C =$$

$$-2\ln\left|\cos x + \sqrt{3+\cos^2 x}\right| + C.$$

Пример 11. Найти $\int (x-3)\sin x\,dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям. Положим $u = x-3$, $dv = \sin x\,dx$, тогда $du = dx$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$, по формуле (1.3) получим

$$\int (x-3)\sin x\,dx = -(x-3)\cos x + \int \cos x\,dx = (3-x)\cos x + \sin x + C.$$

Пример 12. Найти $\int \left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx$.

Решение. Положим $u=\ln|x|$, $dv=\left(5x^3+2x^2+3\right)dx$, тогда

$du=\left(\ln|x|\right)'dx=\dfrac{1}{x}dx, \int dv=\int\left(5x^3+2x^2+3\right)dx$, откуда

$$v=\int\left(5x^3+2x^2+3\right)dx=5\int x^3\,dx+2\int x^2\,dx+3\int dx=5\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{2+1}}{2+1}+3x=$$

$$=\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x.$$

Следовательно,

$$\int\left(5x^3+2x^2+3\right)\ln|x|\,dx=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\int\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int\frac{x^4}{x}dx+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{x}dx+3\int\frac{x}{x}dx\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\left[\frac{5}{4}\int x^3\,dx+\frac{2}{3}\int x^2\,dx+3\int dx\right]=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{4}\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-3x+C=$$

$$=\left(\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x\right)\ln|x|-\frac{5}{16}x^4-\frac{2}{9}x^3-3x+C.$$

Пример 13. Найти $\int \sin 7x\cos x\,dx$.

Решение. Преобразуем произведение тригонометрических функций по формуле

$$\int\sin 7x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin(7+1)x+\sin(7-1)x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 8x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin 6x\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\sin t\,dt+\frac{1}{12}\int\cos z\,dz=-\frac{1}{16}\cos t+\frac{1}{12}\cos z+C=$$

$$-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C.$$

При вычислении воспользовались заменой переменных

$t=8x$, $dt=(8x)'\,dx$, $dt=8dx$, $dx=\dfrac{dt}{8}$ и $z=6x$, $dz=6dx$, $dx=\dfrac{dz}{6}$.

Пример 14. Найти $\int\cos^4 x\,dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x = \left[\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right]^2$. Следовательно,

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx^{*)} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos t\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{4}x +$$
$$+\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx^{**)} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}x +$$
$$+\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin u + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

*) Делаем подстановку $t = 2x,\ dt = 2dx, dx = \dfrac{dt}{2}$.

**) Делаем подстановку $u = 4x,\ du = 4dx,\ dx = \dfrac{du}{4}$.

Пример 15. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

Решение. Полагая $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = z$ и заменяя $\cos x, dx$ через z указанными их выражениями, вытекающими из этой подстановки, получим

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = 2\int \frac{dz}{z^2+9} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$.

2. $\displaystyle\int e^x\left(3+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$.

3. $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2+7} - \frac{3}{\sqrt{x^2-2}}\right)dx$.

4. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+2x}{(x^2+1)}dx$.

5. $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\,dx$.

6. $\displaystyle\int \sin(1-5x)dx$.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{7x-3}$.

8. $\displaystyle\int 5^{3x-2}dx$.

9. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x}}dx$.

10. $\displaystyle\int x10^{1-x^2}\,dx$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$.

12. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^5 x}$.

13. $\int (3x-1)\cos\frac{x}{3}dx$.

14. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

15. $\int x\cdot \mathrm{arctg} x dx$.

16. $\int (2x^2-3)\cos xdx$.

17. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}}dx$.

18. $\int \ln(x^2+1)dx$.

19. $\int \cos^2\frac{5x}{7}dx$.

20. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$.

21. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

22. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$.

23. $\int \sin x \cos 2x \cos 3x\, dx$.

24. $\int \sin^2 3x \cos^2 2x\, dx$.

25. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

26. $\int \frac{dx}{1-2\cos x}$.

Ответы

1. $4\ln x-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$. 2. $3e^x+\mathrm{tg} x+C$.

3. $\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}-3\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C$. 4. $\frac{1}{3}x^3+x^2-x+\mathrm{arctg} x+C$.

5. $\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(4x-3)^3}+C$. 6. $\frac{1}{5}\cos(1-5x)+C$. 7. $\frac{1}{7}\ln(7x-3)+C$.

8. $\frac{5^{3x-2}}{3\ln 5}+C$. 9. $2e^{\sqrt{x}}+4\sqrt{x+C}$. 10. $-\frac{10^{1-x^2}}{2\ln 10}+C$. 11. $\frac{(\arcsin x)^{-2}}{-2}+C$.

12. $\frac{(\cos x)^{-4}}{4}+C$. 13. $(9x-3)\sin\frac{x}{3}+27\cos\frac{x}{3}+C$. 14. $-x\cdot\mathrm{ctg} x+\ln\left|\sin x\right|+C$.

15. $\frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg} x-x+\mathrm{arctg} x)+C$. 16. $(2x^2-3)\sin x+4x\cos x-4\sin x+C$.

17. $\frac{5}{3}x^{3/5}\ln x-\frac{25}{9}x^{3/5}+C$. 18. $x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg} x+C$.

19. $\frac{1}{2}x+\frac{7}{20}\sin\frac{10x}{7}+C$. 20. $-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos x+C$. 21. $-\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C$.

22. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C$. 23. $-\frac{1}{24}\cos 6x+\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

24. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 8x-\frac{1}{16}\sin 4x+C$.

25. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$. 26. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}}\right|+C$.

§.2. Определенный интеграл

Теоретический материал

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом* от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Числа a и b называются *пределами интегрирования*: $a-$нижним, $b-$верхним. Отрезок $[a;b]$ называется отрезком интегрирования. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а переменная $x-$*переменной интегрирования*.

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (1.4)$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,\ c\in(a,b)$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_b^b f(x)dx = 0$.

4. Если $f(x) \ge g(x)$ при всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

5.Если $m \le f(x) \le M$ при всех x из промежутка $[a;b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Правила вычисления определенных интегралов

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ – постоянная).

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \quad (1.5)$$

4. Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ делается по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(\varphi'(t))dt, \quad (1.6)$$

где $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (f, φ и φ' непрерывны).

Приемы вычисления определенных интегралов практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, надо не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Вычисление площадей плоских фигур

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ox, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак "-", если график расположен выше оси Ox, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак "+" (рис. 1.1).

Для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \qquad (1.7)$$

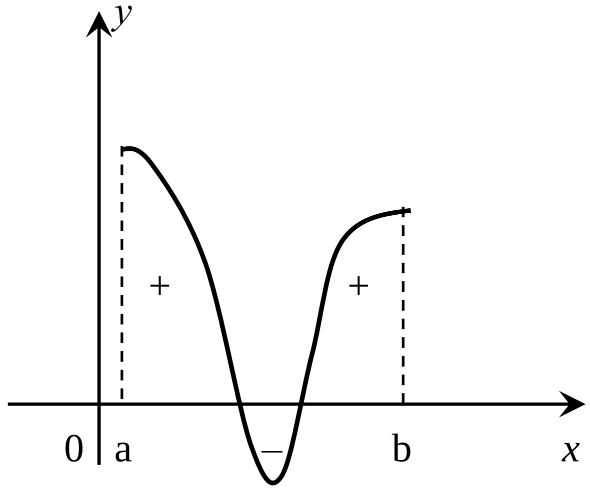


Рис.1.1

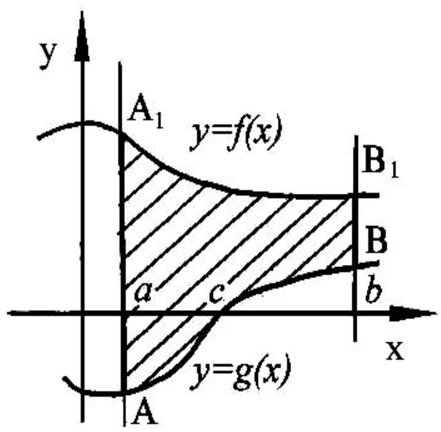


Рис. 1.2

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями, может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ (сверху), $y = g(x)$ (снизу) и прямыми $x = a$, $x = b$, подсчитывается по формуле

$$S = \int_b^b [f(x) - g(x)]\,dx. \qquad (1.8)$$

Действительно, в силу геометрического смысла определенного интеграла из рисунка имеем

$\int_a^b f(x)\,dx = S_{(aA_1B_1b)}$ и $\int_a^b g(x)\,dx = S_{(cBd)} - S_{(aAc)}$, поэтому

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^b g(x)\,dx = S_{(aA_1B_1b)} - S_{(cBb)} + S_{(aAc)} = S.$$

Образцы решения задач

Пример 1. Вычислить $\int\limits_1^4 \left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

Решение. Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_1^4 \left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx = \int\limits_1^4 dx + 5\int\limits_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = x\Big|_1^4 + 5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 =$$

$$= x\Big|_1^4 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 + x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = (4-1) + \frac{5}{2}\left(4^2-1^2\right) + \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = 3 + \frac{75}{2} + 7 = \frac{95}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$, Следовательно $du = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \frac{1}{1+x^2}\,dx, v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Тогда по формуле (1.5)

$$\int\limits_0^1 (x \operatorname{arctg} x)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{0^2}{2}\operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $t = x^2+9$, тогда $dt = d\left(x^2+9\right)$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2+9$. Поэтому если $x=0$, то $t_1 = 0^2+9 = 9$, если $x=4$, то $t_2 = 4^2 + 9 = 25$ и получаем

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25} x\sqrt{t}\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_9^{25} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_9^{25} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{25}^3 - \sqrt{9}^3\right) = \frac{1}{3}\left(5^3 - 3^3\right) = \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Положим $1-\cos x = t$, тогда $dt = (1-\cos x)'\,dx$, $dt = \sin x\,dx$, $dx = \frac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = 1-\cos x$: если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t_1 = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1-0 = 1$, если $x = \pi$, то $t_2 = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2$. Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2} = \int_1^2 \frac{2\sin x\frac{dt}{\sin x}}{t^2} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = 2\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^2 = 2\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^2 =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8-x = t$, тогда $dt = (8-x)'\,dx$, $dt = -1dx$, $dx = -dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = 8-x$, если $x = 0$, то $t_1 = 8-0 = 8$, если $x = 7$, то $t_2 = 8-7 = 1$. Таким образом,

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \int_8^1 -\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\int_8^1 t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_8^1 = -\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_8^1 = -3\sqrt[3]{t} = -3\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8}\right) =$$

$$-3(1-2) = 3.$$

Пример 6. Вычислить $\int_1^e x\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, тогда $du = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}dx, v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Следовательно, по формуле (1.5)

$$\int_1^e (x \ln x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Пример 7. Вычислить площадь между параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 6$.

Решение. Строим графики функций. Затем для нахождения точек пересечения парабол решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x - x^2; \\ y = x^2 - 6. \end{cases}$$

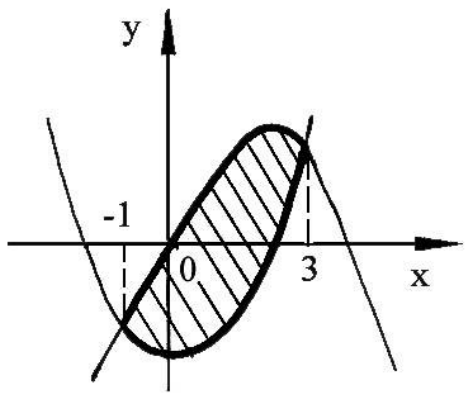


Рис.1.3

Приравнивая левые части, получим $x^2 - 6 = 4x - x^2$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$ и

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$ или

$x_1 = -1; x_2 = 3$.

Тогда по формуле (1.8) искомая площадь S будет равна:

$$S = \int_{-1}^{3}\left[\left(4x - x^2\right) - \left(x^2 - 6\right)\right]dx = \int_{-1}^{3}\left[6 + 4x - 2x^2\right]dx = \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \left[6\cdot 3 + 2\cdot 3^2 - \frac{2}{3}\cdot 3^3\right] - \left[6\cdot(-1) + 2\cdot(-1)^2 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3\right] = 18 - \left[-\frac{10}{3}\right] =$$

$$= 18 + \frac{10}{3} = 64.$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2\ (x \ge 0)$.

Решение. Сначала найдем точки пересечения кривых $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x^2}$, для чего решим систему уравнений

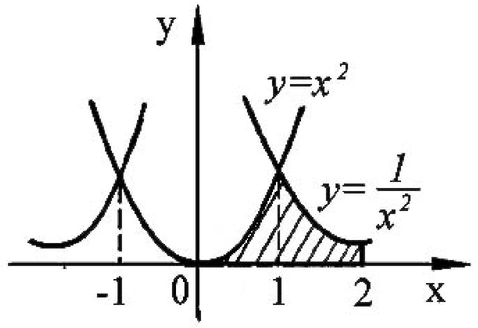


Рис. 1.4

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Из этой системы $x^2 = \dfrac{1}{x^2}$, $x^4 = 1$ или $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Таким образом, заданная фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} y = x^2, \ 0 \le x < 1, \\ y = \dfrac{1}{x^2}, \ 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

По формуле вычисления площади (1.7) найдём

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_0^1 + \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-2}}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{-1}{1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}.$$

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x, y = 2\sin x$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = 0$.

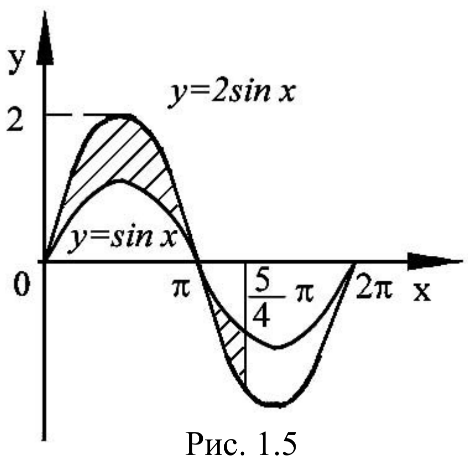


Рис. 1.5

Решение. Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, вторая ограничена линиями $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = \pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$.

Вычислим площади S_1 и S_2:

$$S_1 = \int_0^\pi (2\sin x - \sin x)dx = \int_0^\pi \sin x\, dx = \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

$$S_2 = \int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - 2\sin x)dx = -\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \sin x\, dx = \cos x\Big|_\pi^{\frac{5}{4}\pi} = \cos\frac{5}{4}\pi - \cos\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$

Тогда $S = S_1 + S_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}293$.

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int\limits_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})dx$.

2. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x dx$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}$.

4. $\int\limits_{-1}^7 \sqrt{x+2}dx$.

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$.

6. $\int\limits_0^1 (x^4 + 1)^5 \cdot x^3 dx$.

7. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(4 + \ln^2 x)}$.

8. $\int\limits_0^1 x^2 e^{1-x^3} dx$.

9. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$.

10. $\int\limits_0^1 (x+3)2^x dx$.

11. $\int\limits_0^1 \ln(x^2 + 1)dx$.

12. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

13. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^2 x dx$.

14. $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} dx$.

15. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{7 - 3\cos x}$.

16. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$.

17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{1+x^2}, x = 0, x = \sqrt{3}$.

18. Найти площадь криволинейного треугольника, лежащего в 1-й четверти и ограниченного линиями $y = 2 - x^2,\ y = x, x = 0.$

19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $4y = 8x - x^2,\ 4y = x + 6.$

20. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x,\ y = 2^{-2x},\ y = 4.$

21. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$.

22. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2=25y$, $5y^2=9x$.

Ответы

1. $\frac{21}{8}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$.4. $\frac{52}{3}$.5. $\frac{\pi}{6}$.6. $\frac{21}{8}$.7. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 8. $\frac{1}{3}(e-1)$.9. $\frac{\pi^2}{4}-2$. 10. $\frac{5\ln 2-1}{\ln^2 2}$. 11. $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$. 12. $1-\frac{2}{e}$. 13. $\frac{\pi}{32}$. 14. 0. 15. $\sqrt{\frac{1}{10}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{2}}$. 16.$\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 17.$\frac{2\pi}{3}$. 18. $\frac{7}{6}$. 19.$5\frac{5}{24}$. 20.$12-\frac{9}{\ln 4}$. 21.$\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}$. 22. 5.

§3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Теоретический материал

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $a<b<\infty$, то полагают

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, если существует предел правой части равенства, и называется *расходящимся,* если указанный предел не существует. Аналогично, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, где $-\infty<a<b$, то полагают

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Наконец, если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$ числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

Признаки сходимости несобственных интегралов

Интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx;\ (a>0)$

а) сходится, если $|f(x)| \le \dfrac{M}{x^m}$ и $m>1$,

б) расходится, если $|f(x)| \ge \dfrac{M}{x^m}$ и $m \le 1$.

Здесь M и $m -$ постоянные.

Образцы решения задач

Пример 1. *Установить сходимость или расходимость интеграла* $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}-(-1)\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} + \lim_{b\to\infty} 1 = 0+1=1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 2. *Установить сходимость или расходимость интеграла* $\int\limits_a^{\infty} \dfrac{dx}{x};\ (a>1)$.

Решение. По определению имеем

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln a) = \infty - \ln a = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 3. *Установить сходимость или расходимость интеграла* $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^3}dx$.

Решение. Так как $|\cos x| \le 1$, то $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right| \le \dfrac{1}{x^3}$, т.е. подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $|f(x)| \le \dfrac{M}{x^m}$ при $m=3>1$ и $M \le 1$. Следовательно, интеграл сходится.

Пример 4. *Установить сходимость или расходимость интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$.

Решение. По определению несобственного интеграла имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^{3x}dx = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty} e^{3x}\Big|_a^0 =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(e^{3a} - e^{0}\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-\infty} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{e^{\infty}} - 1\right) = \frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}.$$ Следовательно, интеграл сходится.

Задачи для самостоятельной работы

Установить сходимость или расходимость интегралов.

1. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 2. $\int\limits_{0}^{\infty}\cos x dx$. 3. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx$. 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$. 5. $\int\limits_{1}^{\infty}\ln x dx$. 6. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x dx}{x^2}$.

7. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^5}}$.

Ответы

1.Интеграл расходится. 2. Интеграл расходится. 3. 1. 4. π.
5. .Интеграл расходится. 6. 1. 7. $\frac{2}{3}$.

Расчётно-графическая работа №7

1.Найти интегралы.

1.1. а) $\int\left(\frac{x^2 - 3\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{x^2 - 5}\right)dx$;

б) $\int\frac{3x^2\,dx}{\left(1-5x^3\right)^3}$;

в) $\int(7x-3)e^{2x}dx$;

г) $\int \cos^2 5x\,dx$.

1.2. а) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}+2}{x} - \frac{2}{x^2+3}\right)dx$;

б) $\int y\sqrt{3y^2+1}\,dy$;

в) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

г) $\int\sin^2\frac{3}{4}x\,dx$.

1.3. а) $\int\left(\frac{2-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}+\frac{7}{\sqrt{8-x^2}}\right)$;

б) $\int(1-3x)e^{2x-3x^2}dx$;

в) $\int(2x-3)\cos 4x\ dx$;

г) $\int\sin 2x\cos 4x dx$.

1.4. а) $\int\left(\frac{1-x^5}{x^4}+\frac{2}{x^2-5}\right)dx$;

б) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+9)^3}$;

в) $\int\sqrt{x^3}\ln x dx$;

г) $\int\sin\frac{2}{3}x\cos\frac{3}{2}x dx$.

1.5. а) $\int\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}+3^{x+1}+\frac{1}{10-x^2}\right)dx$;

б) $\int x\cos(5x^2-3)dx$;

в) $\int(3x-2)\cos 5x dx$;

г) $\int\sin^2\frac{2x}{5}dx$.

1.6. а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$;

б) $\int\frac{2x^2\,dx}{5-2x^3}$;

в) $\int(x^5+2x-1)\ln x dx$;

г) $\int\sin\frac{3}{5}x\cos 3x dx$.

1.7. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$;

б) $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{\operatorname{arctg}x}}$;

в) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx$;

г) $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2x}{3}dx$.

1.8. а) $\int\left(\frac{x+x^2\cos x-5}{x^2}+\frac{1}{3-x^2}\right)dx$;

б) $\int\frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int(3x^2-2x)\ln x dx$;

г) $\int\sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{5}dx$.

1.9. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{3}{x+2}-x\sqrt{x}\right)dx$;

б) $\int\frac{3\ln^5 x+5x-2}{x}dx$;

в) $\int(3-2x)\cos 7x dx$;

г) $\int\cos^2\frac{3x}{5}\cdot\sin\frac{x}{5}dx$.

1.10. а) $\int\left(\frac{1}{x^2-7}+3\cdot 2^x-\frac{1}{\sqrt{x^5}}\right)dx$;

б) $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x+3}-x}{x^2+1}dx$;

в) $\int(4\sqrt{x}+3)\ln x dx$;

г) $\int\cos 2x\cos\frac{3x}{4}dx$.

1.11. а) $\int\left(\frac{3x^3-xe^x+2}{x}-\frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{3x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int\frac{3-\ln x}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; г) $\int\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{3x}{5}dx$.

1.12. а) $\int\left(\frac{3-x\cdot 7^x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^2+3}\right)dx$; б) $\int e^{2x^3-5}\cdot x^2dx$;

в) $\int(3-4x)\sin\frac{x}{5}dx$; г) $\int(\sin 3x+\cos^2\frac{3x}{4})dx$.

1.13. а) $\int\left(\frac{3-2\cos^3 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{8-x^2}-\sqrt[7]{x^3}\right)dx$; б) $\int 3^{5x^2+2x-3}(5x+1)dx$;

в) $\int(1-3x)e^{-3x}dx$; г) $\int\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{2}{7}xdx$.

1.14. а) $\int\left(\frac{2x-5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-6}}-4^{x+1}\right)dx$; б) $\int\frac{3-\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}dx$;

в) $\int(\sqrt{x^3}+3)\ln xdx$; г) $\int\sin^2 2x\cos^2 2xdx$.

1.15. а) $\int\left(\frac{(x+1)^2}{x^2}+\frac{1}{8-x^2}-5^{x+1}dx\right)$; б) $\int e^{3x}(e^{3x}+5)^7dx$;

в) $\int(2-5x)\sin 5xdx$; г) $\int\cos\frac{2x}{9}\cos\frac{3x}{5}dx$.

1.16. а) $\int\left(\frac{x\cdot 3^x+2\sqrt{x}-5}{x}+\frac{3}{x^2+11}\right)dx$; б) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt[3]{1-5x^6}}$;

в) $\int e^x(x^2+3x+2)dx$; г) $\int\sin 3x\cos\frac{2x}{5}\operatorname{tg}\frac{2x}{5}dx$.

1.17. а) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}+(\sqrt[3]{x}-2)^3-\frac{1}{x^3}\right)dx$; б) $\int\frac{\operatorname{tg}^3 x+5}{\cos^2 x}dx$;

в) $\int(3x^2-4x+3)\ln xdx$; г) $\int(\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{3x}{8})dx$.

1.18. а) $\int\left(\frac{5}{x^2+7}-x\cdot\sqrt[3]{x}+2^{x+1}\right)dx$; б) $\int\frac{3x^2-2+e^{1/x}}{x^2}dx$;

в) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[7]{x^4}}dx$; г) $\int\sin 2x\cos 3x\cos 5xdx$.

1.19. а) $\int\left(\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx;$ б) $\int\frac{\sin x dx}{(3\cos x-5)^5};$

в) $\int(x-\pi)\cos\pi x dx;$ г) $\int\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{5x}{3}dx.$

1.20. а) $\int\left(\frac{2-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{2-x^2}}+2^{x+2}\right)dx;$ б) $\int\frac{3+(5ctgx-3)^{10}}{\sin^2 x}dx;$

в) $\int(3-8x)e^{-2x}dx;$ г) $\int\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{5x}{7}dx.$

1.21.а) $\int\left(\frac{x^2-9}{3-x}+\frac{1}{x^2-9}+2x\sqrt{x}-3^{x+1}\right)dx;$ б) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{3\sin x-5}};$

в) $\int(2x-3)e^{4x}dx;$ г) $\int\sin 2x\cos^2\frac{3x}{4}dx.$

1.22. а) $\int\left(\frac{(2x+3)^2}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{5}{x}\right)dx;$ б) $\int\frac{2e^{\sqrt{x}}+3\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$

в) $\int(x^2-x+3)\ln x dx;$ г) $\int\sin\frac{x}{3}\cos^2 x dx.$

1.23. а) $\int\left(\frac{2}{x^2-2}+(2\sqrt{x}-5)^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx;$ б) $\int x\sin(3-5x^2)dx;$

в) $\int(2-x^2)e^{2x}dx;$ г) $\int\cos\frac{x}{5}\cos\frac{4x}{5}dx.$

1.24. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}+\frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}-2^{x+3}\right)dx;$ б) $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x+5};$

в) $\int(3x^2-1)\ln x dx;$ г) $\int\sin 2x\cos 2x\sin\frac{x}{2}dx.$

1.25. а) $\int\left(\frac{1-5x}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{2^{x+1}}{3^x}\right)dx;$ б) $\int\frac{2x-1}{\sqrt[5]{x^2-x}}dx;$

в) $\int(x+1)^2\ln(x+1)dx;$ г) $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{2x}{3}dx.$

2. Вычислить интегралы

2.1. а) $\int_0^1\left(3x^2-x\sqrt{x}+\frac{3}{x^2+5}\right)dx;$ 2.2. а) $\int_0^1\left(3x^5-9\sqrt{x^7}+\frac{5}{x+4}\right)dx;$

б) $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$;

в) $\int_0^{\pi}(x+\pi)\sin x dx$.

б) $\int_1^e \frac{\ln^3 y+3}{y}dy$;

в) $\int_0^{\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x dx$.

2.3. а) $\int_0^1\left(\sqrt{x}-2\right)^2 dx$;

б) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}dy$;

в) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

2.4. а) $\int_1^2\left(\frac{4+3x^2-2x^3}{x^2}+\frac{1}{x+2}\right)dx$;

б) $\int_0^1 \frac{x^2}{(2x^3+1)^5}dx$;

в) $\int_0^1 (4-3x)e^{-3x}dx$.

2.5. а) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

б) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

в) $\int_1^e x^3\cdot\ln x dx$.

2.6. а) $\int_{-1}^1\left(4x^3-5\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^2+2}\right)dx$;

б) $\int_0^1 \frac{3-\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$;

в) $\int_0^{\pi/2}(2x-\pi)\sin 2x dx$.

2.7. а) $\int_0^3\left(3x^2-\sqrt{x^3}+\frac{5}{x^2-4}\right)dx$;

б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x+2}{x}dx$;

в) $\int_0^{\pi/2}(x-\pi)\cos 2x dx$.

2.8. а) $\int_0^1\left(\left(\sqrt{x^3}+4\right)^2+\frac{3}{x^2+2}\right)dx$;

б) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+16}dx$;

в) $\int_0^1 (\pi-2x)\cos\frac{\pi}{2}x dx$.

2.9. а) $\int_1^2 \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}dx$;

б) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int_0^1 e^{2x}(2x-3)dx$.

2.10. а) $\int_0^1\left(5x^4+7\sqrt{x^5}+\frac{2}{x^2+9}\right)dx$;

б) $\int_0^1 \frac{e^x}{(2e^x+5)^2}dx$;

в) $\int_1^e (3x^2+4x)\ln x dx$.

2.11. а) $\int_0^2\left(4x^3-2^x+\frac{5}{x^2+4}\right)dx$;

2.12.а) $\int_1^2\left(\frac{2x^2-5xe^x+1}{x}+\frac{1}{3-x^2}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2}(2x+1)\cos 3x dx$.

б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{(2\sin x+1)^2}dx$;

в) $\int\limits_1^e (2-3x^2)\ln x dx$.

2.13. а) $\int\limits_0^1 \left(6x^5 - 5\sqrt{x^3} + \frac{5}{x^2-4}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{\frac{\arcsin^3 x}{1-x^2}}dx$;

в) $\int\limits_0^1 e^{3x}(3-2x)dx$.

2.14. а) $\int\limits_1^4 \left(\frac{(2x+1)^2}{x} - \frac{1}{x^2-2}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\left(3x^2-2\right)^3}dx$;

в) $\int\limits_0^1 (3x-2)e^{5x}dx$.

2.15. а) $\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - 5x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2-9}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x}{2x^2+5}dx$;

в) $\int\limits_1^e (x^5+3)\ln x dx$.

2.16. а) $\int\limits_1^8 \left(\left(2\sqrt[3]{x}-1\right)^3 + \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x e^{3\sin x - 2}dx$;

в) $\int\limits_1^e (\sqrt{x}+1)\ln x dx$.

2.17. а) $\int\limits_1^2 \left(\frac{x^2-5}{x^2} + 2x - 2\right)dx$;

б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin^3 x}dx$;

в) $\int\limits_0^1 (5-x)e^{-2x}dx$.

2.18. а) $\int\limits_0^1 \left(4x - 10\sqrt{x^3} + \frac{x+3}{x+1}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{y-4}{(y^2+3)}dy$;

в) $\int\limits_0^{\pi} (3x-\pi)\cos\frac{1}{2}x dx$.

2.19. а) $\int\limits_1^4 \left(\frac{(2-x)^2}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x+1}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}dx$;

в) $\int\limits_0^1 (x+\pi)\sin\frac{\pi x}{2}dx$.

2.20. а) $\int\limits_0^1 \left(\left(3\sqrt{x}-2\right)^2 + \frac{x^2}{x^2-5}\right)dx$;

б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(\cos x + 2)dx}{\sin^2 x}$;

в) $\int\limits_1^e \frac{1-\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

2.21. а) $\int_1^2\left(2x-\frac{4}{x^2}+\ln 2\cdot 2^x\right)dx$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(\sin x+1)^2}dx$;

в) $\int_1^e(\sqrt[3]{x}-2)\ln x dx$.

2.22. а) $\int_1^2\left(\frac{\left(x^2+2\right)^2}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$;

б) $\int_1^e\frac{\ln^5 y+3}{y}dy$;

в) $\int_0^{\pi}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{x}{2}dx$.

2.23. а) $\int_0^1\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}+\frac{2}{x^2+16}\right)dx$;

б) $\int_0^2\frac{y^2}{\sqrt{y^3+1}}dy$;

в) $\int_0^{\pi}(3x-\pi)\cos x dx$.

2.24. а) $\int_0^1(2\sqrt{x}-\frac{3-\sqrt{x^2+2}}{x^2+2}+3^x)dx$;

б) $\int_0^1\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}}{1+x^2}dx$;

в) $\int(5x-2)e^{-5x}dx$.

2.25. а) $\int_0^1\left(\left(x\sqrt{x}+2\right)^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$;

б) $\int_{-1}^1\frac{2y+\operatorname{arctg}^5 y}{y^2+1}dy$;

в) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

3.1. $y=(x+1)^2, y=-x+1$.

3.2. $y=\frac{1}{x^2+1}$ и $y=\frac{1}{2}x^2$.

3.3. $y=x^2/2, y=x^3/8$.

3.4. $y=3-2x-x^2, y=0$.

3.5. $y^2=x+1$ и $y^2=9-x$.

3.6. $y=3+2x-x^2$ и $y=x^2-4x+3$.

3.7. $y=\frac{6}{x}$, $x+y=7$.

3.8. $3x-y=0$, $y=4-x^2$.

3.9. $y=4-x^2$ и $x+y=2$.

3.10. $y=\frac{x^3}{4}$, $y=2x$.

3.11. $y=(x+1)^2, y=(x-1)^2.$ 3.12. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0.$

3.13. $y=3x^2+1, y=3x+7.$ 3.14. $y=3x-x^2,\ y+x=3,\ x=0.$

3.15. $y=5-x^2,\ \ y=3-x.$ 3.16. $y=4-x^2,\ y=8-2x^2.$

3.17. $xy=4,\ x+4y-10=0.$ 3.18. $y=x^2+2x, y=2-x; x=0; x=-2.$

3.19. $y=2x-x^2, y=5x-4.$ 3.20. $y=2-\frac{x^2}{2},\ y+x=2.$

3.21. $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$ 3.22. $y=x^2+1;\ \ y=9-x^2.$

3. 23. $y=x,\ y=\frac{1}{8}x,\ y=\frac{1}{x^2}.$ 3.24. $y=x^2+2x-3,\ \ y=1-x.$

3.25. $y=x^3+2,\ y=2-x^2.$

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

4.1. $\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x+1}\cdot dx$ 4.2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x+1)^2+4}$ 4.3. $\int_0^\infty x2^{-x^2}\,dx$

4.4. $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-3}}\cdot dx$ 4.5. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\cdot dx$ 4.6. $\int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2}$

4.7. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\cdot dx$ 4.8. $\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cdot dx$ 4.9. $\int_1^\infty \frac{1+x^2}{x^3}\cdot dx$

4.10. $\int_4^\infty \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-9}}\cdot dx$ 4.11. $\int_3^\infty \frac{dx}{(x-2)^3}$ 4.12. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}\cdot dx$

4.13. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\cdot dx$ 4.14. $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx$ 4.15. $\int_1^\infty \frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cdot dx$

4.16. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x-2)^2+9}$ 4.17. $\int_3^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\cdot dx$ 4.18. $\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\cdot dx$

4.19. $\int_3^\infty \frac{x}{(x^2-4)^3}\cdot dx$ 4.20. $\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx$ 4.21. $\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$

4.22. $\int_4^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}$ 4.23. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ 4.24. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}\cdot dx$

4.25. $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^3}\cdot dx$

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Теоретический материал

Решение различных задач методом систематического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется дифференциальным.

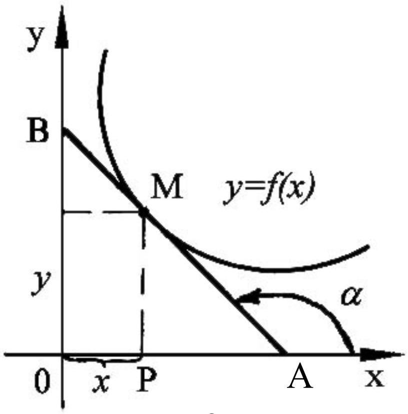


Рис.2.1

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в тождество. Приведем пример, приводящий к дифференциальному уравнению.

Рассмотрим задачу нахождения функции, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Пусть $y = f(x)$ – искомая функция, а $M(x, y)$– произвольная точка кривой, определяемой этим уравнением; предположим для определенности, что кривая расположена в первой четверти (рис. 2.1). По условию задачи имеем $BM = MA$, а следовательно, $OP = PA = x$. Из рис. 2.1 видно, что $\operatorname{tg}(\angle PAM) = \dfrac{MP}{PA}$, т.е. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{y}{x}$, или

$-\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$.

Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной, который в точке $M(x, y)$ равен y', получаем дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{2.1}$$

Решением уравнения (2.1) является всякая функция вида

$$y = \frac{C}{x}, \tag{2.2}$$

где C– постоянная. В самом деле, заменив в уравнении (2.1) y его значением из равенства (2.2), получим

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{\frac{C}{x}}{x}, \text{ т.е. } -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

Следовательно, равенство (2.2) определяет множество функций, обладающих указанным в задаче свойством. Графики этих функций представляют собой семейство гипербол (рис. 2.2).

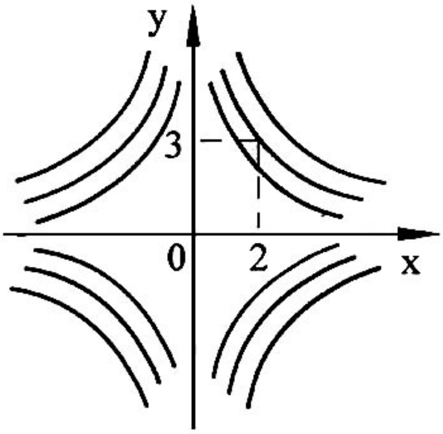


Рис.2.2

В дальнейшем рассмотрим еще ряд примеров, которые показывают, каким мощным математическим аппаратом являются дифференциальные уравнения при решении различных и весьма непростых практических задач.

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные $y', y'', \cdots, y^{(n)}$. Символически дифференциальное уравнение записывается так :

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

Разрешая последнее уравнение относительно производной y', если это возможно, получим

$$y' = f(x, y). \tag{2.3}$$

Рассмотренный выше пример показывает, что дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

При различных значениях постоянной C равенство $y = C/x$ определяет различные решения уравнения $y' = -y/x$.

Например, непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции $y = 1/x$ $(C = 1)$, $y = 3/x$ $(C = 3)$ являются решениями уравнения (2.1).

Таким образом, каждому дифференциальному уравнению соответствует, как правило, бесконечная совокупность его решений.

Определение. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его *частным решением*. С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых *интегральными кривыми*, а каждое частное решение представляет отдельную интегральную кривую.

Определение. Функция $y=\varphi(x,C)$ представляет *общее решение* дифференциального уравнения первого порядка, если при любом значении C эта функция является решением уравнения и любое его частное решение может быть получено из $y=\varphi(x,C)$ при некотором значении постоянной C.

Иногда не удается получить решение дифференциального уравнения в явной форме $y=\varphi(x)$ или $y=\varphi(x,C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида

$$\Phi(x,y)=0,\ \text{или}\ \Phi(x,y,C)=0.$$

Определение. Выражение $\Phi(x,y)=0$, или $\Phi(x,y,C)=0$, в этом случае называют *интегралом (частным, общим)* дифференциального уравнения.

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое является ответом на поставленный вопрос. Для того, чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, задают так называемое *начальное условие*.

В случае дифференциальных уравнений первого порядка под *начальными условиями* для его решения $y=y(x)$ понимают условия, состоящие в том, что $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е.

$$y(x_0)=y_0,$$

где x_0 и y_0– заданные числа (начальные данные) такие, что при $x=x_0$ и $y=y_0$ функция имеет смысл, т.е. существует $f(x_0,y_0)$.

Определение. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y=y(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее при заданных начальных данных (x_0, y_0) начальному условию $y(x_0) = y_0$, или, в другой записи, $y_{x=x_0} = y_0$, где x_0, y_0– заданные числа.

Пусть даны начальные данные $x_0 = 2, y_0 = 3$ и требуется найти частное решение $y = y(x)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 3$. Выше показано, что функция (2.2) при любом C является решением уравнения (2.1).

Подставим в формулу (2.2) начальные данные $x = 2$, $y = 3$, найдем $3 = C/2$, т.е. $C = 6$. Таким образом, искомым частным решением уравнения (2.1) является функция $y = 6/x$.

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку (x_0, y_0).

Так, общее решение $y = C/x$ уравнения $y' = -y/x$ определяет семейство равносторонних гипербол (см. рис.2.2). Частное решение $y = 6/x$ определяет гиперболу, проходящую через точку (2;3).

Рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. *Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными*

Определение. Дифференциальное уравнение называется *уравнением первого порядка с разделяющимися* переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{2.4}$$

Для уравнения (2.4) теорема Коши о существовании и единственности решения может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. Если функция $f_1(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, функция $f_2(y)$ и ее производная по y непрерывна в интервале $(c;d)$, то для любых начальных данных $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in (c;d)$ существует, причем единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Другими словами, при указанных условиях через любую точку прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ проходит, и при том единственная, интегральная кривая уравнения.

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными

(2.10) можно переписать в виде *(разделить переменные)*

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \qquad (2.5)$$

Определение. Уравнение вида (2.5) называется уравнением с разделёнными переменными.

Теорема. Если существуют интегралы $\int \frac{dy}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx$, то общий интеграл уравнения с разделенными переменными задается уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C,$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций - $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:
1) разделить переменные;
2) интегрируя почленно полученное уравнение с разделёнными переменными (2.5), найти его общий интеграл;
3) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (если это требуется).

2.Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Легко можно убедиться в том, что дифференциальные уравнения

$$y' = \frac{y-x}{y+x}; \qquad y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}; \qquad y\,dx = (x+y)\,dy$$

не являются уравнениями с разделяющимися переменными. Они являются *однородными уравнениями*.

Определение. Функция $g(x,y)$ называется однородной функцией k -го порядка, если при любом t имеет место тождество

$$g(tx,ty) = t^k g(x,y).$$

Например, $g(x,y) = 2x^3 - 5xy^2$ – однородная функция третьего порядка, т.к.

$$g(tx,ty) = 2(tx)^3 - 5tx(ty)^2 = 2t^3x^3 - 5t^3xy^2 =$$
$$= t^3\left(2x^3 - 5xy^2\right) = t^3 g(x,y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Дадим понятие однородной функции нулевого измерения.

Определение. Функция $f(x,\ y)$ называется *однородной функцией нулевого порядка,* если при любом t справедливо тождество $f(t\cdot x;\ t\cdot y) = f(x,\ y)$.

Например, функции $f_1(x,\ y) = \dfrac{y-x}{y+x}$; $f_2(x,\ y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ – однородные функции нулевого измерения, т. к.

$$f_1(t\cdot x,\ t\cdot y) = \frac{ty-tx}{ty+tx} = \frac{t(y-x)}{t(y+x)} = \frac{y-x}{y+x} = f_1(x,\ y);$$

$$f_2(tx;\ yt) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)\cdot(ty)} = \frac{t^2x^2+t^2y^2}{2tx\cdot ty} = \frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2(2xy)} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = f_2(x,y).$$

Чтобы проверить, является ли дифференциальное уравнение однородным уравнением, нужно в этом уравнении заменить x на tx, y на ty. Если после этого t всюду сократится и получится первоначальное уравнение, то данное уравнение – *однородное.*

Уравнение $y\,dx = (x+y)\ dy$ является однородным. Действительно, заменив x на tx, y на ty, получим $t\cdot ydx = (xt+yt)\ dy$; $t\cdot ydx = (xt+yt)\ dy$, сократив уравнение на t, вернёмся к исходному уравнению.

Так как функция $f(x,\ y)$ в правой части уравнения $y' = f(x,\ y)$ является однородной функцией нулевого измерения, то, по определению, $f(tx,\ yt) = f(x,\ y)$. Положим в этом тождестве $t = \dfrac{1}{x}$, получим $f(x,\ y) = f\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)$, т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения y/x. Дифференциальное уравнение первого порядка в этом случае примет вид $y' = f\ \left(\dfrac{y}{x}\right)$.

При решении однородных дифференциальных уравнений можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) Сделаем подстановку $\dfrac{y}{x} = z(x) = z$, т. е. $y = x\cdot z$ а $y' = z + x\cdot z'$.

2) После подстановки уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ примет вид

$z + x \cdot z' = f(z)$или $x \cdot z' = f(z) - z$, или $x \cdot \frac{dz}{dx} = f(z) - z$–уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

3) Интегрируя, находим $\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + c$.

Найдя отсюда выражение z как функции от x, подставим его в равенство $y = x \cdot z$, получим искомое общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка

4)Чаще всего не удается найти явное выражение функции $z(x)$. Тогда после интегрирования следует в левую часть вместо z подставить y/x. В результате получим общий интеграл (т. е. общее решение в неявном виде).

3.*Линейные дифференциальные уравнения первого порядка*

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$называется *линейным*, если имеет следующий вид:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{2.6}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции от x. Приведем теорему Коши для линейных уравнений первого порядка.

Теорема Коши. Пусть $(a;b)$ интервал, в котором функция $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывна. Тогда для любых $x_0 \in (a;b)$ и $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ задача Коши с начальными значениями $(x_0; y_0)$ имеет единственное решение, т.е. существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (2.6), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка (2.6) сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки

$$y = u \cdot v, \tag{2.7}$$

где u и v– неизвестные функции от x. Из (2.7) находим $y' = u'_x v + u v'_x$ или

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}.$$

Подставив значения y и y' в уравнение (2.7), получаем

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x), \text{ или}$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u\right) = Q(x). \qquad (2.8)$$

Так как искомая функция y подстановкой (2.7) представлена в виде произведения двух функций u и v, то одну из них, например u, мы можем выбрать по нашему усмотрению, кроме $u = 0$. Выберем функцию так, чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0, \qquad (2.9)$$

т.е. в качестве функции u возьмем одно из частных решений u^* уравнения (2.9). Решая уравнение (2.9) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем отличную от нуля функцию $u^* = e^{-\int P(x)dx}$.

Так как функция u^* является решением уравнения (2.8), то после ее подстановки в уравнение получим

$$u^* \frac{dv}{dx} = Q(x), \text{ т.е. } dv = \frac{Q(x)}{u^*(x)}dx. \qquad .$$

Решив последнее уравнение как уравнение с разделенными переменными, в котором u^* известна, найдем функцию $v = v(x, C)$, содержащую произвольную постоянную C и являющуюся общим решением уравнения .

Заменив в равенстве $y = u \cdot v$ функции u и v найденными значениями, получим искомое решение $y = u^*(x) \cdot v(x, C)$ уравнения (2.6).

Рассмотренные выше типы дифференциальных уравнений можно классифицировать в виде таблицы:

1.Уравнения с разделяющимися переменными	$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	$\int \frac{dy}{f(y)} = \int f_1(x)dx$
2. Однородные уравнения 1 -го порядка	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{y}{x} = z(x) = z$, $y = x \cdot z$, $y' = z + x \cdot z'$
3. Линейные уравнения 1-го порядка	$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$	$y = u \cdot v$, $y' = u'_x v + u v'_x$
4. Уравнения Бернулли	$y' + P(x) \cdot y = Q(x) y^{\alpha}$	$y = u \cdot v$, $y' = u'_x v + u v'_x$

Образцы решения задач

Пример 1. Найти частное решение уравнения
$2yy' = 1 - 3x^2$,если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$, отсюда $2y\,dy = \left(1 - 3x^2\right)dx$.

Интегрируя обе части последнего неравенства, найдем $\int 2y\,dy = \int\left(1 - 3x^2\right)dx$, или $2\int y\,dy = \int dx - 3\int x^2\,dx$,

или $2\cdot\frac{y^2}{2} = x - \frac{3x^2}{3} + C$, т.е. $y^2 = x - x^2 + C$.

Подставив начальное значение $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, найдем C: $9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения
$\left(x^2y^2 - x^2y\right)dy - xy^2\,dx = 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные. Для этого преобразуем данное уравнение, вынося общий множитель слева x^2: $x^2\left(y^2 - y\right)dy = xy^2\,dx$.

Разделим правую и левую части уравнения на x^2y^2:

$\frac{x^2}{x^2y^2}\left(y^2 - y\right)dy = \frac{xy^2}{x^2y^2}dx$, или $\frac{y(y-1)}{y^2}dy = \frac{dx}{x}$, или $\frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем обе части последнего равенства: $\int\frac{y-1}{y}dy = \int\frac{dx}{x}$, $\int\left(1 - \frac{1}{y}\right)dy = \int\frac{dx}{x}$, или $\int dy - \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$, откуда $y - \ln|y| = \ln|x| + C_1$ – общий интеграл данного уравнения.

Пример 3. Найти решения уравнения

$$\left(x^2 - 2y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным, т.к. все слагаемые имеют вторую степень. В данном уравнении функция

$P(x, y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x, y) = 2xy$ – однородные второго порядка, тогда $\left(x^2 - 2y^2\right) = -2xy\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{x^2 - 2y^2}{2xy}$ – однородная нулевого порядка.

Положим $y = z \cdot x$, откуда $y' = z'_x \cdot x + z \cdot x'_x = z'_x \cdot x + z$. Подставим эти выражения в данное уравнение $z'_x \cdot x + z = -\dfrac{x^2 - 2z^2 \cdot x^2}{2x \cdot z \cdot x}$, т.е. $z'_x \cdot x + z = \dfrac{2z^2 - 1}{2z}$, или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1}{2z} - z$, приведем правую часть к общему знаменателю, получим $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1 - 2z^2}{2z}$, или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = -\dfrac{1}{2z}$.

Умножим правую и левую части на dx: $dz \cdot x = -\dfrac{1}{2z} dx.$

Умножим правую и левую части на $2z$ и разделим на x, получим $2z\,dz = -\dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем почленно это уравнение:

$\int 2z\,dz = -\int \dfrac{dx}{x}$, откуда $z^2 = -\ln|x| + \ln|C|$, т.е. $z^2 = \ln\dfrac{|C|}{|x|}$, или $\dfrac{C}{x} = e^{z^2}$, откуда $x = C \cdot e^{-z^2}$.

Возвращаясь к прежней функции y, находим общий интеграл $x = C \cdot e^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$, если $y = 2$ при $x = 1$.

Решение. Данное уравнение является однородным, т.к. все слагаемые имеют вторую степень. Запишем данное уравнение в виде

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}. \tag{2.10}$$

Пусть $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Тогда $\varphi(tx,ty)=\dfrac{t^2x^2+t^2y^2}{2t^2xy}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}=\varphi(x,y)$, т.е. оно однородное. Положим $y=zx$, откуда $y'=z'\cdot x+z$. Подставляя значение y и y' в уравнение (4.10), имеем $z'\cdot x+z=\dfrac{x^2+z^2x^2}{2zx^2}$,откуда после сокращения на x^2 $z'\cdot x+z=\dfrac{1+z^2}{2z}$, $\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1+z^2}{2z}-z$, $\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1+z^2-2z^2}{2z}$, $\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1-z^2}{2z}$.

Умножим на dx правую и левую части, получим $x\,dz=\dfrac{1-z^2}{2z}dx$.

Разделим правую и левую части уравнения на x и $\dfrac{1-z^2}{2z}$. Получаем $\dfrac{2z\,dz}{1-z^2}=\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем почленно это уравнение:

$\int\dfrac{2z\,dz}{1-z^2}=\int\dfrac{dx}{x}\Leftrightarrow -\int\dfrac{d\left(1-z^2\right)}{1-z^2}=\int\dfrac{dx}{x}$, т.к. $d\left(1-z^2\right)=\left(1-z^2\right)'dz=-2z\,dz$.

Получаем $-\ln\left|1-z^2\right|=\ln|x|+\ln|C|$, $\ln\left|1-z^2\right|^{-1}=\ln\left|\dfrac{x}{C}\right|$, откуда $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{x}{C}$, или $x\left(1-z^2\right)=C$.

Возвращаясь к прежней функции y, находим общий интеграл

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=C.$$

Подставив в найденное решение начальное условие, найдем

$$1\left(1-\frac{2^2}{1^2}\right)=C\text{, т.е. } 1-4=C\text{, или } C=-3.$$

Итак, искомый частный интеграл будет

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=-3\text{, или } x^2-y^2+3x=0.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$\left(1+x^2\right)y'-xy=2x.$$

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $(1+x^2)\neq 0$, приведем его к виду линейного уравнения

$$y'-\frac{xy}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2} \quad . \qquad (2.11)$$

Здесь $P(x)=-\frac{x}{1+x^2}$, $Q(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

Положим $y=u\cdot v$, откуда $y'=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$.

Подставим эти значения y и y' в уравнение (2.11):

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{xuv}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-\frac{x\cdot u}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Выберем функцию $u\neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$\frac{du}{dx}-\frac{xu}{1+x^2}=0.$$

Тогда для нахождения функции v получим уравнение

$$u\frac{dv}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Решаем первое из них как уравнение с разделяющимися переменными (при $u\neq 0$):

$$\frac{du}{dx}-\frac{xu}{1+x^2}=0, \text{ т.е. } \frac{du}{u}=\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегрируем почленно это уравнение :

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{x\,dx}{1+x^2} \text{ , или } \int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2},$$

т.к. $d\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)'dx=2x\,dx$, откуда $x\,dx=\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$,

т.е. $\ln|u|=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$, откуда

$$u=\sqrt{1+x^2}.$$

Подставив значение функции u во второе уравнение, найдем

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dv}{dx}=\frac{2x}{1+x^2},\text{ т.е. } dv=\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int dv=\int\frac{2x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}},\text{ или } \int dv=\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right),\text{т.к. } d\left(1+x^2\right)=2x\,dx.$$

Откуда $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C$, или $v=\dfrac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C,$ или

$$v=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функции u и v их найденными выражениями, получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=\sqrt{1+x^2}\left(C-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right),\text{ или } y=C\sqrt{1+x^2}-2.$$

Пример 6. Найти частное решение уравнения $xy'-y=x^3$, если $y=1/2$ при $x=1$.

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $x\neq 0$, приведем его к виду (2.6), т.е. к линейному уравнению:

$$y'-y\frac{1}{x}=x^2.$$

Здесь $P(x)=-\dfrac{1}{x}$, $Q(x)=x^2$.

Положим $y=u\cdot v$, откуда $y'=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$.

Подставим эти значения в уравнение

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-u\cdot v\cdot\frac{1}{x}=x^2.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например v, и вынесем v за скобку

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}\right)=x^2.$$

Выберем функцию u так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=0.$$

Тогда вторую функцию найдём из уравнения

$$u\frac{dv}{dx}=x^2.$$

Решаем первое уравнение как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x},\ \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем почленно уравнение

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},\text{ или } \ln u=\ln x,\text{или } u=x.$$

Подставив это значение в уравнение $u\frac{dv}{dx}=x^2$, найдем

$$x\frac{dv}{dx}=x^2,\text{ т.е. } dv=x\,dx.$$

Интегрируя почленно $\int dv=\int x\,dx,$ получим

$$v=\frac{x^2}{2}+C.$$

Заменив в подстановке $y=u\cdot v$ функциями u и v их выражениями, получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right),\text{ или } y=\frac{x^3}{2}+Cx.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным данным $y=\frac{1}{2}$ при $x=1$. Для этого подставим в общее решение $y=\frac{1}{2}$ и $x=1$, получим $\frac{1}{2}=\frac{1^3}{2}+C\cdot 1$, или $0=C$.

Искомое частное решение данного уравнения $y=\frac{x^3}{2}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y+x^2y\right)dy=0.$

2. $yxe^{x^2}\,dx+(1+y)dy=0$.

3. $x(1+y^2)+e^x y'=0$, если $y=0$ при $x=0$.

4. $2xdx+3ydy=4x^2ydy-2xy^2dx$.

5. $(x+y)y'=y$.

6. $y^2+x^2y'=xyy'$.

7. $xy'-y=x\cdot\cos^2\dfrac{y}{x}$.

8. $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$.

9. $xy'+y=x^{-10}$.

10. $x^2y'-2xy=-3$, если $y=1$ при $x=-1$.

11. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{xe^x},\quad y(1)=0$.

12. $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$.

13. $x\cdot y'+y=y^2\cdot\ln x$.

14. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x+1}\cdot y=(x+1)^3$, если $y=3$ при $x=0$.

Ответы

1. $(y^2+1)(1+x^2)=C$. 2. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\ln|y|+y=C$.

3. $-xe^{-x}-e^{-x}+\operatorname{arctg}y=-1$. 4. $\dfrac{4x^2-3}{(1+y^2)^2}=C$. 5. $y=C\cdot e^{\frac{x}{y}}$. 6. $y=C\cdot e^{\frac{y}{x}}$.

7. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln|x|+C$. 8. $y=(x+C)\sin x$. 9. $y=\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{9x^9}+C\right)$.

10. $y=2x^2+\dfrac{1}{x}$. 11. $y=\dfrac{1}{ex}-\dfrac{1}{xe^x}$. 12. $y=\dfrac{1}{x}\cdot(-\cos x+C)$.

13. $\dfrac{1}{y}=\ln x+1+Cx$. 14. $y=\dfrac{(x+1)^4}{2}+\dfrac{5}{2}\cdot(x+1)^2$.

§2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.12}$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами формулируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $(x_0; y_0; y_0')$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y_0' существует единственное решение уравнения (2.12), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = x_0, y'(x_0) = y_0'$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2.12) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) \neq 0.$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$, и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

Действительно $y_1' = 2e^{2x}$, $y_2' = e^x$, $y_3' = 5 \cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2:

$$W_1(x) = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) = e^{2x} \cdot e^x - 2e^{2x} \cdot e^x = -e^{3x} \neq 0.$$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3:

$W_2(x) = y_1(x)\cdot y_3'(x) - y_1'(x)\cdot y_3(x) = e^{2x}\cdot 10e^{2x} - 2e^{2x}\cdot 5e^{2x} =$
$= 10e^{4x} - 10e^{4x} = 0.$

Вронскиан $W_1(x) \neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *образуют фундаментальную пару решений.*

Вронскиан $W_2(x) = 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют *фундаментальную пару решений.*

Теорема (о структуре общего решения). *Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2–произвольные постоянные.

Выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (2.12) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнения (2.12) в виде $y = e^{kx}$, где k=const; тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$.

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (2.12), получим $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, т.е. $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$.

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (2.13)$$

Определение. Уравнение (2.13) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (2.13) достаточно в уравнении (2.12) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2, а следовательно, и частные решения уравнения (2.12):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}.$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны* .

В этом случае имеем два частных решения уравнения (2.12):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{k_1 x}k_2 e^{k_2 x} -$$

$$- k_1 e^{k_1 x}e^{k_2 x} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ и $k_2 \neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (2.12) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (2.14)$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_1 = e^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$. Действительно, $y_2' = \left(xe^{kx}\right) = x'e^{kx} + x\left(e^{kx}\right)' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1 + kx)$,

$$y_2'' = \left(e^{kx}\right)'(1 + kx) + e^{kx}(1 + kx)' = ke^{kx}(1 + kx) + e^{kx}k = e^{kx}\left(2k + k^2 x\right).$$

Подставив выражение для y, y' и y'' в уравнение (2.12), получим

$$e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) + pe^{kx}(1 + kx) + qxe^{kx} = e^{kx}\left(x\left(k^2 + pk + q\right) + 2k + p\right) = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\dfrac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) =$$
$$= e^{2kx}[1 + kx - kx] = e^{2kx} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (2.15)$$

Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные числа*:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \; p^2 - 4q < 0.$$

Тогда $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{i^2(4q - p^2)}}{2} = -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Обозначив $a = \dfrac{-p}{2}$ и $b = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, получим $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi \quad (b \neq 0)$.

В этом случае $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ являются решениями уравнения (2.12) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему. Действительно,

$$y_1' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (\cos bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (-\sin bx) \cdot b =$$
$$= e^{ax} \cdot (a \cdot \cos bx - b \cdot \sin bx).$$
$$y_2' = \left(e^{ax}\right)' \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot (\sin bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot \cos bx \cdot b =$$
$$= e^{ax}(a \cdot \sin bx + b \cdot \cos bx).$$

Подставим выражения для $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_2(x)$ и $y_2'(x)$ в вронскиан, получим

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{ax}\cos bx\, e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) -$$
$$- e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)e^{ax}\sin bx = e^{2ax}\cos bx(a\sin bx + b\cos bx) -$$
$$- e^{2ax}\sin bx(a\cos bx - b\sin bx) = e^{2ax}\left(a\cos bx\sin bx + b\cos^2 bx -\right.$$
$$\left.- a\sin bx\cos bx + b\sin^2 bx\right) = e^{2ax}b\left(\cos^2 bx + \sin^2 bx\right) = e^{2ax}b \neq 0.$$

При вычислении воспользовались основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.12) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$, или

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \qquad (2.16)$$

Образцы решения задач

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 + 7k + 12 = 0$.

Корни найдем по формуле

$k_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2}$, откуда $k_1 = -3$ и $k_2 = -4$.

Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2.14), получим общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, получим

$y' = C_1 e^{-3x}(-3) + C_2 e^{-4x}(-4) = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}$.

Согласно заданным начальным условиям имеем

$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-3 \cdot 0} + C_2 e^{-4 \cdot 0}, \\ -2 = -3C_1 e^{-3 \cdot 0} - 4C_2 e^{-4 \cdot 0}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -2 = -3C_1 - 4C_2, \end{cases}$

или $\begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ -2 = -3C_1 - 4(1 - C_1), \end{cases}$ или $\begin{cases} C_2 = 1 - C_1, \\ 2 = C_1, \end{cases}$ откуда

$C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Таким образом, искомым частным решением является функция $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2 - k - 6 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, откуда $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$. Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2.14), получим общее решение $y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-2x}$.

Пример 3. Найти решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'',

y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2+8k+16=0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 16}}{2}=\dfrac{-8\pm 0}{2}=-4$, откуда $k_1=k_2=-4$. Подставляя найденные значения k в формулу (2.15), получим общее решение $y=e^{-4x}\cdot(C_1+C_2\cdot x)$.

Пример 4. Найти решение уравнения $y''+9y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2+9=0$
$k^2=-9$; $\quad k_{1,2}=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=\pm 3\cdot i$. Уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=\pm 3i \quad (a=0;\quad b=3)$.

По формуле (2.16) общим решением будет

$$y=e^{0x}(C_1\cdot\cos\ 3x+C_2\sin\ 3x),$$

или $y=C_1\cdot\cos 3x+C_2\cdot\sin 3x$.

Пример 5. Найти частное решение уравнения $y''-6y'+10y=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1,\quad y'(0)=3$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-6k+10=0$.

Корни найдем по формуле

$$k_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 10}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm 2i}{2}=3\pm i.\quad (a=3;\quad b=3).$$

По формуле (2.16) общим решением будет

$$y=e^{3x}\cdot(C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x).$$

Дифференцируя общее решение, получим

$$y'=3e^{3x}(C_1\cdot\cos x+C_2\sin x)+e^{3x}(-C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x).$$

Подставив начальные условия $y(0)=1,\quad y'(0)=3$ получим систему для определения C_1 *и* C_2:

$$\begin{cases}1=e^0\cdot(C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0),\\ 3=3\cdot e^0(C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0)+e^0(-C_1\cdot\sin 0+C_2\cdot\cos 0),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1=1\cdot(C_1\cdot 1+C_2\cdot 0),\\ 3=3\cdot 1(C_1\cdot 1+C_2\cdot 0)+1(-C_1\cdot 0+C_2\cdot 1),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = C_1; & C_1 = 1. \\ 3 = 3C_1 + C_2; & C_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив полученные значения $C_1 = 1,\ \ C_2 = 0$ в общее решение, получим $y = e^{3x} \cdot \cos x$ – искомое частное решение.

Задачи для самостоятельной работы

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1. $y'' + y' - 2y = 0;$
2. $y'' - 2y' = 0;$
3. $y'' - 4y' + 5y = 0;$
4. $y'' + 4y = 0;$
5. $y'' - 2y' + y = 0$ при $y(0) = 4,\ y'(0) = -3;$
6. $y'' + 2y' + 2y = 0$ при $y(0) = 0,\quad y'(0) = -1;$
7. $y'' - 8y' + 15y = 0$ при $y(0) = 2,\ y'(0) = 8;$
8. $y'' - 2y' + 5y = 0$ при $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3;$
9. $y'' + 16y = 0$, при $y(0) = 1,\ y'(0) = 4;$
10. $y'' - 6y' + 9y = 0$ при $y(0) = 2,\ y'(0) = 7;$
11. $y'' + 5y' + 6y = 0$, при $y(0) = 3,\ y'(0) = -8;$
12. $y'' + 4y + 4 = 0;$
13. $y'' + 9y = 0;$
14. $y'' - 6y' + 10y = 0$ при $y(0) = 1,\quad y'(0) = 3;$
15. $y'' - y' - 6y = 0;$
16. $y'' - 7y' + 10 = 0;$
17. $y'' + 8y' + 16y = 0;$
18. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

Ответы

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 2. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$. 3. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
4. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. 5. $y = 4e^x - 7e^x \cdot x$. 6. $y = -e^{-x} \cdot \sin x$.
7. $y = e^{3x} + e^{5x}$. 8. $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$. 9. $y = \cos 4x + \sin 4x$.
10. $y = 2 \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot x$. 11. $y = e^{-2x} + 2 \cdot e^{-3x}$. 12. $y = e^{-2x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$.
13. $y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x$. 14. $y = e^{3x} \cdot \cos x$.
15. $y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-2x}$. 16. $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{5x}$.
17. $y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$. 18. $y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{2x}$.

§3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретический материал

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{2.17}$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (2.17).

Теорема (о структуре общего решения). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть y – общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, $y_ч$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Тогда

$$y = y_0 + y_ч.$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного дифференциальные уравнения второго порядка состоит в нахождении какого-либо частного решения.

Укажем один из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. К таким функциям $f(x)$ относятся следующие функции: экспонента $e^{\alpha x}$ $(\alpha = \mathrm{const})$; многочлены n-й степени относительно переменной x $P_n(x)$; тригонометрические функции $\cos nx$; $\sin nx$, а также их произведения.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $y_ч$ – уравнения (2.17) по виду правой части $f(x)$.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (2.17) *имеет вид* $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где α – const; $P_n(x)$ – многочлен *n*-й относительно *x*. В этом случае уравнение примет вид

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}. \qquad (2.18)$$

Тогда возможны следующие варианты.

1)Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0.$$

Тогда частное решение нужно искать в виде $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$,где $Q_n(x)$–многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2)Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x$.

3)Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $y_ч$ является решением уравнения (2.18), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Пусть правая часть $f(x)$ *уравнения* (2.17) имеет вид

$$f(x)=M\cdot\cos\beta x+N\cdot\sin\beta x,$$

где *M и N* – постоянные числа. Тогда вид частного решения $y_ч$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения , то частное решение $y_ч$ имеет вид

$$y_ч=A\cdot\cos\beta x+B\cdot\sin\beta x,$$

где *A* и *B* – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения, то

$$y_ч=(A\cdot\cos\beta x+B\cdot\sin\beta x)\cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos\beta x$ или только $\sin\beta x$, следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

<table>
<tr><td colspan="4">Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.
Заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1. $k^2 + pk + q = 0\ (*)$.
Найти $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.</td></tr>
<tr><td>Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны</td><td colspan="2">$k_2 \neq k_1$</td><td>$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$</td></tr>
<tr><td>Случай 2. Корни характеристического уравнения действительны и равны</td><td colspan="2">$k_1 = k_2 = k$</td><td>$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$</td></tr>
<tr><td>Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные:</td><td colspan="2">$p^2 - 4q < 0$ Введем
$i^2 = -1$. Тогда
$p^2 - 4q = i^2\left(4q - p^2\right)$
или
$k_{1,2} = a \pm bi$</td><td>$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, $y = y_ч + y_о$,
$y_о$ – решение однородного уравнения,
$y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Случай 1.
$f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$</td><td>$a \neq k_1, a \neq k_2$</td><td>$y_ч = Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 \neq k_1$</td><td>$y_ч = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>$a = k_2 = k_1$</td><td>$y_ч = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Случай 2.
$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_n \sin bx)$</td><td colspan="2">$z=a+bi$ не является корнем характеристического уравнения (*)
$y_ч = e^{ax}(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z=a+bi$ является корнем характеристического уравнения (*)
$y_ч = xe^{ax}(S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx)$</td></tr>
</table>

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и *порядок оформления* решения.

Образцы решения задач

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 7k + 12 = 0.$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

$$k_1 = -3; \qquad k_2 = -4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $y_ч$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x) = 24x^2 + 16x - 15$ с общим видом правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x).$$

$24x^2 + 16x - 15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x} = 1$, т. е. $\alpha = 0$. Так как $\alpha = 0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(k_1 = -3; \ \ k_2 = -4)$, частное решение нужно искать в виде $y_ч = Ax^2 + Bx + C.$

$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C -$ многочлен второй степени $(n = 2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты *A, B, C* этого многочлена нужно найти, подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в данное уравнение.

4) Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & y_ч = Ax^2 + Bx + C; \\ 7 & y_ч' = 2Ax + B; \\ 1 & y_ч'' = 2A. \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $y_ч, y_ч', y_ч''$, чтобы получить левую часть уравнения $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$. В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 12A = 24; \\ x^1 & 14A + 12B = 16; \\ x^0 & 2A + 7B + 12C = -15. \end{array}\right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами *A, B, C*.

Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1.$

Частное решение: $y_ч = 2x^2 - x - 1.$

5) Общее решение данного уравнения:

$$y = y_0 + y_ч,$$

или

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + k - 2 = 0, \qquad k_1 = -2; \quad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

3)Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x) = 3e^x$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha = 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n = 0$. Поэтому частное решение $y_ч$ следует искать в виде $y_ч = A \cdot e^x \cdot x$.

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} -2 & y_ч = A\cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_ч' = A\cdot e^x + A\cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_ч'' = A\cdot e^x + A\cdot e^x + A\cdot e^x \cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A\cdot e^x + A\cdot e^x \cdot x + A\cdot e^x + A\cdot e^x \cdot x - 2A\cdot e^x \cdot x = 3e^x,$$

или

$$3A\cdot e^x = 3e^x,$$

откуда $A = 1$. Частное решение: $y_ч = x\cdot e^x$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^x + x\cdot e^x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - y = x\cdot e^{-x}$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 1 = 0;\qquad k_1 = -1;\qquad k_2 = 1.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^x.$$

3)Сравним правую часть данного уравнения $f(x) = x\cdot e^{-x}$ с $f(x) = e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha = -1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен x степени $n = 1$. Поэтому частное решение следует искать в виде $y_ч = (Ax + B)\cdot x\cdot e^{-x}$.

4) Так как требуется найти $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$, удобнее записать $y_ч$ в виде $y_ч = (Ax^2 + Bx)\cdot e^{-x}$.

Запишем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} -1 & y_ч = (Ax^2 + Bx)\cdot e^{-x}, \\ 0 & y_ч' = (2Ax + B)\cdot e^{-x} - (Ax^2 + Bx)\cdot e^{-x}, \\ 1 & y_ч'' = 2A\cdot e^{-x} - (2Ax + B)\cdot e^{-x} - (2Ax + B)\cdot e^{-x} + (Ax^2 + Bx)\cdot e^{-x}. \end{array}$$

Подставим выражения $y_ч$, $y_ч''$ с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A\cdot e^{-x}-2(2Ax+B)\cdot e^{-x}+\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}-\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}=x\cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x}\neq 0$ и упростим:

$$2A-2(2Ax+B)=x,$$

$$2A-4Ax-2B=x.$$

$$\begin{array}{c|c} x^1 & -4A=1; \\ x^0 & 2A-2B=0, \end{array}\Bigg\} \qquad \begin{cases} A=-1/4; \\ B=-1/4. \end{cases}$$

Частное решение: $y_ч=-\dfrac{1}{4}\left(x^2+x\right)\cdot e^{-x}$.

5)Общее решение дифференциального уравнения:

$$y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x}-\frac{1}{4}\left(x^2+x\right)\cdot e^{-x}.$$

Пример 4. Решить уравнение $y''+3y'+2y=4\sin\,3x+2\cos\,3x.$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2+3k+2=0;$

$k_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{-3\pm 1}{2}.$

$k_1=-1;\qquad k_2=-2.$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$:

$$y_0=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-2x}.$$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x)=4\sin 3x+2\cos 3x$ с $f(x)=M\cdot\cos\beta x+N\cdot\sin\beta x$. Здесь $M=2,\quad N=4;\ \alpha=0,\quad \beta=3.$ Так как числа $\pm\beta i=\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде $y_ч=A\cdot\cos 3x+B\cdot\sin\,3x.$

4) Найдем $y_ч'$, $y_ч''$ и запишем столбиком

$$\begin{array}{c|l} 2 & y_ч=A\cdot\cos\,3x+B\cdot\sin 3x, \\ 3 & y_ч'=-3A\cdot\sin 3x+3B\cdot\cos 3x, \\ 1 & y_ч''=-9A\cdot\cos 3x-9B\cdot\sin\,3x. \end{array}$$

Подставив эти выражения в данное дифференциальное уравнение, получим

$-9A\cdot\cos\,x-9B\cdot\sin\,3x-9A\cdot\sin\,3x+9B\cdot\cos 3x+2A\cdot\cos\,3x+2B\cdot\sin\,3x=$
$=4\sin\,3x+2\cos 3x$ или

$$\sin\ 3x\cdot(-7B-9A)+\cos\ 3x\cdot(-7A+9B)=4\sin\ 3x+2\cos\ 3x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} \sin\ 3x & -7B-9A=4; \\ \cos\ 3x & -7A+9B=2, \end{array}\right\}$$

$$A=-\frac{5}{13}; \qquad B=-\frac{1}{13}.$$

Частное решение: $y_ч=-\dfrac{5}{13}\cos\ 3x-\dfrac{1}{13}\sin 3x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-2x}-\frac{5}{13}\text{cox}\ 3x-\frac{1}{13}\sin\ 3x.$$

Пример 5. Решить уравнение $y''+2y'+5y=2\cos x.$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2+2k+5=0;$

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i\ (a=-1;\quad b=2).$$

2)По формуле (2.16) общим решением будет

$$y_0=e^{-x}\cdot(C_1\cdot\cos\ 2x+C_2\cdot\sin\ 2x).$$

3)Сравним правую часть уравнения $f(x)=2\cos\ x$ с $f(x)=M\cdot\cos\ \beta x+N\cdot\sin\ \beta x.$

Здесь $M=2,\quad N=0;\ \beta=1.$ Числа $\pm\beta i=\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде

$$y_ч=A\cdot\cos\ x+B\cdot\sin\ x.$$

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} 5 & y_ч=A\cos\ x+B\sin\ x, \\ 2 & y_ч'=-A\sin x+B\cos\ x, \\ 1 & y_ч''=-A\cos\ x-B\sin\ x. \end{array}$$

Подставив $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ в уравнение, получим

$-A\cos\ x-B\sin\ x-2A\sin\ x+2B\cos\ x+5A\cos\ x+5B\sin\ x=2\cos\ x,$

или $\sin x\cdot(4B-2A)+\cos x\cdot(4A+2B)=2\cos x.$

$$\begin{array}{l|l} \sin\ x & 4B-2A=0; \\ \cos\ x & 4A+2B=2. \end{array}\Bigg\}$$

$$A=\frac{2}{5}; \quad B=\frac{1}{5}.$$

Частное решение: $y_ч=\frac{2}{5}\cos\ x+\frac{1}{5}\ \sin\ x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos\ 2x+C_2\sin\ 2x\right)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin\ x.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1. $y''+y=4e^x; y(0)=4, y'(0)=-3;$
2. $y''-2y'+y=6xe^x;$
3. $y''+y'-2y=3xe^x;$
4. $y''+y=4\sin x;$
5. $y''-y=-x^2;$
6. $y''+2y'+2y=xe^{-x}$ при $y(0)=0, \quad y'(0)=0;$
7. $y''-8y'+15y=0$ при $y(0)=2$, $y'(0)=8;$
8. $y''-2y'+5y=0$ при $y(0)=1, \quad y'(0)=3;$
9. $y''+16y=0$, при $y(0)=1$, $y'(0)=4;$
10. $y''-6y'+9y=0$ при $y(0)=2, y'(0)=7;$
11. $y''-5y'+6y=0$, при $y(0)=3, \ y'(0)=-8;$
12. $y''+8y'+16y=0;$
13. $y''+9y=0;$
14. $y''-6y'+10y=0$, при $y(0)=1, \quad y'(0)=3.$

Ответы

1. $y=\left(2\cos x-5\sin\ x\right)+2e^x.$

2. $y=\left(C_1+C_2x+x^3\right)\cdot e^x$. 3. $y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{-2x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\cdot e^x.$

4. $y=\left(C_1\cos x+C_2\sin\ x\right)-2x\cos x.$

5. $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + x^2 + 2$. 6. $y = e^{-x} \cdot (x - \sin x)$. 7. $y = e^{3x} + e^{5x}$.
8. $y = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$. 9. $y = \cos 4x + \sin 4x$.
10. $y = 2 \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot x$. 11. $y = e^{-2x} + 2 \cdot e^{-3x}$. 12. $y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$.
13. $y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x$. 14. $y = e^{3x} \cdot \cos x$.

Расчетно-графическая работа № 8

1. Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1.1. а) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2 y)dy$;

б) $(x - y)y\,dx - x^2 dy = 0$;

в) $(1 + x^2)y' - xy = 2x$, если $y = 0$ при $x = 0$.

1.2. а) $\sqrt{1 - x^2}\,dy - \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$;

б) $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$;

в) $y' - \dfrac{3}{x} y = x$, если $y = 1$ при $x = 1$.

1.3. а) $\cos x \sin y\,dy = \cos y \sin x\,dx$;

б) $(x^2 - 2xy)dy - (xy - y^2)dx = 0$;

в) $2y' - y = e^x$, если $y = 5$ при $x = 0$.

1.4. а) $e^x(1 + e^y)dx + e^y(1 + e^x)dy = 0$;

б) $x^3 dy - y(x^2 + y^2)\quad$;

в) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = e^{x^2}$, если $y = o$ при $x = 2$.

1.5. а) $(xy + x)\dfrac{dx}{dy} = 1$;

б) $(2\sqrt{xy} - y)dx + x\,dy = 0$;

в) $xy' - y = x^2 \cos x$, если $y = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

1.6. а) $(1 + x^2)dy - (xy + x)dx = 0$;

б) $xyy' = x^2 + y^2$;

в) $xy' + y = \sin x$, если $y = \dfrac{1}{\pi}$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

1.7. а) $x^2y' = 3y + 2xy$;

б) $2xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$;

в) $x^2y' + 2xy = -4$, если $y = -\frac{1}{2}$ при $x = -1$.

1.8. а) $y'\operatorname{tg} x = 1 + y$, если $y = -\frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$;

б) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $xy^2y' = x^3 + y^3$.

1.9. а) $(1 + y^2)dx = xydy$, если $y = 1$ при $x = 1$;

б) $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$;

в) $xy' - 3y = x^4$.

1.10. а) $(1 - x^2)y' + xy = 0$, если $y = 4$ при $x = 0$;

б) $(x - y)y' - y = 0$;

в) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$.

1.11. а) $dy + y\operatorname{tg} x\,dx = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$;

б) $xy' - y = x\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$;

в) $y' - 3y = e^{-x}$.

1.12. а) $\cos x \sin y\,dy = \cos y \sin x\,dx$, если $y = \pi$ при $x = \pi$;

б) $2xydy + (x^2 + y^2)dx = 0$;

в) $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$.

1.13. а) $3y' = \frac{1 + x^2}{y^2}$;

б) $xy^2y' = x^3 + y^3$, если $y = 3$ при $x = 1$;

в) $\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = (1 - x^2) \cdot e^{x^2}$.

1.14. а) $\sqrt{y}\,dx + x^2\,dy = 0$;

б) $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$, если $y = 0$ при $x = 1$;

в) $y'\cos x + y\sin x = 1$.

1.15. а) $y' = xe^{-y}$, если $y = 0$ при $x = 1$;

б) $(x - y)dx + xdy = 0$, если $y = 0$ при $x = 1$;

в) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-2y=(x+1)^4$.

1.16. а) $y'=2x(y-1)^3$;

б) $y^2\,dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$, если $y=1$ при $x=1$;

в) $(x+1)y'+y=\cos x$.

1.17. а) $x^2+x^2y=y^2y'$;

б) $xy+y^2-\left(2x^2+xy\right)y'=0$, если $y=1$ при $x=1$;

в) $xy'-y=-x$.

1.18.а) $x\sqrt{5+y^2}\,dx+y\sqrt{4+x^2}\,dy=0$;

б) $x^2y'=xy+y^2$, если $y=1$ при $x=1$;

в) $y'+y=e^{-x}$.

1.19. а) $xyy'=1-x^2$;

б) $y'\left(x^2+xy\right)=y^2$, если $y=2$ при $x=2$;

в) $xy'+y=\sin x$.

1.20. а) $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$;

б) $\left(y^2-2xy\right)+x^2y'=0$;

в) $xy'+y=\sin x$, если $y=1$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$.

1.21. а) $yy'+xe^y=0$, если $y=1$ при $x=0$;

б) $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$;

в) $y'-y\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}x$.

1.22. а) $x(y^2+1)dx+(1+x^2)=0$, если $y=1$ при $x=0$;

б) $x^2+3xy+y^2-x^2y'=0$;

в) $x^2y'-2xy=3$.

1.23. а) $\left(x^2+1\right)y'+4xy=0$, если $y=1$ при $x=0$;

б) $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$;

в) $xy'-xy=\left(1+x^2\right)e^x$.

1.24. а) $x\sqrt{9-y^2}\,dx-y\sqrt{4+x^2}\,dy=0$, если $y=0$ при $x=0$;

б) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$;

в) $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$.

1.25. а) $\sqrt{1+\ln y}\, dy + xy\, dx = 0$, если $y=1$ при $x=1$;

б) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

в) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

1.26. а) $(xy^2 + x) = (y + x^2 y)y'$;

б) $(x-y)y\,dx - x^2 dy = 0$;

в) $y' - y\mathrm{tg}x = \cos x$, если $y=0$ при $x=0$.

1.27. а) $\sqrt{1-x^2}\, dy - x\sqrt{1-y^2}\, dx = 0$;

б) $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$;

в) $y' + \frac{x}{x^2+1} y = x$, если $y=1$ при $x=0$.

1.28. а) $\cos^2 x \sin y\, dy = \sqrt{\cos y}\sin x\, dx$;

б) $(x^2 - 2xy)y' - (xy - y^2) = 0$;

в) $y' + 2xy = x$, если $y=1$ при $x=0$.

1.29. а) $e^x(1+e^{2y})dx + e^y\sqrt{1+e^x}dy = 0$;

б) $x^3 y' - y(x^2 + y^2)$;

в) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}$, если $y=0$ при $x=2$.

1.30. а) $(xy^2 + x)\frac{dx}{dy} = 1$;

б) $(2\sqrt{xy} - y) + x\,y' = 0$;

в) $xy' - y = x^2$, если $y=1$ при $x=1$.

2. Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

2.1. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=2$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

2.2. а) $y'' - 2y' = 0$, если $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0)=1$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

2.3. а) $y'' + 8y' + 15y = 0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

2.4 .а) $y'' + 3y' = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;

в) $y'' + 12y' + 36y = 0$.

2.5. а) $y'' + 14y' + 49y = 0$;

б) $y'' + 4y' = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

2.6. а) $y'' + 4y = 0$;

б) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

в) $y'' - 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$.

2.7. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' + 16y = 0$.

2.8. а) $y'' + 2y' + 5 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' - 2y = 0$;

в) $y'' - 14y' + 49y = 0$.

2.9. а) $y'' - y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 64y = 0$;

в) $y'' - 20y' + 100y = 0$.

2.10.а) $y'' - 8y' + 20y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$;

б) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

в) $y'' - 2y' + y = 0$.

2.11. а) $y'' + 3y' - 4y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

2.12. а) $y'' - 9y' + 14y = 0$;

б) $y'' - y = 0$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

2.13. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 9y = 0$;

в) $y'' + 22y' + 121y = 0$.

2.14. а) $y'' - y = 0$;

б) $y'' - 6y' + 45y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

2.15. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 2y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$.

2.16. а) $y'' + 6y' + 8y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.

2.17. а) $y'' + 4y' + 8y = 0$;

б) $y'' - 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;

в) $9y'' + 6y' + 1 = 0$.

2.18. а) $y'' - y' - 2y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

б) $16y'' + 8y' + y = 0$;

в) $y'' + 25y = 0$.

2.19. а) $y'' - 8y' + 7 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $25y'' - 10y' + y = 0$.

2.20. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $49y'' + 14y' + y = 0$;

в) $y'' + 121y = 0$.

2.21. а) $y'' + 2y' - y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = y(0)' = 1$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

2.22. а) $2y'' - 3y' - 5y = 0$;

б) $y'' + 4y = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$;

в) $64y'' - 16y' + y = 0$.

2.23. а) $y'' + 6y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 81y = 0$;

в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

2.24. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' + 4y = 0$;

в) $16y'' + 8y' + y = 0$.

2.25. а) $y'' + y' = 0$, если $y(0) = y(0) = 1$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + 26y' + 169y = 0$3.25.

3. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, используя метод подбора коэффициентов частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

3.1. $y'' - 3y' + 2y = \left(x^2 + x\right) \cdot e^{3x}$.

3.2. $y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{2x}$.

3.3. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-3x}$.

3.4. $9y'' + 24y' + 16y = -5x \cdot e^{3x}$.

3.5. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.

3.6. $y'' - 3y' + 2y = x \cdot e^{x}$.

3.7. $y'' - 3y' + 2y = 10 \cdot e^{-x}$.

3.8. $y'' - 2y' + y = x^3$.

3.9. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-2x}$.

3.10. $y'' + y' = 3 \cdot e^{-x} + 2x$.

3.11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$.

3.12. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$.

3.13. $y'' + y' - 2y = x^2 \cdot e^{4x}$.

3.14. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

3.15. $y'' - y' = x + 2$.

3.16. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

3.17. $y'' + 6y' + 34y = 5x^2$

3.18. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$.

3.19. $y'' + 2y' + y = x^2 + x - 1$.

3.20. $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$.

3.21. $y'' - y' = 2x + 3$.

3.22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$

3.23. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.

3.24. $3y'' + y' = 6x - 1$.

3.25. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x$.

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

§1. Двойной интеграл

Теоретический материал

Рассмотрим задачу о нахождении массы материальной двумерной пластинки σ, если известна плотность $\rho(x;y)$ в каждой ее точке. Разделим данную область произвольным образом на n частей (рис.3.1) $P(x;y)$. В каждой элементарной части $\Delta\sigma_i$ выберем по одной точке $P_i(\xi_i;n_i)$

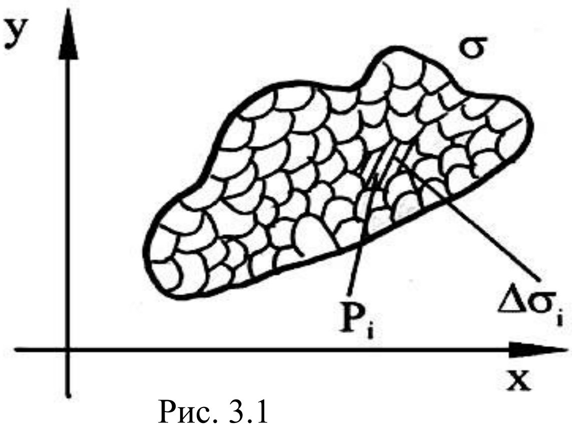


Рис. 3.1

и вычислим плотность $\rho(\xi_i; n_i)$ в точке P_i.

Тогда масса элементарной пластинки части $\Delta\sigma_i$ приближенно будет равна $\rho(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i$.Для массы всей пластинки σ получаем

$$m \approx \sum_i \rho(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i . \qquad (3.1)$$

Приближение (3.1) будет тем точнее, чем мельче будет разбиение области σ на элементарные части, т.е. чем меньше будет наибольшее расстояние между произвольными точками любой элементарной области $\Delta\sigma_i$. Следовательно, можно принять, что

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i \rho(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i , \qquad (3.2)$$

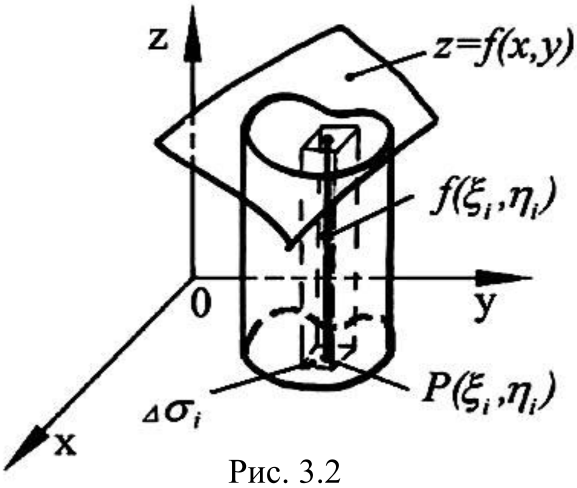


Рис. 3.2

где λ – наибольший из диаметров элементарных частей $\Delta\sigma_i$ (диаметр $\Delta\sigma_i$ – это наибольшее расстояние между произвольными ее точками). К аналогичному выражению приходим при рассматривании задачи вычисления объемов цилиндрических тел.

Пусть требуется вычислить объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x; y)$ $(f(x; y) \geq 0)$, снизу – конечной замкнутой областью σ плоскости $0xy$ и с боков – цилиндрической поверхностью, построенной на границе области σ и имеющей образующие, параллельные оси $0z$ (рис. 3.2).

Делим область σ на элементарные области $\Delta\sigma_i$. В каждой $\Delta\sigma_i$ выбираем по одной точке $P_i(\xi_i; n_i)$. Тогда объем прямого элементарного цилиндра, ограниченного сверху поверхностно $z = f(x; y)$ и снизу областью – областью $\Delta\sigma_i$, приближенно равен $f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь соответствующей элементарной области.

Для объема всего нашего цилиндрического тела получаем приближение

$$V \approx \sum_i f(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i . \qquad (3.3)$$

Приближение (3.3) будет тем точнее, чем меньше будет наибольший из диаметров λ элементарных областей $\Delta\sigma_i$. Следовательно, можно и в этом случае принять, что

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i . \qquad (3.4)$$

Необходимость рассмотрения выражений вида (3.1), (3.3) и пределов (3.2), (3.4) возникает при решении многих других физических и геометрических задач. В связи с этим дается следующее определение. Пусть функция $f(x; y)$ определена в некоторой области σ. Делим область σ на n элементарных частей $\Delta\sigma_i$. В каждой части $\Delta\sigma_i$ выбираем по одной точке $P_i(\xi_i; n_i)$ и составляем выражение

$$S_n = \sum_i f(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i . \qquad (3.5)$$

Определение 1. Выражение вида (3.5) называется *интегральной суммой для функции* $f(x; y)$ *в области* σ.

Обозначим через λ наибольший из диаметров элементарных областей $\Delta\sigma_i$ при разбиении области σ.

Определение 2. Если существует предел

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i , \qquad (3.6)$$

который не зависит от способа деления области σ на части $\Delta\sigma_i$ и выбора точек $P_i(\xi_i; n_i)$, то этот предел называется *двойным интегралом от функции* $f(x; y)$ *по области и обозначается* $\iint_\sigma f(x; y) d\sigma$ или $\iint_\sigma f(x; y) dxdy$. Здесь $f(x; y)$ называется *подынтегральной функцией;* σ *– областью интегрирования;* x *и* y *– переменными интегрирования;* $d\sigma$ *(или* $dxdy$ *) – элементом площади.*

Таким образом, по определению

$$\iint_\sigma f(x; y) dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i; n_i) \cdot \Delta\sigma_i . \qquad (3.7)$$

Функция $f(x; y)$ называется *интегрируемой* в области σ. Всякая *непрерывная в ограниченной замкнутой области* σ *функции* $f(x; y)$ *интегрируется в ней.* В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint_\sigma f(x; y) dxdy = C \iint_\sigma f(x; y) dxdy$.

2. $\iint\limits_{\sigma}\left(f_1(x;y)\pm f_2(x;y)\right)dxdy=\iint\limits_{\sigma} f_1(x;y)dxdy\pm\iint\limits_{\sigma} f_2(x;y)dxdy.$

3. Если область σ состоит из двух областей σ_1 и σ_2, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy=\iint\limits_{\sigma_1} f_1(x;y)dxdy+\iint\limits_{\sigma_2} f_2(x;y)dxdy.$$

4. Если функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на ограниченной области σ и $f(x;y)\le g(x;y)$ для всех $(x,y)\in\sigma$, то $\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy\le\iint\limits_{\sigma} g(x;y)dxdy.$

Следствие. Если $m\le f(x;y)\le M$ для всех $(x,y)\in\sigma$, то $m|\sigma|\le\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy\le M|\sigma|.$

5. *Теорема о среднем.* Пусть σ – связная ограниченная область и пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на замыкании σ области σ .Тогда существует точка $(\zeta;\eta)\in\sigma$, для которой выполнено равенство

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy=f(\zeta;\eta)|\sigma|.$$

Алгоритм вычисления двойного интеграла

Область на плоскости $x0y$ назовем *простой областью*:

1) (относительно оси $0x$) если она ограничена сверху линией $y=\psi(x)$, снизу $y=\varphi(x)$ (функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны) и с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 3.3); в частных случаях один из этих отрезков (или оба вместе) могут превратиться в точку (рис. 3.4);

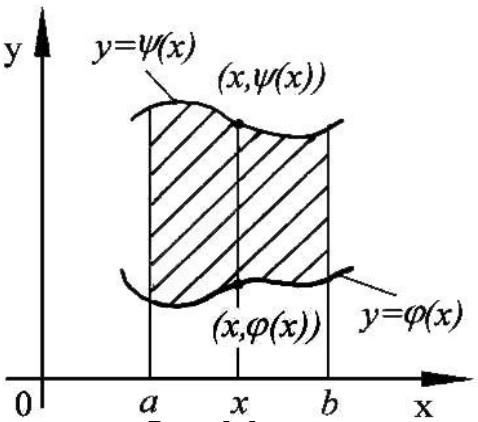


Рис. 3.3

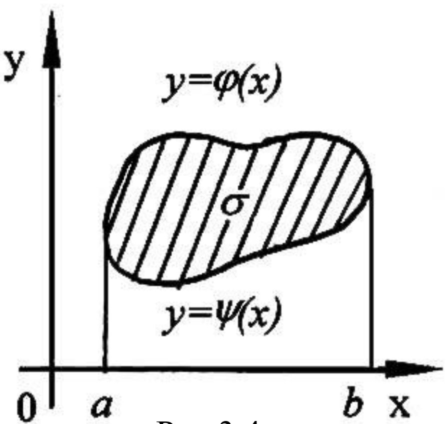


Рис.3.4

2) (относительно оси $0y$) если она ограничена слева линией $x=\psi_1(y)$, справа $x=\varphi_1(y)$ (функции $\psi_1(y)$ и $\varphi_1(y)$ непрерывны) и сверху и снизу, отрезками прямых $y=d$ и $y=c$ (рис. 3.5, 3.6).

Тогда имеет место формула перехода от двойного интеграла к *повторному:*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy\right)dx=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy,$$

где σ – простая область относительно оси $0x$;

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\varphi_1(y)} f(x;y)dx,$$

где σ – простая область относительно оси $0y$.

В случае прямоугольной области σ, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ (рис.3.8), формула перехода от двойного ин-

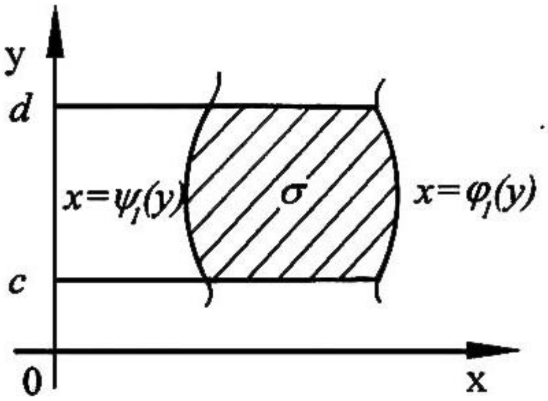


Рис. 3.5

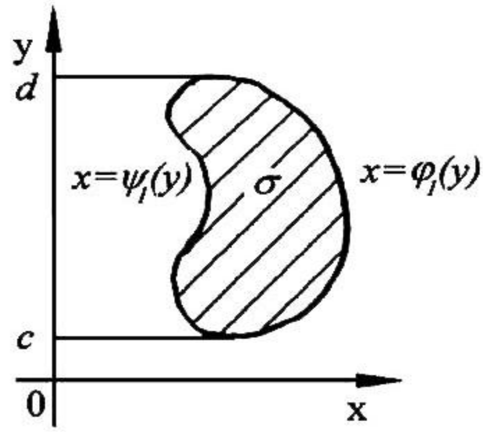


Рис. 3.6

теграла к повторному имеет вид

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx.$$

Заметим, что если область σ не является простой областью, то ее разбивают на конечное число простых областей σ_1, σ_2, …, σ_n и при вычислении двойного интеграла по области σ используют третье свойство двойного интеграла.

Объем цилиндрических тел

Заметим, что в случае вычисления объема цилиндрических тел интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy$ дает площадь $S(x)$ поперечного сечения нашего тела (рис. 3.7), следовательно, весь объем V будет

$$V=\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)dy.$$

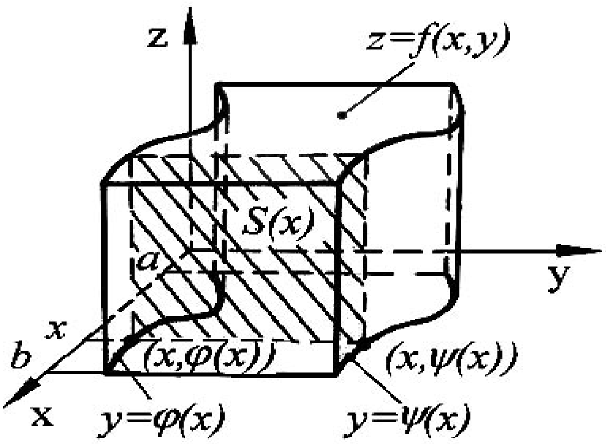


Рис. 3.7

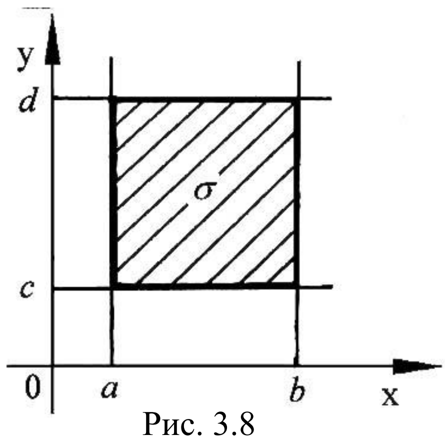


Рис. 3.8

Масса материальной пластины

Используя формулу (3.2), получим формулу для вычисления массы материальной двумерной пластинки σ, если известна её плотность $\rho(x;y)$.

$$m=\iint\limits_{\sigma}\rho(x;y)dxdy.$$

Образцы решения задач

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x;y)dy.$$

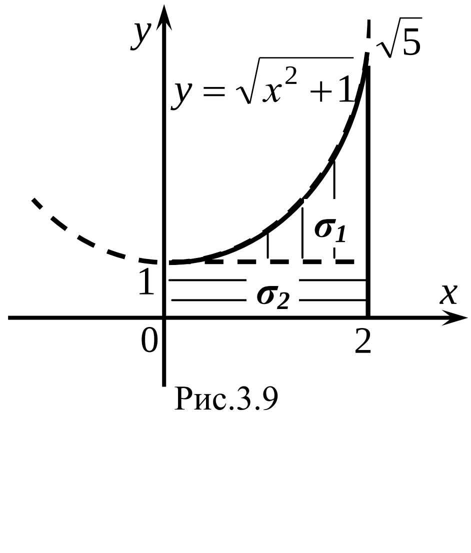


Рис.3.9

Решение. По заданным четырем пределам интегрирования записываем уравнение четырех линий, ограничивающих область интегрирования σ; $x=0$; $x=2$; $y=0$; $y=\sqrt{1+x^2}$. Строим эти линии. Разрешаем уравнение дуги гиперболы $y=\sqrt{1+x^2}$ относительно абсциссы $x=\sqrt{y^2-1}$. Область интегрирования σ не принадлежит ко 2-му типу, т.к. слева ограничена двумя различными линиями x=0 и $y=\sqrt{1+x^2}$. Поэтому прямой y=1 разбиваем ее на две области 2-го типа: σ_1 и σ_2. Тогда

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x;y)dy=\iint_\sigma f(x;y)dxdy=\iint_{\sigma_1} f(x;y)dxdy+\iint_{\sigma_2} f(x;y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^2 f(x;y)dx+\int_1^{\sqrt{5}} dy\int_{\sqrt{y^2-1}}^2 f(x;y)dx.$$

Пределы интегрирования в повторном интеграле определяются уравнениями границ области интегрирования σ. Потому, как правило, чем проще уравнения границ, тем проще вычисления интегралов. В разных системах координат уравнение одной и той же линии имеют различный вид.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_\sigma \frac{x}{y}dxdy$, если область ограничена параболами $y=x^2$ и $x=y^2$ (рис.3.10).

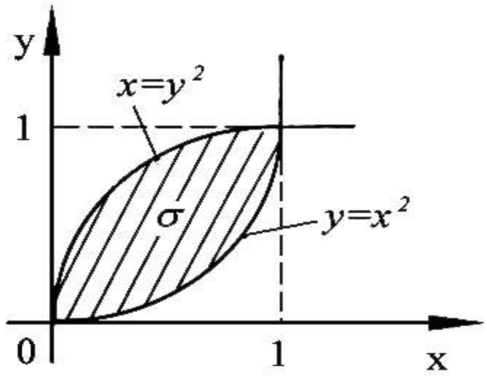


Рис.3.10

Решение. Область σ (см. рис. 3.3) – простая (вида 1). Она ограничена снизу кривой $\varphi(x)=x^2$, сверху – кривой $x=y^2$, т.е. $y=\sqrt{x}$ или $\psi(x)=x^2$ (перед радикалом ставим только знак “+”, так как область σ находится в I квадранте, где $y>0$); при любом фиксированном значении x из отрезка $[0;1]$ y меняется от $y=x^2$ до $y=\sqrt{x}$. Поэтому при $f(x;y)=\frac{x}{y}$ имеем

$$\iint_\sigma \frac{x}{y}dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\frac{x}{y}dy\right)dx=\int_0^1\left(x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\frac{1}{y}dy\right)dx=\int_0^1\left(x\ln y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x\left(\ln\sqrt{x}-\ln x^2\right)dx=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}\ln x-2\ln x\right)dx=\int_0^1 x\left(-\frac{3}{2}\right)\ln x\,dx=$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\ln 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Замечание. Интеграл $\int x\ln x\,dx$ взят методом интегрирования по частям, причем при подстановке нижнего предела использовался тот факт, что

$$\lim_{x\to 0} x^2\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma}\frac{x}{2}dxdy$, если область ограничена слева кривой $x = 2+\sin y$, справа прямой $x = 0$ и с боков прямыми $y = 0$, $y = 2\pi$.

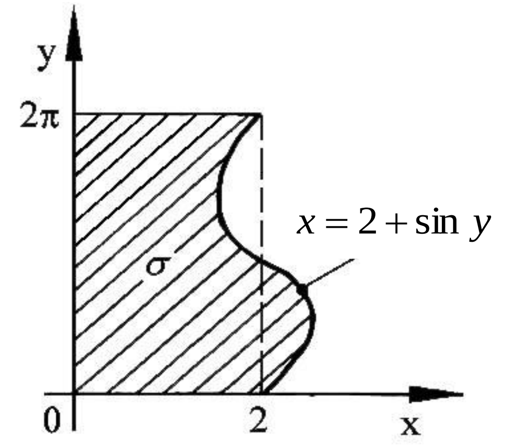


Рис.3.11

Решение. Область σ (рис. 3.11) является простой (вида 2). При любом фиксированном y из отрезка $[0;2\pi]$ x меняется от $x = 0$, до $x = 2+\sin y$. Поэтому имеем

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{x}{2}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2+\sin y}\frac{x}{2}dx\right)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{4}\Big|_0^{2+\sin y}\right)dy = \int_0^{2\pi}\frac{(2+\sin y)^2}{4}dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{4+4\sin y+\sin^2 y}{4}dy = \int_0^{2\pi}\left(1+\sin y+\frac{1-\cos 2y}{4\cdot 2}\right)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{8}+\sin y-\frac{\cos 2y}{8}\right)dy == \frac{9}{8}\int_0^{2\pi}dy + \int_0^{2\pi}\sin y\,dy - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos 2y\,dy =$$

$$\frac{9}{8}y\Big|_0^{2\pi} - \cos y\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{16}\sin\,t\Big|_0^{4\pi} = \frac{9}{8}(2\pi-0) - (\cos 2\pi - \cos 0) -$$

$$-\frac{1}{16}(\sin 4\pi - \sin 0) = \frac{9}{8}\cdot 2\pi - (+1-1) - \frac{1}{16}(0-0) = \frac{9}{4}\pi.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\cos 2y\,dy$ взят методом подстановки $t=2y$, тогда $dt=2dy$ или $dy=\frac{1}{2}dt$. При изменении y от 0 до 2π t меняется от 0 до 4π. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos 2y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{4\pi}\cos t\,dt.$$

Пример 4. Вычислить объем цилиндрического тела, ограниченного снизу областью σ, указанной на рис. 3.12, и сверху – плоскостью $z=x-y$.

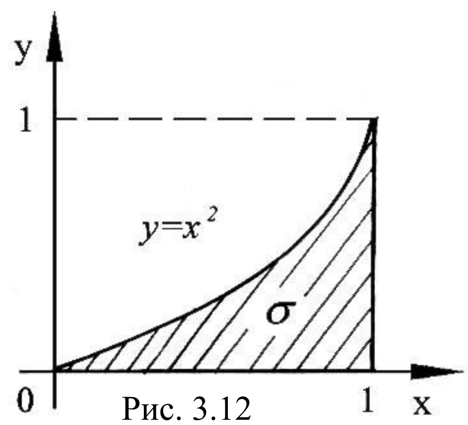


Рис. 3.12

Решение. Область интегрирования σ ограничена снизу кривой $\varphi(x)=0$, сверху – кривой $\psi(x)=x^2$. Спроецировав σ на ось $0x$, получим отрезок $[0;1]$. Следовательно, $V=\iint\limits_{\sigma} f(x;y)dxdy=$

$$=\iint\limits_{\sigma}(x-y)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{x^2}(x-y)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(x\int\limits_0^{x^2}dy-\int\limits_0^{x^2}y\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(xy\Big|_0^{x^2}-\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(x\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2\right)^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 x^3dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}.$$

Пример 5. Вычислить массу пластинки, ограниченной прямой $y=x$ и параболой $y=x^2$ (рис. 3.13), если плотность распределения массы выражается функцией $\rho(x,y)=x+2y$.

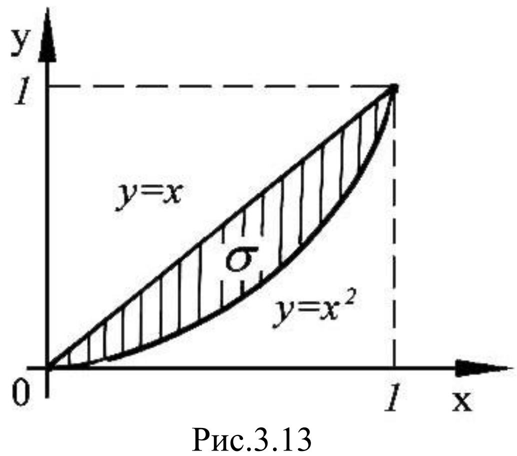


Рис.3.13

Решение. Область интегрирования σ ограничена снизу кривой $\varphi(x)=x^2$, сверху – кривой $\psi(x)=x$, спроецировав σ на ось $0x$, получим отрезок $[0;1]$. Следовательно, $0\le x\le 1$. Имеем

$$m=\iint\limits_{\sigma}\rho(x;y)dxdy=\iint\limits_{\sigma}(x+2y)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x}(x+2y)dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x\int\limits_{x^2}^{x}dy+2\int\limits_{x^2}^{x}y\,dy\right)=\int\limits_0^1\left(xy\Big|_{x^2}^{x}+2\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x\left(x-x^2\right)+x^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2-x^3+x^2-x^4\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^1 x^2dx-\int\limits_0^1 x^3dx-\int\limits_0^1 x^4dx==2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3}f(x;y)dx$.

2.Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2x}f(x;y)dy$.

3.Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(x+y)dxdy$, где σ ограничена линиями $y=x^2+1$; $y=9-x^2$.

4. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)dxdy$ по параллелограмму, ограниченному прямыми $y=x$, $y=0$, $y=2$, $y=x-2$.

5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $x=0$, $y=5$, $y=x^2+1$.

6 Вычислить площадь области, ограниченной линиями

$$y=\sin 2x,\quad y=\cos x, y=0,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

7. Вычислить массу плоской пластины, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=1-x^2$, если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки, $\rho=x$.

8. Вычислить массу плоской пластины, ограниченной линиями $x=0$, $x=2$, $y=1$, $y=4$, если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки, $\rho=x^2+2xy$.

Ответы

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_0^4 f(x;y)dy$. 2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^1 f(x;y)dx$.

3. $\frac{320}{3}$. 4. 24. 5. $\frac{16}{3}$. 6. $\frac{3}{4}$. 7. $\frac{1}{4}$. 8. 38.

§2. Замена переменных в двойном интеграле

Теоретический материал

При вычислении двойных интегралов иногда бывает полезно сделать замену переменных. Пусть

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

функции, определенные на всей плоскости $x0y$ или в некоторой ее области σ и имеющие непрерывные частные производные в области σ. Допустим также, что систему уравнений можно однозначно разрешить относительно x и y:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

тогда каждой точке $M(x,y)$ из области σ будет взаимно однозначно соответствовать пара чисел (u,v), называемых криволинейными интегралами этой точки. Если область σ расположена в той части плоскости $x0y$, в которой введены криволинейные координаты u, v, то справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\sigma'} f[x(u,v), y(u,v)]|J(u,v)|dudv, \qquad (3.7)$$

где σ' – область изменения криволинейных координат u и v, отвечающая области σ, а $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$.

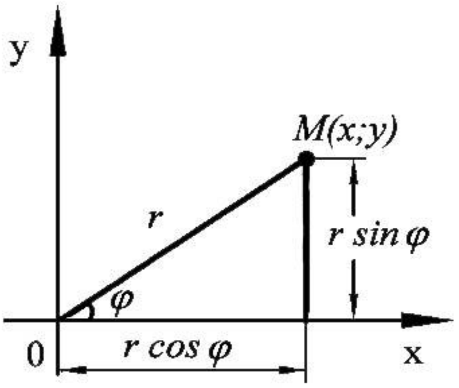


Рис.3.14

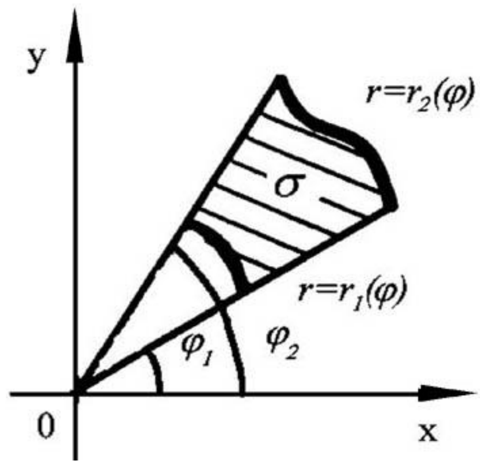


Рис.3.15

В частности, в полярных координатах (рис. 3.14)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Данная система осуществляет переход от прямоугольных координат x и y к полярным координатам r и φ при условии, что полюс помещен в начале координат и полярная ось направлена вдоль оси $0x$ (рис.3.14). В этом случае $|J| = r$ и формула (3.7) принимает вид

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\sigma'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi dr. \qquad (3.8)$$

Если область σ ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$, кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) < r_2(\varphi))$ (см. рис. 3.15), то соответствующие этой области полярные координаты изменяются в пределах

$\sigma'\{\varphi_2 \le \varphi \le \varphi_1; r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$ и тогда

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr. \qquad (3.9)$$

Если область σ охватывает начало координат, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr, \qquad (3.10)$$

где $r = r(\varphi) -$ полярное уравнение кривой, ограничивающее область σ (рис.3.16).

Формулы перехода очень удобно использовать при решении задач, когда область σ есть круг или сектор круга.

Образцы решения задач

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2=1$ (рис. 3.17).

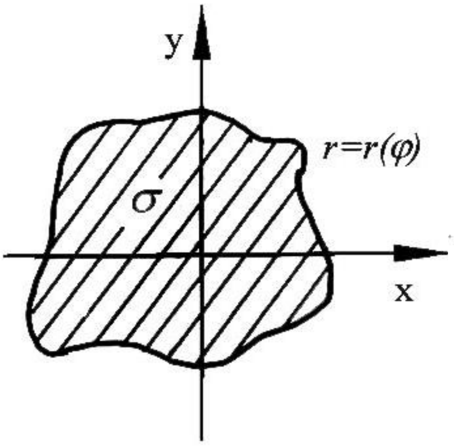


Рис.3.16

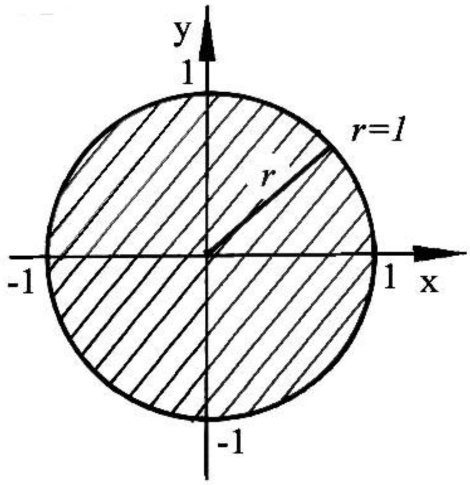


Рис.3.17

Решение. Область σ есть круг радиуса 1 с центрами в начале координат. Введем полярные координаты. В полярных координатах уравнение окружности примет вид $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=1$, или $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1$, т.е. $r^2=1$, или $r=1$. Тогда по формуле (3.10) получаем

$$\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}\,r\,dr\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}r\,dr\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_1^0 t^{\frac{1}{2}}\,dt\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^0\,d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{0}{1.5}-\frac{1}{1.5}\right)d\varphi==-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2}{3}\pi.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}r\,dr$ взят методом замены переменной. Положим $1-r^2=t$. При $r=0$ получим $t=1$, а при $r=1$ $t=0$. Изменению переменной r от $r=0$ до $r=1$ соответствует изменение переменной t от $t=1$ до $t=0$.

$d\left(1-r^2\right)=dt$, или $-2r\,dr=dt$, откуда $dr=\dfrac{dt}{-2r}$. Подставляя полученные выражения в интеграл, имеем $\int\limits_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}r\,dr=-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^0 t^{\frac{1}{2}}dt$.

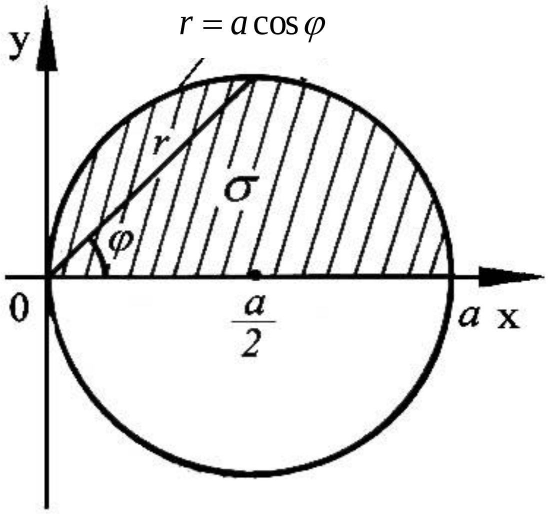


Рис. 3.18

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma} y\,dxdy$, если область σ ограничена верхней половиной дуги окружности $x^2+y^2=ax$ и отрезком оси $0x$ от точки с абсциссой, равной 0, до точки с абсциссой, равной a (рис.3.18).

Решение. Введем полярные координаты. Тогда уравнение окружности примет вид

$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=ar\cos\varphi;$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=ar\cos\varphi;$

$r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=ar\cos\varphi;\ r^2\cdot 1=ar\cos\varphi$ или окончательно имеем $r=a\cos\varphi$.

Найдем область определения этой функции. Так как по определению $r\geq 0$, то $a\cos\varphi\geq 0$, то есть $-\dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$. Верхняя часть дуги окружности лежит в первой четверти, для которой φ меняется в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. По формуле (3.9) имеем

$$\iint\limits_{\sigma} y\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{a\cos\varphi} r\sin\varphi\ r\,dr\right)d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2dr\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\frac{r^3}{3}\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\frac{a^3\cos^3\varphi}{3}d\varphi=\left|\begin{array}{c} t=\cos\varphi,\\ dt=-\sin\varphi d\varphi,\\ \varphi=0\Rightarrow t=1,\\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\end{array}\right|=$$

$$= -\frac{a^3}{3}\int_1^0 t^3 dt = \frac{a^3}{3}\int_0^1 t^3 dt = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{a^3}{12}.$$

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$ и параболоидом $z=3-x^2-y^2$ (рис. 3 19).

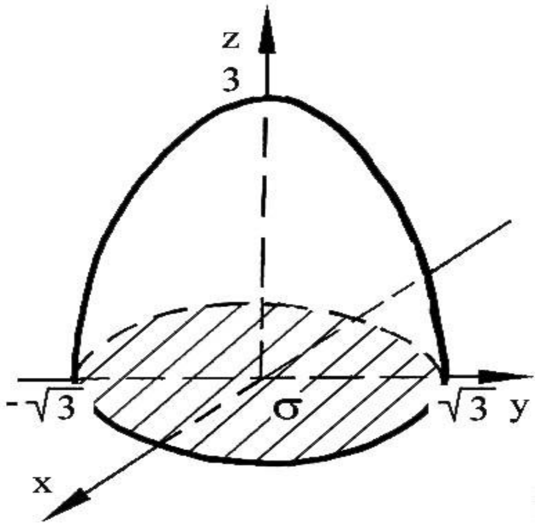


Рис.3.19

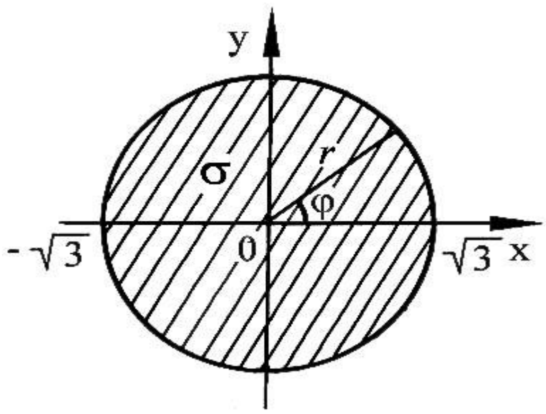


Рис.3.20

Решение. Сверху данное тело (см.рис.3.19) ограничено параболоидом $z=3-x^2-y^2$, поэтому, воспользовавшись формулой для вычисления объема цилиндрического тела, ограниченного плоскостью σ плоскости $x0y$, имеем

$$V = \iint_\sigma f(x,y)dxdy = \iint_\sigma \left(3-x^2-y^2\right)dxdy.$$

Область σ (рис. 3.20) есть круг, его границу получим подстановкой $z=0$ в уравнение $z=3-x^2-y^2$.

Введем полярные координаты. Тогда уравнение окружности примет вид $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=3$; $r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=3$; $r^2=3$; $r=\sqrt{3}$. Угол φ меняется от 0 до 2π.

Учитывая симметрию тела относительно плоскостей $x0z$ и $y0z$, найдем

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-\left[(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2\right]\right)r\,dr\right)d\varphi =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(3-r^2\left[\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]\right)r\,dr\right)d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(3-r^2\right)r\,dr\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\,dr-\int\limits_0^{\sqrt{3}}r^3dr\right)d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4}\right)d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)d\varphi=\frac{9}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{9}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{8}\pi.$$

Следовательно, $V=\dfrac{9}{2}\pi$.

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, если область σ ограничена линиями: дугой окружности $x^2+y^2=4$ и прямыми $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ $(x\ge 0)$ (рис.3.21).

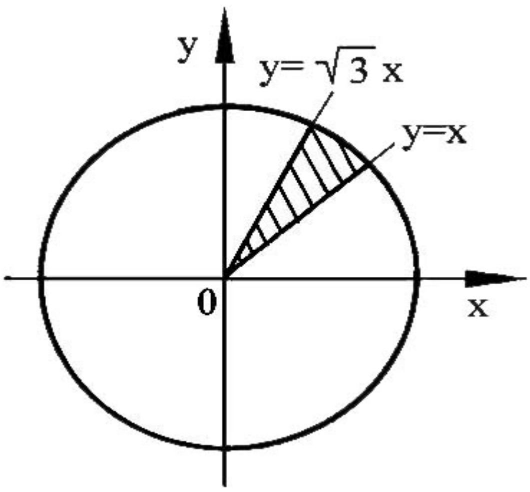


Рис.3.21

Решение. Введем полярные координаты. Тогда уравнение окружности примет вид

$\left(r\cos\varphi\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2=4$;

$r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4$; $r^2=4$; $r=2$.

Найдем угол между прямой $y=\sqrt{3}x$ и осью $0x$. В полярных координатах уравнение прямой примет вид $r\sin\varphi=\sqrt{3}r\cos\varphi$;

$\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$; $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Значит, угол между прямой $y=\sqrt{3}x$ и осью $0x$ равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Найдем угол между прямой $y=x$ и осью $0x$. В полярных координатах данное уравнение примет вид: $r\sin\varphi=r\cos\varphi$; $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=1$;

$\operatorname{tg}\varphi=1$; $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Значит, угол равен $\dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом, получим пределы изменения угла φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{6}$.

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^2 \sqrt{4-\left[(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\right]}\, r\, dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^2 \sqrt{4-r^2}\, r\, dr \right) d\varphi = \left| \begin{array}{c} t = 4-r^2, \\ dt = -2rdr, \\ r=0 \Rightarrow t=4, \\ r=2 \Rightarrow t=0 \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{t}dt \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\int_0^4 t^{1/2}dt \right) d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 \right) d\varphi = = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 8^{\frac{3}{2}} d\varphi = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = = \frac{8}{3}\cdot\varphi \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{9}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить, перейдя к полярным координатам, интеграл $\iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, где область интегрирования σ *:* $1 \le x^2+y^2 \le 4$.
2. Вычислить, перейдя к полярным координатам, интеграл $\iint_{\sigma} \left(2x+y^3\right)dxdy$, где σ – часть кругового сектора единичного радиуса с центром в начале координат, расположенная в 1-м квадранте.
3. Вычислить $\iint_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, если σ ограничена линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$.
4. Вычислить $\iint_{\sigma} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, если σ ограничена линиями $x^2+y^2=\pi^2$, $x^2+y^2=4\pi^2$.
5. Вычислить $\iint_{\sigma} \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$, если σ ограничена линиями $x^2+y^2 \le 3x$.
6. Найти объем цилиндра, ограниченного поверхностью $z = 9 - x^2 - y^2$,

цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и частью координатной плоскости Оxy.
7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 8y = 0$, $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$.
8. Вычислить площадь области, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = \cos 2\varphi$.

Ответы

1. $2\pi\sqrt{3}$. 2. $\dfrac{4}{5}$. 3. $\dfrac{128\pi}{3}$. 4. $-6\pi^2$. 5. 9π 6. 28π. 7. $4\pi - 3\sqrt{3}$. 8. 1.

Расчетно-графическая работа № 9

1. Вычислить двойной интеграл.

1.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^2$.

1.2. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

1.3. $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

1.4. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

1.5. $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

1.6. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\quad D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$.

1.7. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

1.8. $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

1.9. $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$.

1.10. $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)dxdy;\ D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

1.11. $\iint\limits_D (12xy + 3x^2y^2)dxdy;\quad D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

1.12. $\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy;\quad D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

1.13. $\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

1.14. $\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

1.15. $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

1.16. $\iint\limits_D (xy - 9x^5y^5)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

1.17. $\iint\limits_D (24xy - 48x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

1.18. $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$.

1.19. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

1.20. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

1.21. $\iint\limits_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

1.22. $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

1.23. $\iint\limits_D (xy - 9x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

1.24. $\iint\limits_D (xy - 4x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

1.25. $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

2. Вычислить двойной интеграл в полярной системе координат

2.1. $\iint\limits_\sigma \frac{x + y}{x^2 + y^2}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

2.2. $\iint\limits_\sigma \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, если область σ кольцо между двумя окружностями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 9$.

2.3. $\iint\limits_\sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и прямыми $x = y$, $y = \sqrt{3}x$.

2.4. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, если область σ часть круга $x^2+y^2-9=0$, расположенного во второй четверти.

2.5. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2-9}\,dxdy$, если область σ кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

2.6. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область σ кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=14$ и $x^2+y^2=9$.

2.7. $\iint\limits_{\sigma}\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, если область часть круга $x^2+y^2=9$, лежащего в первой четверти между прямыми $y=x$ и $x=0$.

2.8. $\iint\limits_{\sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, если область σ кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=16$ и $x^2+y^2=9$, лежащими в верхней полуплоскости.

2.9. $\iint\limits_{\sigma}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область σ ограничена верхней половиной дуги окружности $x^2+y^2=16$ и отрезками оси $0x$ от точки с абсциссой, равной 0, до точки с абсциссой, равной 2.

2.10. $\iint\limits_{\sigma}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2=4$.

2.11. $\iint\limits_{\sigma}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2=4y$.

2.12. $\iint\limits_{\sigma}e^{x^2+y^2}\,dxdy$, если область σ является сектором окружности $x^2+y^2=2$, лежащим в первой четверти.

2.13. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2-4xy\right)dxdy$, если область σ ограничена дугой окружности $x^2+y^2=4$ и прямыми $y=0$, $y=x$ и лежит в первой четверти.

2.14. $\iint\limits_{\sigma} \frac{2x-y}{x^2+y^2}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2=1$.

2.15. $\iint\limits_{\sigma} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}dxdy$, если область σ является частью кольца, ограниченного окружностями $x^2+y^2=25$, $x^2+y^2=16$ и прямыми $x=y$, $x=0$ $(y>0)$.

2.16. $\iint\limits_{\sigma} \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$; если область σ является сектором круга $x^2+y^2=36$, ограниченного прямыми $y=\sqrt{3}x$ и $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, расположенного в первой четверти.

2.17. $\iint\limits_{\sigma} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2=4$.

2.18. $\iint\limits_{\sigma} \frac{\sqrt{x}y}{x^2+y^2}dxdy$, если область σ является половиной круга $x^2+y^2=4$, лежащей в четвертой четверти.

2.19. $\iint\limits_{\sigma} \left(x^4+2x^2y^2+y^2\right)dxdy$; если область σ является сектором круга $x^2+y^2=9$, ограниченного линиями $y=-\sqrt{3}x$ и $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$, лежащим во второй четверти.

2.20. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$, если область σ половина круга $x^2+y^2=4$, лежащего в четвертой четверти.

2.21. $\iint\limits_{\sigma} \frac{x^2+y^2}{y^2}dxdy$, если область σ ограничена окружностью $x^2+y^2-9=0$.

2.22. $\iint\limits_{\sigma} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}dxdy$, если область σ половина круга $x^2+y^2=1$, лежащая в первой четверти.

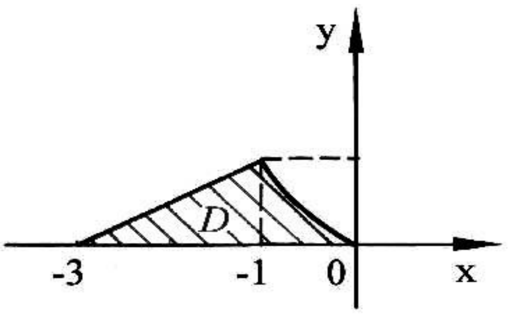
2.23. $\iint\limits_{\sigma} \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область σ половина круга $x^2+y^2-4=0$, лежащая во второй четверти.

2.24. $\iint\limits_{\sigma}(x+y)dxdy$, если область σ часть окружности $x^2+y^2+2x=0$, лежащая во второй четверти.

2.25. $\iint\limits_{\sigma} \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$, если область σ является кольцом, ограниченным окружностями $x^2+y^2=4$ и $x^2+y^2=1$.

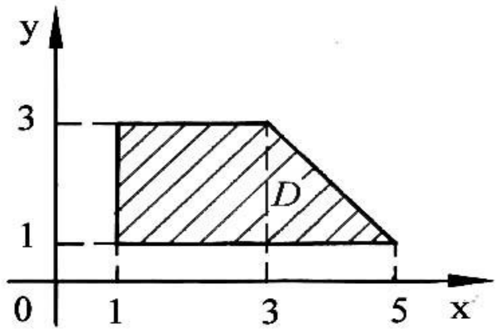
3. Вычислить массу материальной пластины плотностью $\rho(x,y)=x+y$, если она ограничена линиями:

3.¹



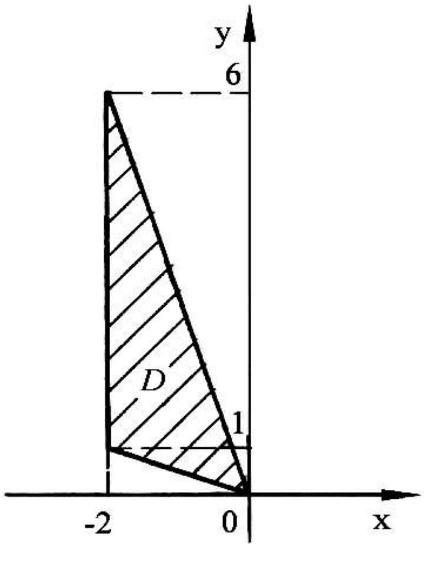
$D: y=x^2;\ 2y-x=3;\ x=0.$

3.2.



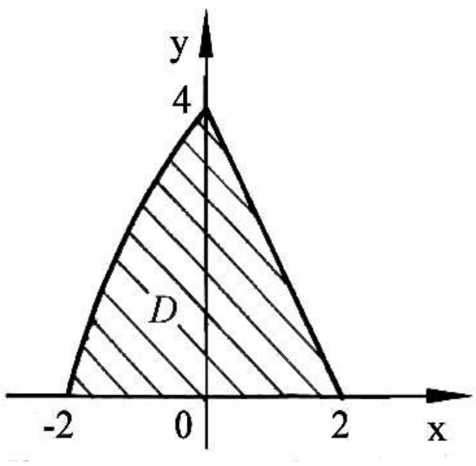
$D: x=1; y=3; y=1; x+y=6.$

3.3.



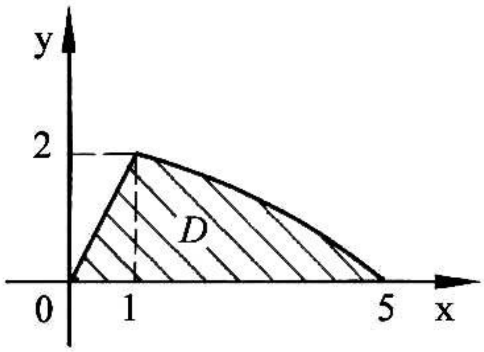
$D: y=-3x; y=-0{,}5x; x=-2.$

3.4.



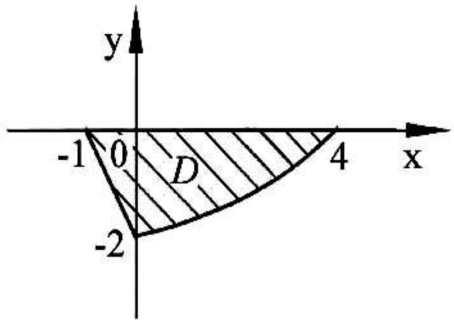
$D: y=4-x^2;\ 2x+y=4; y=0.$

3.5.



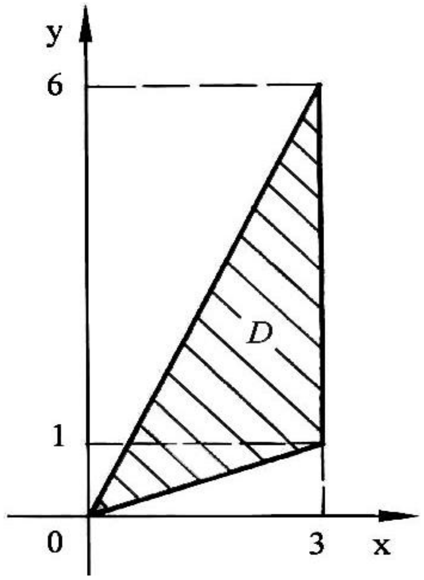
$D: y = 2x; x = 5 - y^2; y = 0.$

3.6.



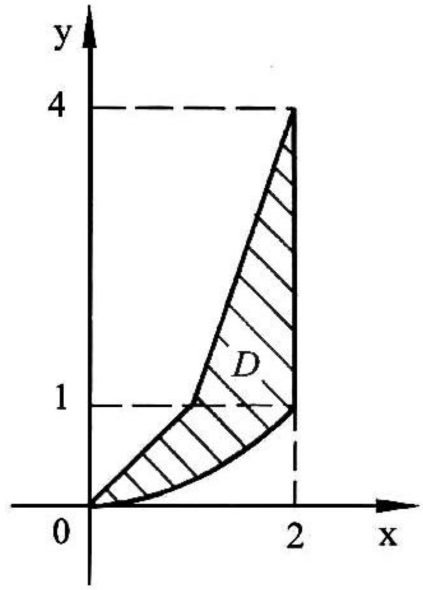
$D: x = -y^2 + 4; y = 0; y = -2 - 2x.$

3.7.



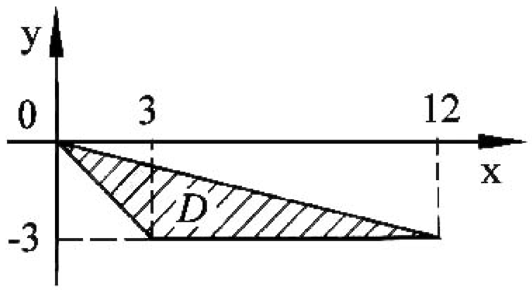
$D: y = 2x; y = \frac{x}{3}; x = 3.$

3.8.



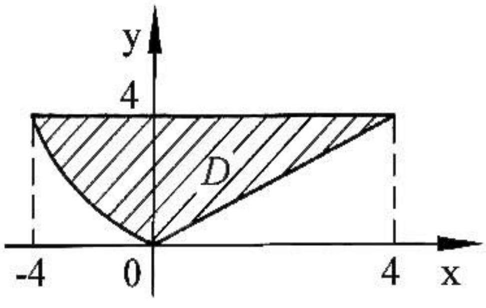
$D: y = x^2;\ y = 0.25x^2;\ \ x = 2.$

3.9.



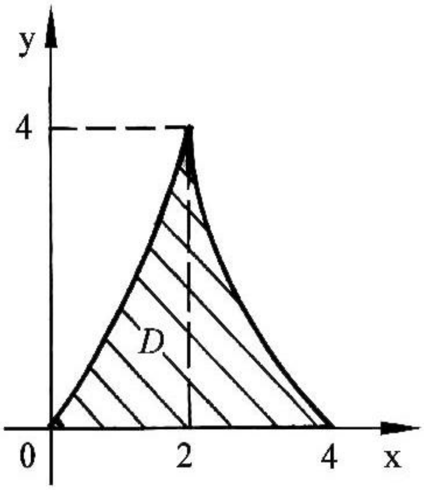
$D: y = -x; y = -3;\ y = -0.25x.$

3.10.



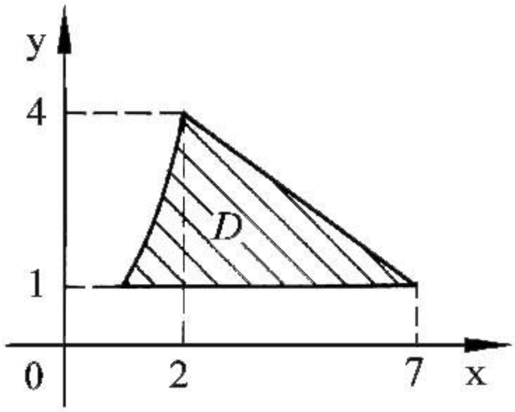
$D: y = 0{,}25x^2; y = x; y = 4.$

3.11.



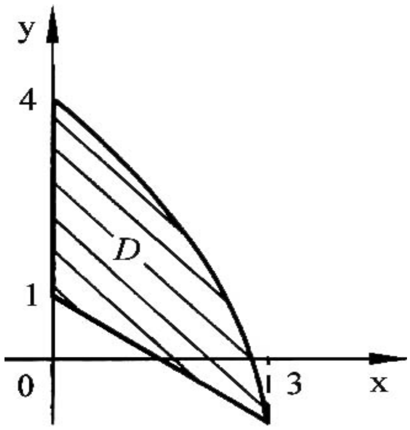
$D: y = x^2; y = (x-4)^2; y = 0.$

3.12.



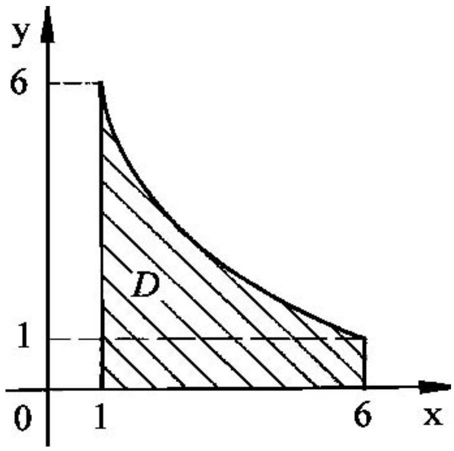
$D: y = x^2;\ 3x + 5y = 26;\ y = 1.$

3.13.



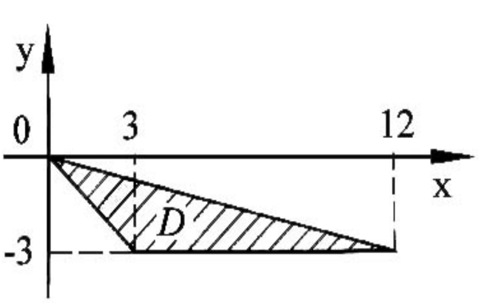
$D: y = 1 - 2x;\ y = 4 - x^2;\ x = 0.$

3.14.



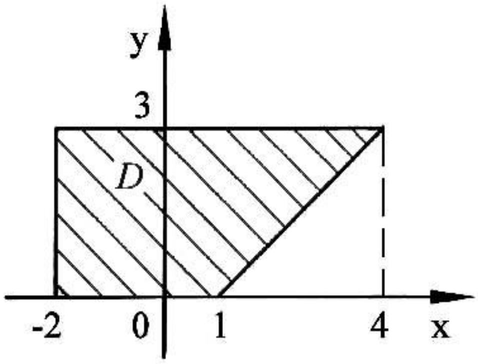
$D: y = \frac{6}{x}; y = 0; x = 1; x = 6.$

3.15.



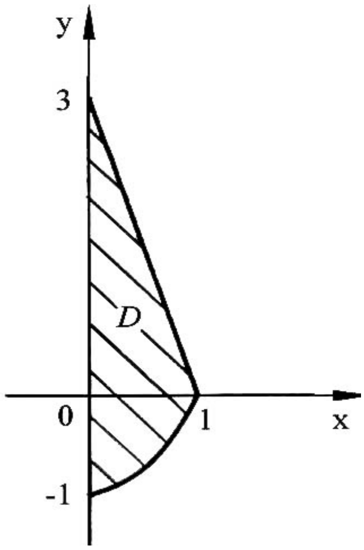
$D: y = -x;\ \ y = -3;\ \ y = -0{,}25x.$

3.16.



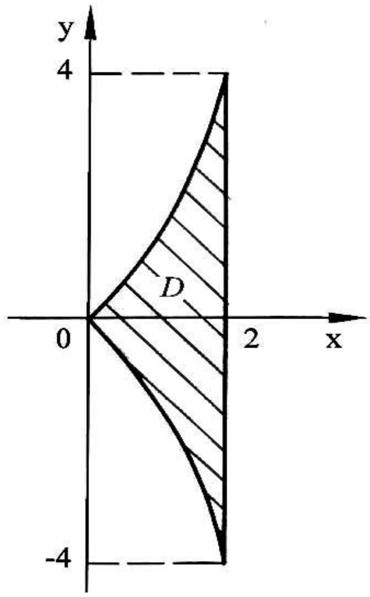
$D: y = 0; y = 3;\ x - y = 1;\ x = -2.$

3.17.



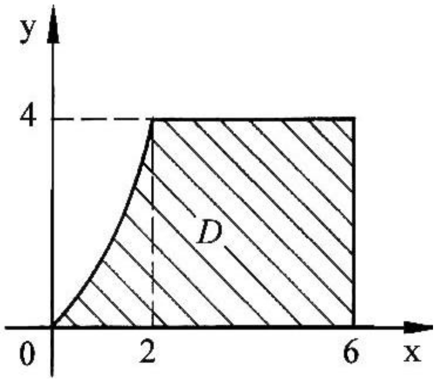
$D: y=\sqrt{1-x^2};\ 3x+y=3;\ x=0.$

3.18.



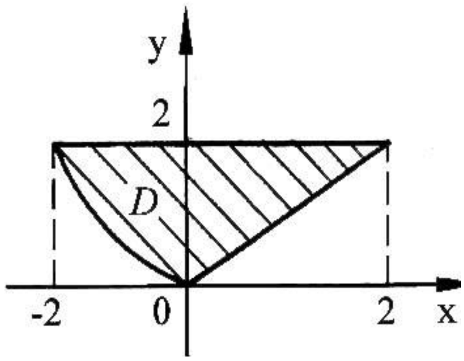
$D: y=x^2;\ y=-x^2;\ x=2.$

3.19.



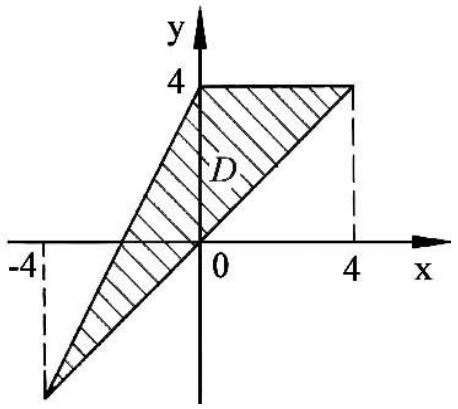
$D: y=x^2;\ y=4;\ y=0;\ x=6.$

3.20.



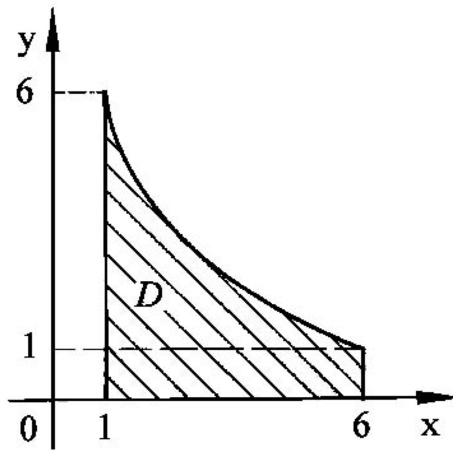
$D: y=0.5x^2;\ y=x;\ y=2.$

3.21.



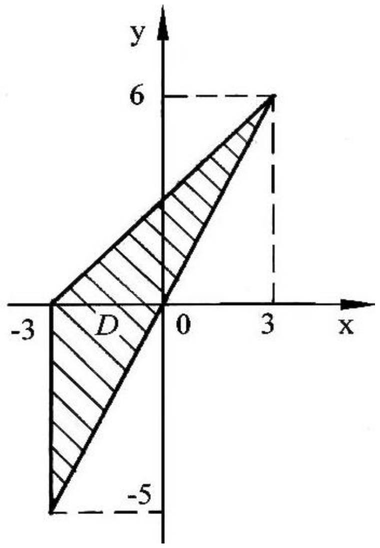
$D: y-2x=4;\ y=x;\ y=4.$

3.22.



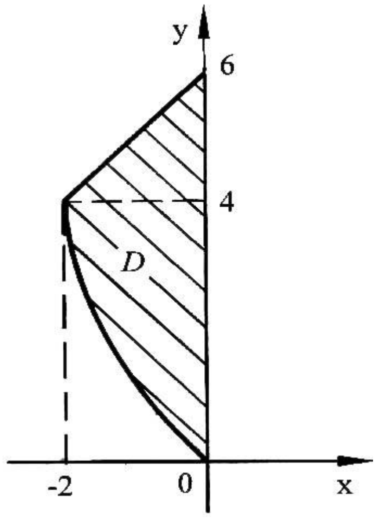
$D: y=6/x;\ y=0;\ x=1;\ x=6.$

3.23.



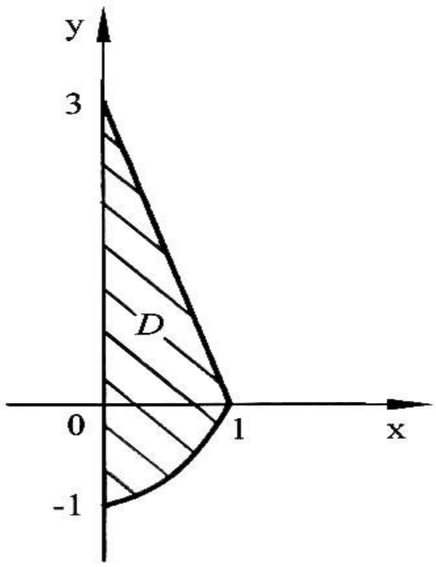
$D: y = 2x; x = -3; y - x = 3.$

3.24.



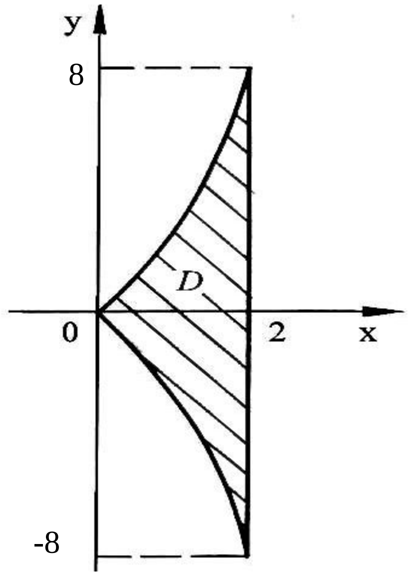
$D: y = x^2;\ -x + y = 6; x = 0.$

3.25

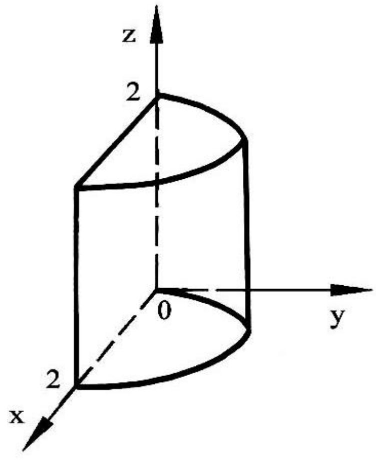


$D: y + 1 = x^2;\ 3x + y = 3; x = 0.$

3.26.



$D: y = x^3; y = -x^3; x = 2.$

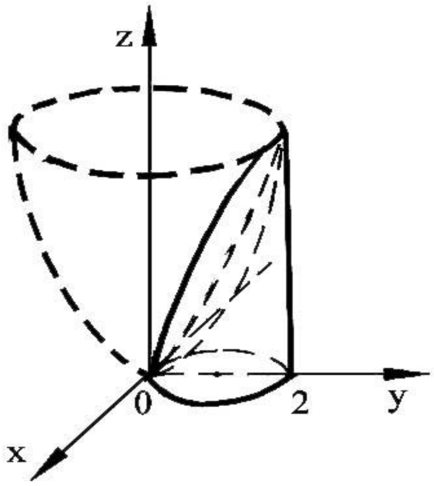


4. Вычислить объём тела, если оно ограничено поверхностями.

4.1.

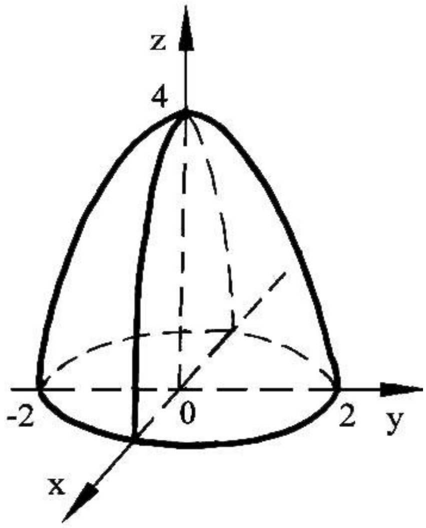
$z = 0, z = 2,\ 2x = x^2 + y^2.$

4.2.



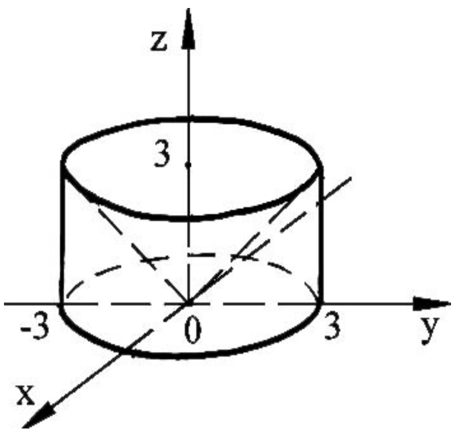
$z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ 2y = x^2 + y^2.$

4.3.



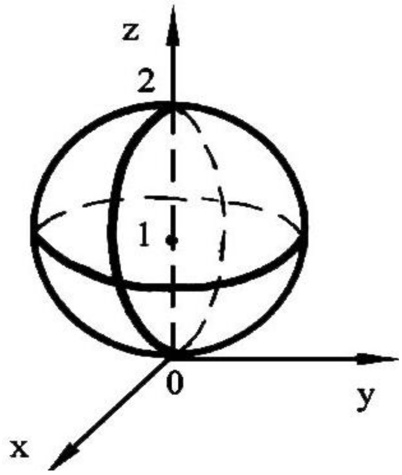
$z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0.$

4.4.



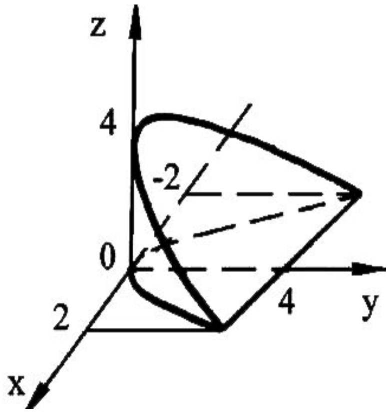
$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0.$

4.5.



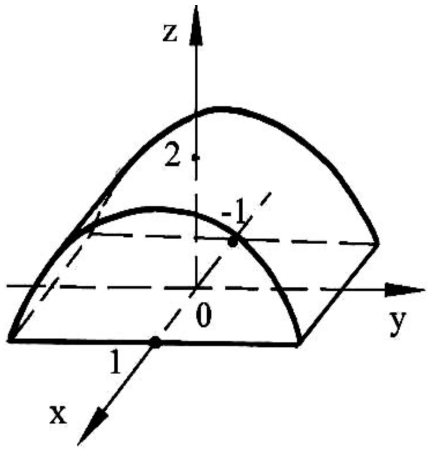
$z = x^2 + y^2,\ z = 2 - x^2 - y^2.$

4.6.



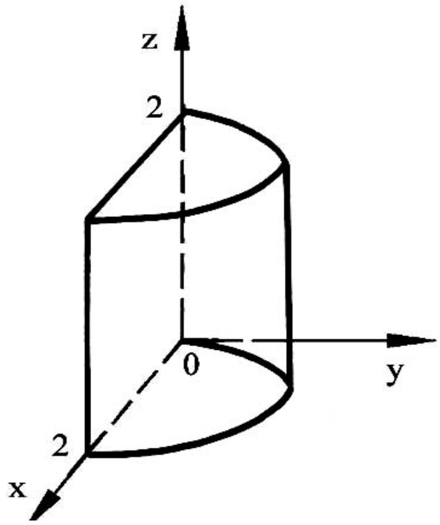
$y + z = 4,\ y = x^2,\ z = 0.$

4.7.



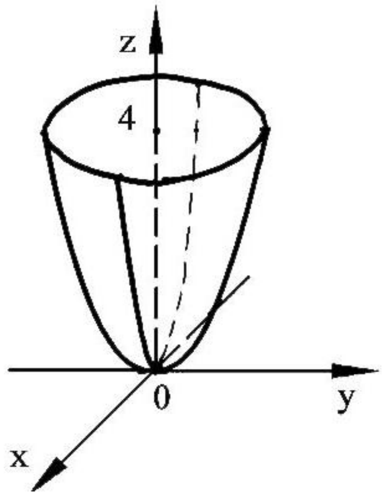
$z = 2 - y^2,\ x = -1,\ x = 1.$

4.8.



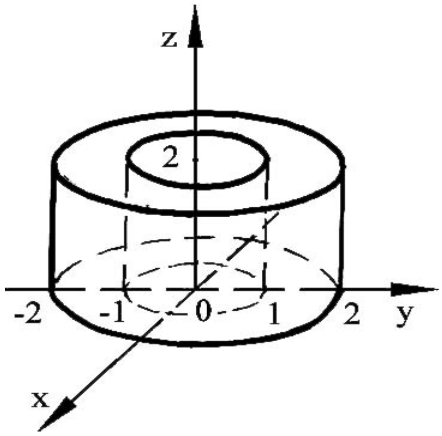
$z=0, z=2,\ 2x=x^2+y^2$.

4.9.



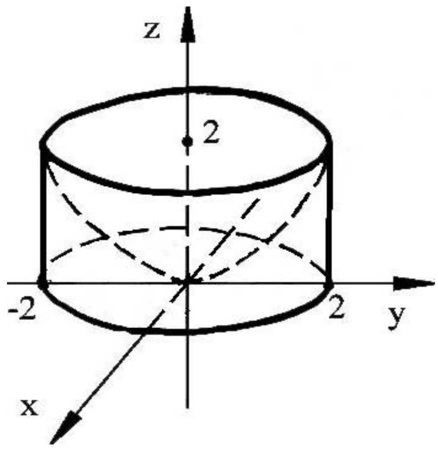
$z=x^2+y^2,\ z=4$.

4.10.



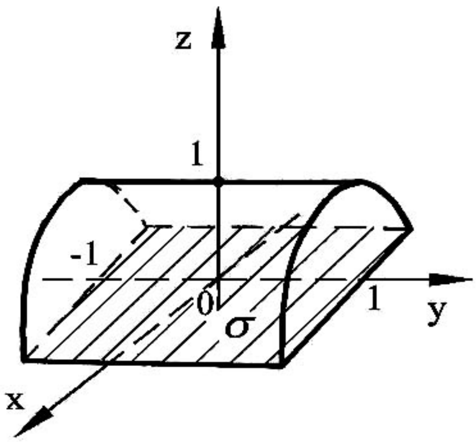
$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1,$
$z=0, z=2$.

4.11.



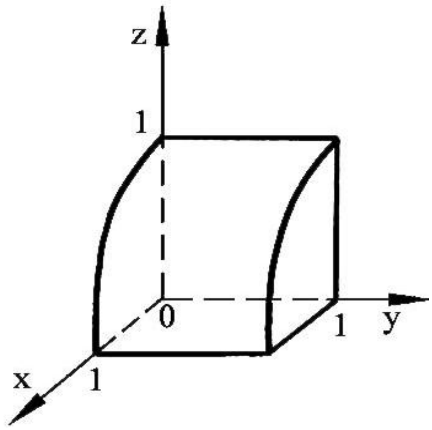
$x^2+y^2=4, x^2+y^2=2z, z=0$.

4.12.



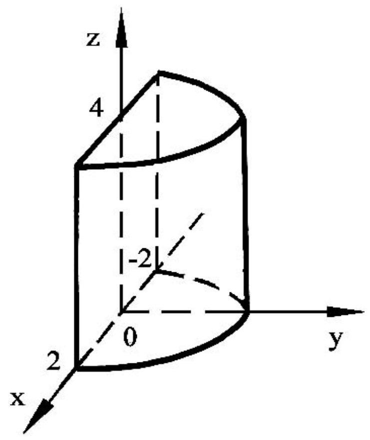
$z=1-x^2,\ x=-1,\ x=1,\ z=0$.

4.13.



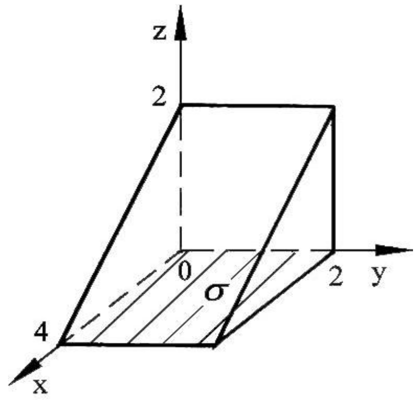
$z=1-x^2,\quad x=0,\quad y=0,\quad y=1,$
$z=0$.

4.14.



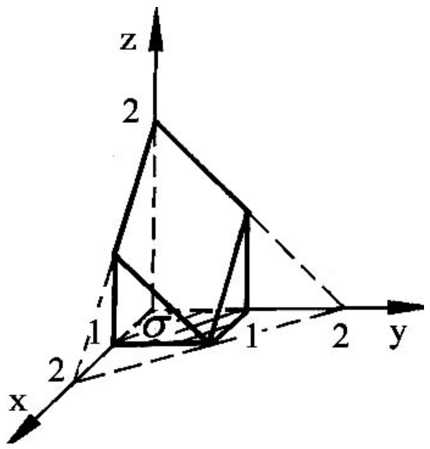
$x^2+y^2=4,\ y=0,\ z=0,\ z=4.$

4.15.



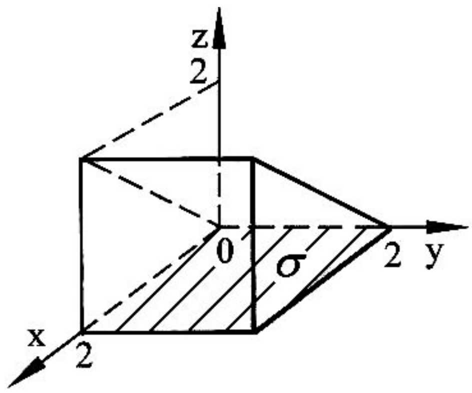
$z=2-\dfrac{x}{2},\ x=0,\ y=0,\ y=2,$
$z=0.$

4.16.



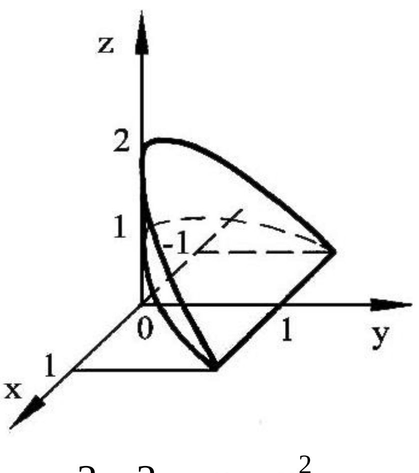
$x+y+z=2,\ x=0,\ x=1,\ y=0,$
$y=1,\ z=0.$

4.17.



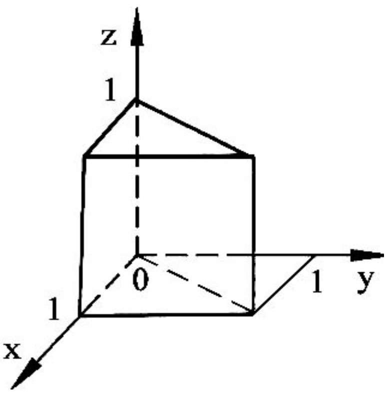
$x=2, y=0, y=2, z=0,\ z=x.$

4.18.



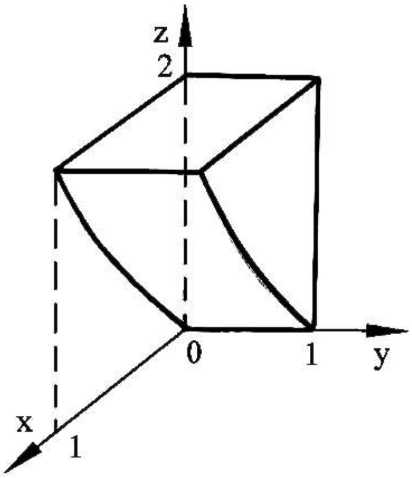
$z=1-y,\ z=2-2y,\ y=x^2.$

4.19.



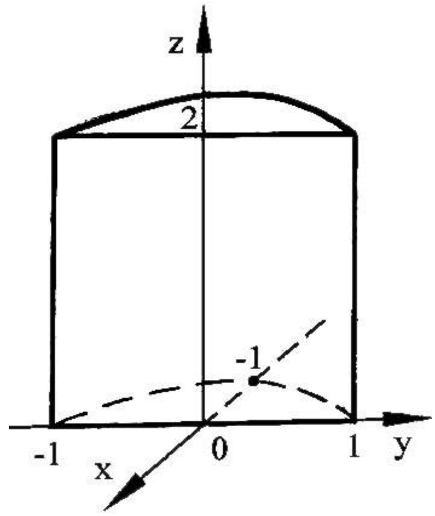
$x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0, z=1.$

4.20.



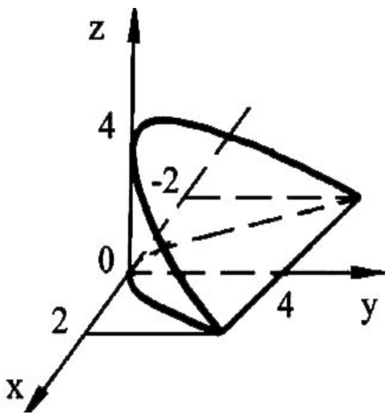
$x = 0,\ y = 1,\ z = x^2,\ z = 2 - x,$
$y = 0$.

4.21.



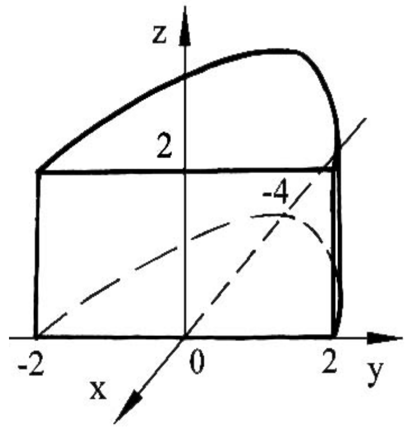
$x = 0, x = y^2 - 1,\ z = 0,\ z = 2$.

4.22.



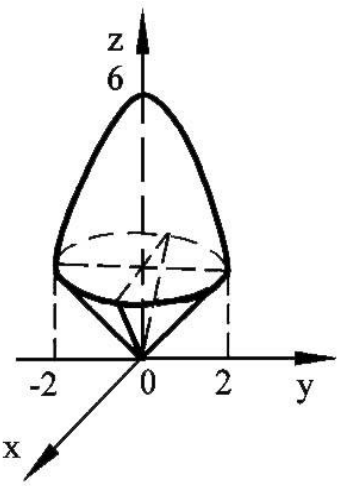
$z = 4 - y,\ y = x^2,\ z = 0$.

4.23.



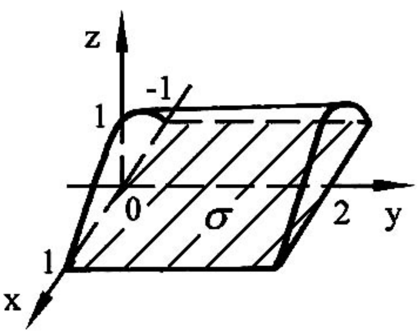
$x = 0,\ x = y^2 - 4,\ z = 0$.

4.24.



$z = 6 - x^2 - y^2,\ z^2 = x^2 + y^2$.

4.25.



$x = 0,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 1 - x^2$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЯДОВ

§1. Числовые ряды

Теоретический материал

Определение 1. Числовой ряд есть алгебраическая сумма бесконечного числа слагаемых. Всякий ряд имеет, таким образом, вид

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

Причем написанное выражение не имеет последнего члена, но за каждым из слагаемых имеется следующее слагаемое.

Для сокращенного обозначения рядов используется знак суммирования $\sum$, а именно:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Определение 2. Числа a_1, $a_2, \ldots,$ $a_n, \ldots$ называются членами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n называется ***общим членом ряда***.

Рассмотрим некоторые примеры рядов. В курсе математики средней школы мы уже встречались с понятием ряда, который получается при вычислении суммы членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n .$$

Определение 3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ называется ***рядом геометрической прогрессии***.

Если, например, $a = 1$, $q = \dfrac{1}{5}$, то получим ряд

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} .$$

Определение 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

называется ***гармоническим рядом***.

Определение 5. Сумма первых n членов ряда называется ***частичной суммой ряда.***

Если частные суммы ряда становятся все более и более точными приближениями некоторого числа, то ряд мы назовем сходящимся. То есть, если существует число S, для которого $S_1,\ S_2,...,\ S_n,...$ являются приближенными значениями, то S называют ***суммой ряда*** и пишут

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S.$$

Определение 6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность его частных сумм $S_1,\ S_2,...,\ S_n,...$ сходится, т.е. если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется ***расходящимся*** и ему не приписывается никакое числовое значение.

Свойства сходящихся рядов

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то для произвольного числа c ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$$

также сходится и его сумма, равная cS. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ расходится.

2. Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

сходятся и их суммы равны соответственно S' и S'', то и каждый из двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$$

сходится и сумма каждого равна соответственно $S' \pm S''$.

Другими словами: ***сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать***.

3. Если в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ добавить или отбросить конечное число чле-

нов, то полученный ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_n' + \ldots$$

сходится или расходится одновременно с данным. В случае сходимости рассматриваемых рядов их суммы отличаются на сумму добавленных или отброшенных членов.

4. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю.

***Следствие 1. Если n-й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится, ряд может и расходиться*.**

Образцы решения задач

Пример 1. Исследуем на сходимость ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$.

Решение.

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}.$$

Рассмотрим q, удовлетворяющее условию $|q| < 1$.

Тогда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^{n+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot 0 = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, при $|q| < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ сходится и его сумма S равна $\dfrac{a}{1-q}$. В частности, сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$ равна $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}$.

Если $|q| \ge 1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ сходится лишь при $a = 0$. В этом случае $S_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Если $a \ne 0$ и $|q| \ge 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty}\left(1-q^{n+1}\right) = \frac{a}{1-q}\cdot\infty = \infty,$$ т.е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ расходится.

Если $a \neq 0$ и $|q| = 1$,то получим при $q = 1$ ряд

$$a + a + \ldots + a + \ldots,$$

следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = a\lim\limits_{n\to\infty} n = a\cdot\infty = \infty$, т.е. ряд является расходящимся.

При $q = -1$ ряд

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n+1} a + \ldots,$$

где $S_{2n} = 0,\ S_{2n-1} = a$, следовательно, последовательность частичных сумм a, 0, a, 0,... не имеет предела.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}.$$

Решение. Для частных сумм данного ряда имеем

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots =$$

$$= \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \ln(n+1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$.

Согласно определению 6 ряд является расходящимся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Решение. Преобразуем частные суммы данного ряда. Для этого запишем общий член ряда следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}.$$

Найдем числа A и B:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n + 2A}{n(n+2)}.$$

Если две равные дроби имеют одинаковые знаменатели, то и их числители равны, т.е.

$$1=(A+B)n+2A \text{ или } 0\cdot n+1=(A+B)n+2A.$$

Два многочлена являются равными, если равны коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, т.е.

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A=1. \end{cases}$$

Откуда $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Тогда $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$S_1=a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$,

$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$,

$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)$,

$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)$,

- -

$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)+$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+2}\right)$.

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+2}\right)\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{4}$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$.

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{4}$.

Пример 4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ сходится. Показать, что сходится и ряд $5^4+5^3+5^2+5+1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{n-4}}+\ldots$

Решение. Последний ряд получается из ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ умножением на $c=5^4$, следовательно, он сходится согласно свойству 1.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=2+\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{6^n}+\ldots$$

и если он сходится, найти его сумму S.

Решение. Данный ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=(1+1)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots$$

Так как ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

являются рядами геометрической прогрессии, его знаменателями, меньшими единицы, то они сходятся и их суммы равны соответственно $S'=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$, $S''=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ (см.пример 1).

Следовательно, данный ряд сходится по свойству 2 и его сумма равна $S=S'+S''=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$.

Пример 6. Как известно, ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ является сходящимся. Тогда сходящимся является, например, и ряд $5+\sqrt{2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\ldots+\frac{1}{5^{n+1}}+\ldots$, который получается из данного отбрасыванием конечного числа членов: $5+\sqrt{2}$ и добавлением слагаемых: $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}$.

Рассмотрим необходимое условие сходимости ряда.

Пример 7. Ряд $\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+\frac{6}{10}+\ldots+\frac{2n}{3n+1}+\ldots$

расходится, так как в силу необходимого признака сходимости (свойство 4)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{3}\neq 0.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Подчеркнем, что рассматриваемый признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. ***из того, что член стремится к нулю, еще не следует, что ряд расходится***, ряд может и расходиться. Примером такого ряда может служить ***гармонический ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Он расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Чтобы доказать это, напомним, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, т.е.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e.$$

Логарифмируя неравенство по основанию *e*, получим

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \ln e, \text{ или } n\ln\frac{n+1}{n}<1.$$

Отсюда

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}, \text{ или } \ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}.$$

Подставим в полученное неравенство поочередно $n=1,2,3,\ldots,n-1,n$.

Получаем неравенства

$$\ln 2<1, \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}, \ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

- -

$$\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}, \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получаем $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$, т.е. частичная сумма гармонического ряда $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, следовательно, гармонический ряд расходится.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$.

Задача 2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится, если:

а) $u_n=\frac{n^2-3n+10}{10n^2-3n+1}$; б) $u_n=\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$;

в) $u_n=n\sin\frac{\pi}{2n+1}$; г) $u_n=\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+3}+3}$.

§2. Числовые ряды с неотрицательными членами

Теоретический материал

При анализе рядов, полученных в результате моделирования какой-нибудь конкретной задачи, возникают два вопроса: во-первых, сходится ли полученный ряд, т.е. стабилизируется ли моделируемый процесс, и если он сходится, то, во-первых, найти его сумму. Во многих практических задачах принципиальное значение имеет ответ на первый вопрос. Поэтому мы уделим основное внимание вопросу установления признаков сходимости рядов.

Без доказательства сформулируем признаки сравнения.

Теорема 1. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \ a_n \geq 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \ b_n \geq 0.$$

Если $b_n \leq a_n$ для любого n, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ не превосходит сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Замечание 1. Утверждение теоремы остается в силе, если существует натуральное N такое, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $b_n \leq a_n$.

Теорема 2. Предельный признак сравнения. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если существует конечный и неравный нулю предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

В качестве ряда, используемого для сравнения с данным, часто выбирают ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$. Такой ряд называется обобщенным гармоническим рядом. В примере 16 будет показано, что при $\alpha > 1$ данный ряд сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится.

Теорема 3 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

Тогда:

1) если $\rho < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) если $\rho > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание 2. Если $\rho = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может быть как сходящимся, так и расходящимся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5). В этом случае для решения вопроса о сходимости ряда необходимы дополнительные исследования.

Теорема 4 (признак Коши). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

Тогда:

1) если $\rho < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) если $\rho > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) если $\rho = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может быть как сходящийся, так и расходящийся (см. приведенные далее примеры 14 и 15).

Сформулированный выше признак целесообразно использовать, когда a_n является n-й степенью некоторого выражения, например $a_n = \dfrac{2^n}{n^n}$, или $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Замечание. Признак Даламбера и признак Коши дают ответ о сходимости только тех рядов, порядок малости членов которых не меньше, чем у ряда геометрической прогрессии, т.е. только для "быстро" сходящихся рядов. С другой стороны, эти признаки устанавливают расходимость только таких рядов, у которых общий член даже не стремится к нулю. Признаки, следовательно, являются слишком грубыми. Они неприменимы к рядам с медленно растущими частичными суммами, каким является, например, гармонический ряд.

Сформулируем сейчас признак, который в некоторой степени восполняет этот пробел.

Теорема 4 (интегральный признак). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, причем $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ и $f(n)$ – такая непрерывная монотонно убывающая функция, что $f(n)=a_n$. Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходится или расходится.

Образцы решения задач

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\lg 2}+\frac{1}{\lg 3}+\ldots+\frac{1}{\lg n}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\lg n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом.

Имеем $\ln n \le n$, значит, $\dfrac{1}{\ln n}\ge\dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом. Имеем $\sqrt[3]{n}\le n$, значит, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\ge\dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{n\cdot 5}+\frac{1}{n\cdot 5^2}+\frac{1}{n\cdot 5^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 5^n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$, который сходится. Имеем $\dfrac{1}{n\cdot 5^n}\le\dfrac{1}{5^n}$. Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n-1}=3+\frac{6}{3}+\frac{9}{5}+\ldots+\frac{3n}{2n-1}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)}{2(n+1)-1}:\frac{3n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+3)(2n-1)}{3n(2n+1)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+3n-3}{6n^2+3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}}{6+\frac{3}{n}}=\frac{6}{6}=1.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что если $\alpha>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$.

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Но так как

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}\neq 0$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, предложенный ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots$$

Решение. Для данного ряда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+3)^2}:\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^2+6n+9}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n+4/n}{1+6/n+9/n}=1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Сравним данный ряд с рядом

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$, который, как мы знаем (пример 3, §1), является сходящимся. Имеем

$(n+2)^2\geq n(n+2)$, т.е. $\frac{1}{(n+2)^2}\leq\frac{1}{n(n+2)}$, отсюда по теореме 1 получаем сходимость исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots$$

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}.$$

Решение. Напомним, $(2n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)$ и $(2(n+1)+1)!=(2n+3)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2(n+1)+1)!}:\frac{1}{(2n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^n\cdot 5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{8+6^n}=\frac{2}{14}+\frac{4}{44}+\ldots+\frac{2^n}{8+6^n}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{8+6^{n+1}}:\frac{2^n}{8+6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(8+6^n)}{2^n\cdot(8+6^{n+1})}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot \left(8+6^n\right)}{2^n \cdot \left(8+6\cdot 6^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 6^n \cdot \left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{6^n \cdot \left(\frac{8}{6^n}+6\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{\frac{8}{6^n}+6} =$$

$= \frac{2\cdot 1}{6} = \frac{1}{3} < 1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится. При решении воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{6^n} = 0$.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{n!} = \frac{5}{1} + \frac{7}{2!} + \frac{11}{3!} + \ldots + \frac{2^n+3}{n!} + \ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}+3}{(n+1)!} : \frac{2^n+3}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{n+1}+3\right)\cdot n!}{\left(2^n+3\right)\cdot(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!}{2^n\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)(n+1)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{2^n}}{1+\frac{3}{2^n}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{1}\cdot 0 = 0 < 1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10\cdot n^{20}} = \frac{5}{10} + \frac{5^2}{10\cdot 2^{20}} + \frac{5^3}{10\cdot 3^{20}} + \ldots + \frac{5^n}{10\cdot n^{20}} + \ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{10\cdot(n+1)^{20}} : \frac{5^n}{10\cdot n^{20}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot 10\cdot n^{20}}{10\cdot(n+1)^{20}\, 5^n} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5\cdot 10\cdot n^{20}}{5^n\cdot 10\cdot (n+1)^{20}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot n^{20}}{\cdot (n+1)^{20}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{20}=5\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20}=5\cdot 1^{20}=5>1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие признак Коши, который целесообразно использовать, когда a_n является n-й степенью некоторого выражения, например $a_n=\frac{2^n}{n^n}$, или $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n=\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$ следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=2+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

Решение. Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}7$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

Пример 13. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}=\left(\frac{3}{28}\right)^9+\left(\frac{8}{49}\right)^{16}+\ldots+\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0<1$, следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 14. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд исследовать нельзя. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, данный ряд расходится.

Пример 15. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение. Используя равенство $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{\alpha} = 1$, получаем

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^2 = 1^2 = 1$, но этот ряд сходится, так как если отбросить первых два члена, то он совпадает с рядом $\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)^2}$, который является сходящимся (см. пример 5).

Пример 16. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots \quad \alpha>0,\ \alpha\neq 1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, следовательно, можно применить интегральный признак. При $\alpha\neq 1$ имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}x^{-\alpha}dx=\left(\lim_{M\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^M\right)=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}\right)\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right).$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая:

1) $1-\alpha<0$, т.е. $\alpha>1$ или $\alpha-1>0$; следовательно, $M^{1-\alpha}=\dfrac{1}{M^{\alpha-1}}$ стремится к нулю, если M стремится к бесконечности. Тогда

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{M^{\alpha-1}}-1\right)=\frac{-1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1},$$

таким образом, при $\alpha>1$ данный ряд сходится.

В частности, ряд $1+\dfrac{1}{2^{\frac{7}{4}}}+\dfrac{1}{3^{\frac{7}{4}}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{\frac{7}{4}}}+\ldots$ сходится, т.к. $\alpha=\dfrac{7}{4}>1$.

2) $1-\alpha>0$, т.е. $\alpha<1$. Тогда $M^{1-\alpha}$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности, следовательно,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right)=\infty$$ и данный ряд расходится.

В частности, ряд $1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$ расходится, так как $\alpha=\dfrac{1}{3}<1$.

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}=\frac{\ln^3 3}{3}+\frac{\ln^3 4}{4}+\frac{\ln^3 5}{5}+\ldots+\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}+\ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln^3(x+2)}{x+2}$, $x \ge 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\dfrac{\ln^3(n+2)}{n+2}$, следовательно, можно применить интегральный признак

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln^3(x+2)}{x+2}dx=\lim_{M\to\infty}\int\limits_1^{M}\frac{\ln^3(x+2)}{(x+2)}dx=\left|\begin{array}{c} t=\ln(x+2), \\ dt=\dfrac{dx}{x+2}, \\ x=1 \Rightarrow t=\ln 3, \\ x=M \Rightarrow t=\ln(M+2) \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\int\limits_{\ln 3}^{\ln(M+2)}t^3\,dt=\lim_{M\to\infty}\frac{t^4}{4}\Big|_{\ln 3}^{\ln(M+2)}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{4}\left[\ln^4(M+2)-\ln^4 3\right]=\infty,$$

т.к. $\ln^4(M+2)$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности. Следовательно, ряд расходится.

Пример 18. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^4}+\frac{3}{e^9}+\ldots+\frac{n}{e^{n^2}}+\ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x}{e^{n^2}}$, $x \ge 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\dfrac{n}{e^{n^2}}$, следовательно, можно применить интегральный признак

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx=\lim_{M\to\infty}\int\limits_1^{M}e^{-x^2}x\,dx=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_1^{M}e^{-x^2}(-2x)dx=-\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}e^{-x^2}\Big|_1^M=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\left(e^{-M^2}-e^{-1}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{e^{M^2}}-\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e},$$ т.к. e^{M^2}

неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности. Следовательно, данный ряд сходится по интегральному признаку.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если:

а) $a_n = \dfrac{1}{2^n \cdot n^2}$; б) $a_n = \dfrac{5}{\sqrt[5]{n+1}}$.

Задача 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

а) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{n^2+5n+1}$; б) $a_n = \dfrac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}$; в) $a_n = \sqrt{n}\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера, если:

а) $a_n = \dfrac{2^n}{n^8}$; б) $u_n = \dfrac{n!}{2^n+3^n}$; в) $a_n = \dfrac{3^n+1}{n^2+1}$;

г) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$; д) $u_n = \dfrac{2^n}{2n+3} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью радикального признака Коши:

а) $a_n = \dfrac{5^n}{(4n+3)^n}$; б) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+4}\right)^{2n}$;

г) $a_n = \operatorname{arctg}^n \dfrac{n}{n+3}$; д) $a_n = \left(\dfrac{3n^2+2n}{n^2+1}\right)^n \cdot 5^{-n}$.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью интегрального признака Коши, если:

а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$; в) $a_n = \dfrac{3n^2}{e^{n^3}}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{8+\ln^2 n}}$.

Ответы

3. а) Ряд сходится, б) ряд расходится. 4. а) Ряд сходится, б) ряд сходится, в) ряд расходится. 5. а) Ряд расходится, б) ряд расходится, в) ряд расходится, г) ряд сходится, д) ряд сходится. 6. а) Ряд сходится, б) ряд расходится, в) ряд сходится, г) ряд сходится, д) ряд сходится.
7. а) Ряд расходится, б) ряд сходится, в) ряд сходится, г) ряд расходится.

§3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Теоретический материал

Определение 1. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей всех членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| \ldots$$

Теорема 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, потому что все его члены либо меньше, либо равны членам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, и по признаку сравнения он является сходящимся.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Решение. Ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

сходится (см. пример 5, §2), следовательно, и данный ряд сходится.

Определение 2. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его членов.

Определение 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его членов, расходится.

Теорема 1 показывает, что исследование сходимости знакопеременных рядов сводится к исследованию сходимости рядов с неотрицательными членами.

Мы ограничимся исследованием знакочередующихся рядов, являющихся частными случаями знакопеременных.

Определение 4. Ряд называется ***знакочередующимся***, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно. При исследовании таких рядов можно ограничиться знакочередующимися рядами вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$положительные числа.

Приведем достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема 2 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится, если:

1) его члены убывают по модулю,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots;$$

2) его общий член стремится к нулю,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

При этом сумма S ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq S \leq a_1$.

Образцы решения задач

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

Решение. 1. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

Для исследования знакоположительного ряда воспользуемся интегральным признаком (см. теорему 5, §2). Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\ge 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, следовательно, условие интегрального признака удовлетворено. Имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}x^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{M\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_1^M=\lim_{M\to\infty}\frac{3}{2}\left(M^{\frac{2}{3}}-1\right)=\infty,$$

так как $\lim\limits_{M\to\infty}M^{\frac{2}{3}}=\infty$.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится, т.е. исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Исследуем ряд на условную сходимость.

Воспользуемся признаком Лейбница. Имеем

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0.$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, ряд является условно сходящимся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}-\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}+\ldots$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}+\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{3^n+1}+\ldots$$

Для исследования знакоположительного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}+1}:\frac{2^{n+1}}{3^n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}\cdot(3^n+1)}{2^{n+1}\cdot\left(3^{n+1}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}\cdot 2\cdot 3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{2^{n+1}\cdot 3^n\cdot\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{3+\frac{1}{3^n}}\right)=6,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$.

Следовательно, ряд, составленный из абсолютных величин, сходится, а исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Пример 4. Исследовать данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots$$

Решение. Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{2}{2}}=1\neq 0,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, мы заключаем, что ряд, составленный из абсолютных величин, расходится. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Исследуем его на условную сходимость. Проверим выполнение первого условия признака сходимости Лейбница

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, предложенный ряд является расходящимся.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

а) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$;

б) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

в) $a_n = (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{n!}$;

г) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n + 8}}$;

д) $u_n = (-1)^n e^{\frac{2n}{n^2+1}}$;

е) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$;

ж) $a_n = \frac{(-1)^{n+1} n^2}{\left(2^n + 1\right)}$.

Ответы

1. а) Ряд сходится условно, б) ряд сходится абсолютно, в) ряд сходится абсолютно, г) ряд сходится условно, д) ряд расходится, е) ряд сходится условно, ж) ряд сходится абсолютно.

§4. Степенные ряды

Теоретический материал

Определение 1. ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

где x – независимая переменная; x_0 – фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные коэффициенты.

Если в ряде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ положить $x = a$, где a – некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a - x_0)^n = a_0 + a_1(a - x_0) + a_2(a - x_0)^2 + \ldots + a_n(a - x_0)^n + \ldots$$

Определение 2. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ***называется сходящимся в точке*** a, если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a - x_0)^n$, полученный подстановкой $x = a$, является сходящимся рядом. При этом a называется ***точкой сходимости ряда*** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Пример 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots$$

сходится в точке $x = 0$ и расходится в точке $x = 24$. Действительно, подставляя $x = 0$, получим числовой ряд $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$, который как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{5}$ сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x = 24$, так как числовой ряд $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n + \ldots$ является расходящимся в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Определение 3. Множество всех точек сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ называется ***областью сходимости ряда***.

Переходим к выяснению структуры области сходимости степенного ряда.

Если произвести замену $x - x_0 = z$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Следовательно, при изучении степенных рядов мы можем ограничиться степенными рядами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Заметим, что любой степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x=0$, действительно, если сделать подстановку $x=0$, получим ряд, сумма которого равна a_0. Таким образом, точка $x=0$ входит в область сходимости любого степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Рассмотрим довольно часто встречающиеся степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, для которых, начиная с некоторого номера, все $a_n \neq 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Вопрос о сходимости таких рядов может быть решен с помощью признака Даламбера, примененного к ряду

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots,$$

составленному из модулей членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell.$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно в интервале $\left(-\dfrac{1}{\ell};\dfrac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \dfrac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \dfrac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится лишь при $x=0$.

Если рассмотреть ряды, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, то вопрос о сходимости таких рядов может быть решен применением к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ признака Коши.

Теорема 2 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell .$$

Тогда:

а) если $\ell\neq 0$ и $\ell\neq\infty$, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x|<\frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x|>\frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell=0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится при любом x;

в) если $\ell=\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится лишь при $x=0$.

Определение 4. Число R называется ***радиусом сходимости*** ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, если при всех x, для которых $|x|<R$, ряд сходится, а при всех x, для которых $|x|>R$, ряд расходится.

Из теорем 1 и 2 следует, что в случае, когда $\ell\neq 0$ и $R\neq+\infty$, имеет место равенство $R=\frac{1}{\ell}$. Условимся считать $R=0$ для рядов, расходящихся при всех $x\neq 0$, и $R=+\infty$ для рядов, сходящихся при любых x.

Из этого определения и теорем 1 и 2 следует

$$R=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

или

$$R=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}.$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ в точках $x=+R$ и $x=-R$ решается дополнительными исследованиями.

Таким образом, для области сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ возможны следующие случаи.

1.Ряд сходится только при $x=0$. Область сходимости состоит из одной точки $x=0$, $R=0$.

2.Ряд не имеет точек расходимости. Область сходимости совпадает со всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, $R=+\infty$.

3.Ряд имеет как отличные от нуля числа точки сходимости, так и точки расходимости. В зависимости от данного ряда область сходимости является одним из промежутков $(-R;R)$, $[-R;R)$, $(-R;R]$, $[-R;R]$, где $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, или $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

Определение 5. Независимо от того, какой именно случай имеет место, интервал $(-R;R)$ называется ***интервалом сходимости ряда*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Следствие 1. Область сходимости ***степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала добавлением одной или обеих граничных точек.***

Если рассмотреть произвольный степенной ряд в общем случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, быть может, и не существуют, т.е. признаки Даламбера и Коши неприменимы к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, нужны дополнительные исследования.

Основную роль в определении структуры области сходимости степенного ряда в общем случае играет следующая теорема Абеля, которая приводится без доказательства.

Лемма Абеля. 1) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при некотором значении $x=x_0\neq 0$, то он абсолютно сходится при любом значении x, для которого $|x|<|x_0|$.

2) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при некотором значении $x=x_0$, то он расходится при любом значении x, для которого на

основании этой леммы можно доказать теорему:

Теорема 3 (о структуре области сходимости степенного ряда). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет как отличные от нуля точки сходимости, так и точки расходимости, то существует такое число $R > 0$, что ряд абсолютно сходится при всех x из интервала $(-R; R)$, т.е. для которых $|x| < R$, и расходится при всех x, для которых $|x| > R$.

Основные свойства степенных рядов

1. Если $R-$ радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то этот ряд сходится равномерно на любом интервале $(-r; r)$, где $0 < r < R$.

2. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его промежутка сходимости.

3.Если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют одну и ту же сумму в некоторой окрестности точки $x = 0$, то они почленно совпадают, т.е. $a_n = b_n$ для всех n. Иными словами, разложение функции в степенной ряд единственно.

4. В любом промежутке $[0, r]$, $|r| < R$ степенной ряд можно почленно интегрировать:

$$\int\limits_0^r \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

5. Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать:

$$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

6. Из последнего свойства следует, что если степенной ряд сходится к функции $f(x)$, то эта функция имеет производные всех порядков, а коэффициенты этого ряда имеют вид

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), \ a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ldots$$

Иначе говоря, любой степенной ряд является рядом Тейлора той функции, к которой он сходится.

Итак, если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и сколько угодно раз дифференцируема в этой точке, то её рядом Тейлора называется степенной ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ldots$$

Разность

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-$$

$$-\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ldots$$

называется остаточным членом (порядка n).

Теорема 4. Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ сходился к функции $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Чтобы проверить выполнение условия $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ в предыдущей теореме, остаточный член обычно представляют в одной из двух удобных форм:

- в форме Лагранжа $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$
- и в форме Коши $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{(n+1)}$.

На основании теоремы 3 сформулируем теорему, которая дает простое достаточное условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции и может быть применима при разложении функции.

Теорема 5. Если все производные функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к ней, т.е. имеет место разложение:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций

Ограничимся частным случаем $x_0 = 0$, т.е. рядами Маклорена, которые чаще используются на практике. Имеют место следующие разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in R,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in R,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in R,$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1{,}1],$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots, \quad x \in (-1{,}1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad x \in [-1{,}1],$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1{,}1).$$

Образцы решения задач

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

Решение. Находим радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty}\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x=0$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n+3^n}+\ldots$$

Решение.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n+3^n}:\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\right|=3,\text{ т.к. }\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

Таким образом, $R=3$, ряд сходится абсолютно в интервале $(-3;3)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=3$ получаем числовой ряд

$$\frac{3}{2+3}+\frac{3^2}{2^2+3^2}+\frac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{3^n}{2^n+3^n}+\ldots$$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости рядов с положительными членами.

Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=1$, значит, ряд расходится. При $x=-3$ приходим к ряду $-\dfrac{3}{2+3}+\dfrac{3^2}{2^2+3^2}-\dfrac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n3^n}{2^n+3^n}+\ldots$, который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно получаем, областью сходимости будет промежуток $(-3;3)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^3}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{5^n}+\ldots$$

Решение. К этому ряду формула $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной x, т.е. $a_{2k}=0$, $k=1$, 2, 3,$\cdots$

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}:\frac{x^{2n-1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^n\cdot 5}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}.$$

Данный ряд сходится для $\frac{x^2}{5}<1$, или $x^2<5$, т.е. $|x|<\sqrt{5}$, следовательно, $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x=\pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3}\pm\ldots\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n}\pm\ldots,\text{т.е. } \sqrt{5}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots,$$

которые, очевидно, расходятся.

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n=\left(\frac{1+1}{4}\right)\cdot x+\left(\frac{2+1}{4\cdot 2}\right)^2\cdot x^2+\left(\frac{3+1}{4\cdot 3}\right)^3\cdot x^3+$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots$$

Решение. Находим радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot 4^n}{4^n\cdot n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=e\neq 0$, т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x=-4$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot(-4)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n 4^n}{4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$.

Пример 6. Найти радиус сходимости ряда

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Решение. К этому ряду неприменима формула для нахождения радиуса сходимости, так как отсутствуют нечетные степени переменной x, т.е. $a_{2k+1}=0, k=0,1,2,\ldots$ Применяем непосредственно признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^2\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$$

при любом *x*, т.е. ряд сходится на всей числовой прямой.

Замечание. Если степенной ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, то, как мы отмечали, подстановкой $x-x_0=z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n=a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\ldots+a_n z^n+\ldots,$$

интервалом сходимости которого будет $(-R;R)$, т.е. $|z|<R$ или $|x-x_0|<R$, или $-R<x-x_o<R$, или $x_0-R<x<x_0+R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ будет $(x_0-R;x_0+R)$.

Пример 7. Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{(x-3)}{2^3}+\frac{(x-3)^2}{3^3}+\frac{(x-3)^3}{4^3}+\ldots+\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}$$

Решение.

Здесь $x_0=3, a_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1+1)^3}=\dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3}:\frac{1}{(n+2)^3}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3=1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3|<1$, т.е. при $-1<x-3<1$, $2<x<4$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots,$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha=3$. При $x=2$ имеем $1-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}+\ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$. Следовательно, областью сходимости является отрезок $[2,4]$.

Пример 8. Найти $\operatorname{arctg}2$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,$$

областью сходимости которого является промежуток $(-1;1)$. Проинтегрируем ряд на отрезке $[0;x]$, $x\in(-1;1)$, получаем

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \int_0^x x^4\,dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n}\,dx + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Таким образом получим разложение функции в степенной ряд в промежутке $(-1;1]$. Отсюда, например, при $x = 2$ получаем

$$\operatorname{arctg} 2 = 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Пример 9. Вычислить число e, т.е. значение функции e^x при $x = 1$, с точностью до 0,001 (если известно, что $e < 3$).

Решение. Имеем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Тогда

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

причем абсолютная погрешность этого приближения равна

$h = |r_n(x)| = \dfrac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $|t| < |x|$. При $x = 1$ получаем

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

При этом $h = \dfrac{e^t}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \dfrac{e^t}{(n+1)!}$, где $0 < t < 1$,

но так как $e^t < e^1 < 3$, то $h < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Число n определим из равенства $\dfrac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$. Откуда $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, т.е. $(n+1)! > 3 \cdot 10^3 = 3000$. Если взять $n = 5$, то $(5+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 < 3000$.

Возьмем $n = 6$, $(6+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 > 3000$.

Следовательно,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx 2{,}718.$$

Пример 10. Вычислить $\cos 18^\circ$ с четырьмя верными знаками.

Решение. Имеем $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Так как угол 18° в радианах (с точностью до 10^{-5}) равен, $\frac{\pi 18^\circ}{180^\circ}\approx 0{,}31416$, то $\cos 18^\circ=1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots$

Для знакочередующихся рядов абсолютная погрешность при замене суммы ряда некоторой его частичной суммой не превышает модуля первого отброшенного члена. Поэтому вычисление слагаемых проводим до тех пор, пока слагаемое по модулю не станет меньше $0{,}0001$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{(0{,}31416)^6}{720}<0{,}0001$, значит, достаточно ограничиться тремя слагаемыми

$$\cos 18^\circ\approx 1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot 3\cdot 4}\approx 0{,}901709\ .$$

Пример 11. При изучении теории вероятности важную роль играет функция $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, называемая ***функцией Лапласа,*** или ***интегралом вероятностей***. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием нельзя, так как $\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ не выражается через элементарные функции.

Заменяя в разложении

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

x на $-\frac{x^2}{2}$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2^{2n} n!} + \ldots$$

Это разложение, как и разложение для e^x, имеет место на всей числовой оси, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2^{2n} n!} \right) dx =$$

$$= \int_0^x dx + \frac{1}{2} \int_0^x x^2\, dx + \frac{1}{2^4 \cdot 2!} \int_0^x x^4 dx - \frac{1}{2^6 3!} \int_0^x x^6 dx + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{24} \cdot n!} \int_0^x x^{2n} dx + \ldots = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^4 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{x^7}{2^6 \cdot 3! \cdot 7} + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2^{2n} n! (2n+1)} + \ldots$$

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^4 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{x^7}{2^6 \cdot 3! \cdot 7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2^{2n} n! (2n+1)} + \ldots \right),$$

сходящимся на всей числовой прямой оси. Вычислить значение функции $F(x)$ очень просто, так как ряд быстро сходится.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{1 - \cos 2x^2}{x} dx$ с погрешностью $h < 0{,}0001$, где при $x = 0$ значение подынтегральной функции принимается равным единице.

Решение. Из разложения для функции $\cos x$, заменяя x на $2x^2$, получаем

$$\cos 2x^2 = 1 - \frac{4x^4}{2!} + \frac{2^4 x^8}{4!} - \frac{2^6 x^{12}}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$1 - \cos 2x^2 = \frac{4x^4}{2!} - \frac{2^4 x^8}{4!} + \frac{2^6 x^{12}}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n}}{(2n)!} + \ldots$$

Делением обеих частей последнего равенства на x находим

$$\frac{1 - \cos 2x^2}{x} = \frac{4x^3}{2!} - \frac{2^4 x^7}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n-1}}{(2n)!} + \ldots$$

Это разложение, как и разложение для $\cos x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому можно почленно интегрировать:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{2!}dx - \int_0^1 \frac{2^4 x^7}{4!}dx + \ldots +$$

$$+\int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n-1}}{(2n)!}dx + \ldots = \frac{4\cdot x^4}{2!\cdot 4}\Big|_0^1 - \frac{2^4\cdot x^8}{4!\cdot 8}\Big|_0^1 + \frac{2^6\cdot x^{12}}{6!\cdot 12}\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{2^8 x^{16}}{8!\cdot 16} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} - \frac{1}{2520} + \ldots$$

Данный ряд является знакочередующимся, для которого остаток ряда по модулю не превосходит модуль первого члена остатка ряда. Таким образом, вычисления проводятся до тех пор, пока слагаемое по модулю не будет меньше 0,0001.

Так как $h = |r_n| = \left|-\frac{1}{2520}\right| < 0{,}0001$, то достаточно взять

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} \approx 0{,}1657.$$

Пример 13. Найти решение дифференциального уравнения $y' = xy^2 + 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Найдем приближенное решение данного уравнения. Для этого подставим вместо y его разложения в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Продифференцируем уравнение несколько раз подряд, рассматривая y как функцию от x:

$y'' = y^2 + 2xyy'$,

$y''' = 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$,

$y^{IV} = 4(y')^2 + 4yy'' + 2(y')^2 + 4xy'y'' + 2yy'' + 2xy'y'' + 2xyy''' =$

$= 6(y')^2 + 6yy'' + 2xyy''' + 6xy'y''$.

Подставляя во все уравнения и во все производные $x = 1$ и учитывая начальное условие $y(1) = 0$, последовательно найдем:

$y'(1)=1y^2(1)+1=1,\ y''(1)=y^2(1)+2\cdot1\cdot y(1)\cdot y'(1)=0^2+2\cdot0\cdot1=0,$

$y'''(1)=4y(1)y'(1)+2\cdot1\cdot(y'(1))^2+2\cdot1\cdot y(1)\cdot y''(1)=$

$=4\cdot0\cdot1+2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot0\cdot0=2,$

$y^{IV}(1)=6\cdot(y'(1))^6+6\cdot y(1)\cdot y''(1)+2\cdot1\cdot y(1)\cdot y'''(1)=$

$=6\cdot1+6\cdot0\cdot0+2\cdot1\cdot0\cdot2=6,\cdots\cdots$

Следовательно, искомое решение записывается в виде ряда Тейлора в точке $x_0=1$.

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots.$$

Полученный многочлен в окрестности точки $x=1$ дает как угодно хорошее приближенное выражение решения.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Даны степенные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x\text{-}1)^n}{3n-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n^2+1}}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$, д). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

Найти область его сходимости и интервал сходимости.

Задача 2. Используя дифференцирование и интегрирование степенных рядов, найти сумму и указать область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(x^2-3\right)^{n-1}$.

Задача 3. Используя табличные разложения, составить ряд Тейлора для функции $y=\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{4}\right)$ по степеням $x-4$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}dx$ с точностью 0,0001.

Задача 5. Найти первые 4 – 5 отличных от нуля членов в разложении функции $y(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$, если $y'=2x^4y,\ y(1)=\pi$.

Ответы

1. Область сходимости: а) $0 \le x < 2$, б) $-\infty < x < +\infty$, в) $-2 \le x < 2$, г) $-4 < x < 0$, д) $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$. 2. $-2 < x < \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} < x < 2$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2}\pi^{2n}(x\text{-}4)^{2n}}{2 \cdot 4^{2n}(2n)!}\left(1 + \frac{\pi(x\text{-}4)}{4(2n+1)}\right)$. 4. 0,4992.

5. $y(x) = \pi + \frac{2\pi}{1!}(x-1) + \frac{12\pi}{2!}(x-1)^2 + \frac{80\pi}{3!}(x-1)^3 + \ldots$.

§5. Ряды Фурье для функций с периодом 2π и 2ℓ

Теоретический материал

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 0,1,2\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad (n = 1,2\ldots).$$

Если ряд Фурье сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. $S(x+2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$, где x_0 – точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;

3) $S(x)=\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]$ на концах промежутка, т.е. при $x=\pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$.

В случае, когда $f(x)$ – нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nxdx,$$

где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$.

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π. В этом случае, если $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2ℓ, для которой выполняются на сегменте $[-\ell,\ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{\ell}x+b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx.$$

В случае, когда $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

где $a_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$.

В случае, когда $f(x)$ – нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{\ell},$$

где $b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx$.

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

Образцы решения задач

Пример 11. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ периода 2π, заданную на интервале $-\pi<x\le\pi$.

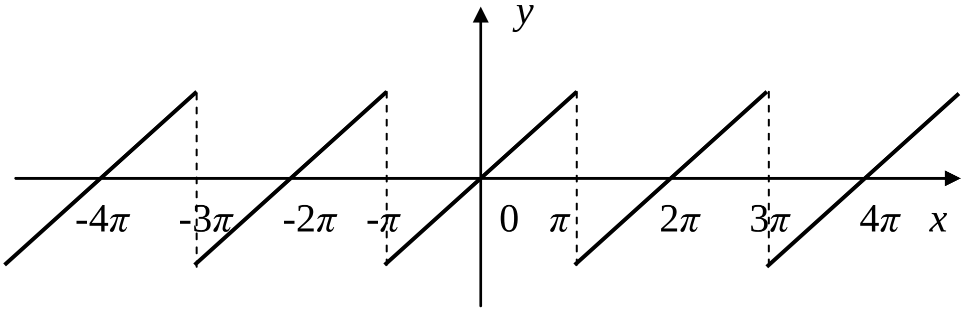


Рис.4.1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как функция нечетная, найдем коэффициенты Фурье

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям}\\ x=u,\ \sin nx dx=dv,\\ dx=dv,\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\left(\pi\frac{\cos\pi n}{n}\right)+0\cdot\frac{\cos 0}{n}+\frac{1}{n^2}\sin\ nx\Big|_0^{\pi}\right]=$$

$$=-\frac{2\cos\pi n}{\pi n}+\frac{2\sin\pi n-2\sin 0}{\pi n^2}=-\frac{2(-1)^n}{n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx+\ldots\right].$$

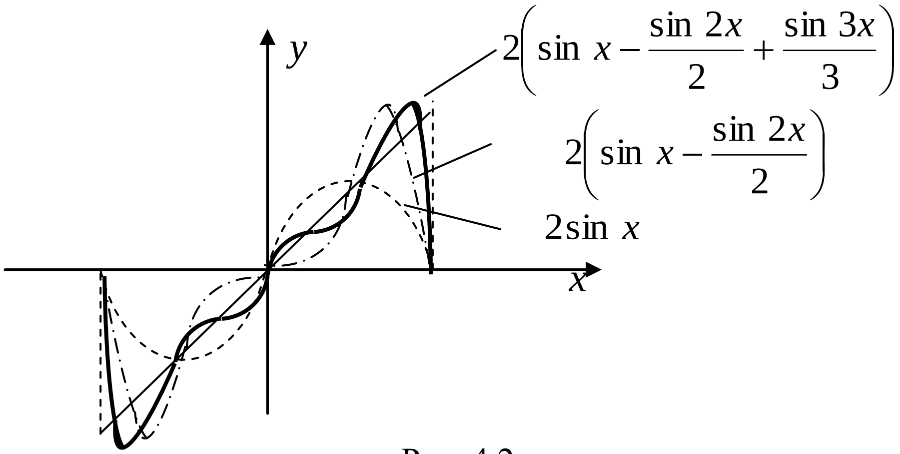


Рис. 4.2

Так как функция $f(x)=x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-n\pi$ и $n\pi$ сумма ряда равна нулю. На рис.4. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -\pi\le x\le 0,\ 2<x\le\pi;\\ 1,\quad 0<x<2;\\ \frac{1}{2},\quad x=0,\ x=2.\end{cases}$$

Решение. Построим график функции (рис. 4.3).

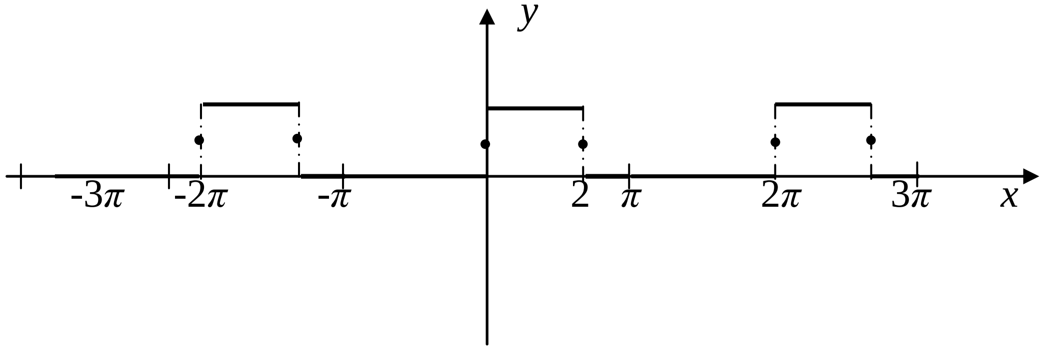


Рис. 4.3

Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Находим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^2 dx = \left.\frac{x}{\pi}\right|_0^2 = \frac{2}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^2 1\cdot\cos nx\,dx = \left.\frac{1}{\pi n}\sin nx\right|_0^2 = \frac{\sin 2n}{\pi n} - \frac{\sin 0}{\pi n} =$$

$$= \frac{\sin 2n}{\pi n},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^2 1\cdot\sin nx\,dx = \left.-\frac{1}{\pi n}\cos nx\right|_0^2 =$$

$$= -\frac{\cos 2n}{\pi n} - \frac{\cos 0}{\pi n} = \frac{1-\cos 2n}{\pi n}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2n}{\pi n}\cos nx + \frac{1-\cos 2n}{\pi n}\sin nx\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=1$, в интервалах $(-\pi,0)$ и $(2,\pi)$ $- S(x)=0$. В точке разрыва $x=0$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(0-0)+f(0+0)\right] = 1.$$

В точке разрыва $x=2$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right] = 1.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T=4$, заданную на интервале $(0;4)$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}6, & 0<x<2,\\ 3x, & 2<x<4.\end{cases}$$

Решение. Построим график функции (рис. 4.4).

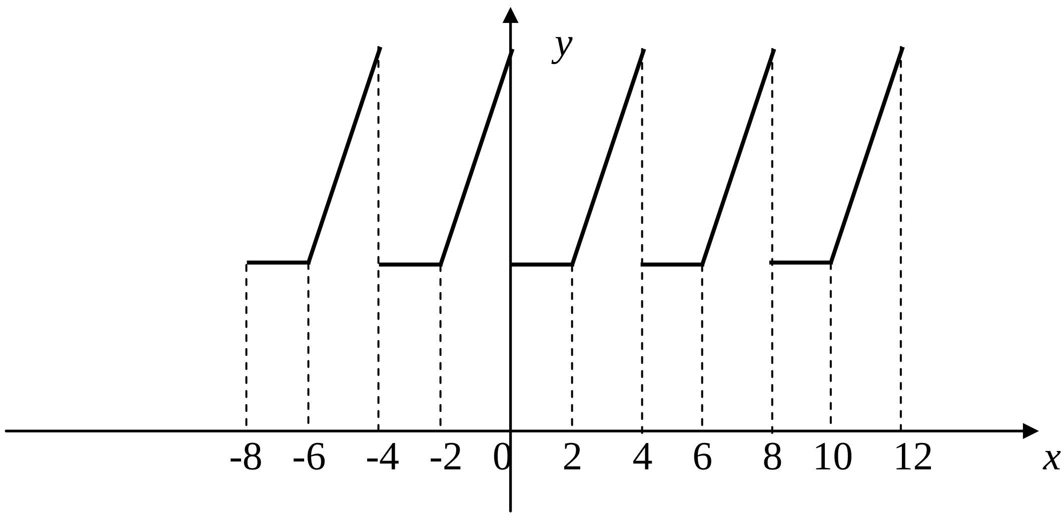


Рис. 4.4

Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье.

Пользуясь формулами разложения в ряд Фурье на сегменте $[-\ell,\ell]$, полагая $\ell=2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x=2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_2^4\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi).$$

При *n* – четном $\cos n\pi=1$ и $a_n=0$, при *n* – нечетном $\cos n\pi=-1$ и $a_n=\dfrac{12}{n^2\pi^2}$, при *n*=0

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Bigg|_2^4\right)=15.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\bigg|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\bigg|_2^4+\underbrace{\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}dx}_{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\text{n}\pi}\left[12(1-\cos \text{n}\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi\text{n}-4\cos\pi\text{n})\right]=$$

$$=\frac{1}{2\text{n}\pi}\left[12-\cancel{12\cos\text{n}\pi}+24+\cancel{12\cos\text{n}\pi}\right]=\frac{-12}{2\text{n}\pi}=-\frac{6}{\text{n}\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\dots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\dots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=6$, в интервале $(2,4)$ – $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right]=6.$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T=2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x)=|\,x\,|$ (рис. 4.5).

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Функция $f(x)$ – четная, полагая $\ell=1$, получим

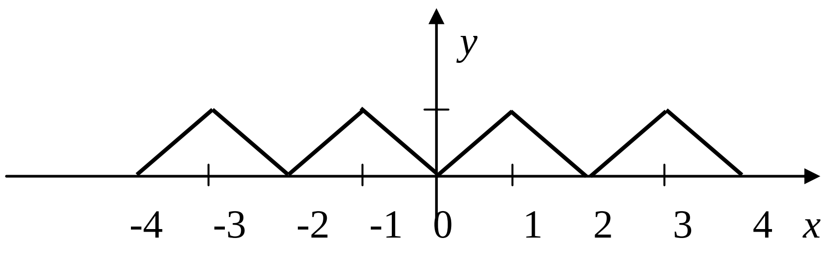


Рис. 4.5

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=1,$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные}, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0,\ 2\pi]$, формулой $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$, формулой $y = |\sin x|$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 2 - x & \text{при} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases} \qquad f(x+2)=f(x)$$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -3 < x \le 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x < 3. \end{cases} \qquad f(x+6)=f(x)$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$, $\quad f(x+10) = f(x)$.

Ответы

1. $f(x) = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{10}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{12} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\dfrac{\sin x}{1} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \ldots\right).$

2. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\ nx}{n}$.

3. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos\ 2x}{1\cdot 3}+\dfrac{\cos\ 4x}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{\cos\ 2kx}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\ldots\right]$.

4. $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\ nx$. 5. $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

6. $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\ \cos\dfrac{(2n-1)\ \pi x}{3}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\ \sin\dfrac{n\pi x}{3}$.

7. $f(x)=\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\dfrac{n\pi x}{5}}{n}$.

Расчетно-графическая работа №10

1. Исследовать сходимость следующих числовых рядов.

1.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2+3n}\right)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

1.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n n}{2^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3+5n}\right)^{4n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

1.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\dfrac{3n-1}{4n+5}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^7 n}{n}$.

1.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n+1}$.

1.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-1}{7n-2}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

1.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

1.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

1.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(6n+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^4(5n+2)}{(5n+2)}$.

1.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

1.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} n}}{1+n^2}$.

1.11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg} n\left(n^2+1\right)}$.

1.12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$.

1.13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n^2-1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot 3^{n^2}$.

1.14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100n^2}{n^2+100}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.

1.15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+2}{\sqrt{n}}$.

1.16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(n+1)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n}$.

1.17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+3}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{n}$.

1.18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

1.19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)+1}{(n+1)}$.

1.20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{4n^2+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^{2n}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+3}\right)^n\cdot 2^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

1.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

1.23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3n}{5n^2-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{(2n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{(n+1)}$.

1.25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.

2. Исследовать сходимость знакопеременных рядов. Если ряд сходится, то определить, сходится он абсолютно или условно**.**

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n\cdot n}{2n-1}$. 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n!}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$. 2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$. 2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$. 2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$. 2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+3n)}{5n+1}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{n!}$. 2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{n^2+6}}$. 2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2^n+n}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+8}$. 2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2+3^n}$. 2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{3n^2+1}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n+7}$. 2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{5^{n+1}+1}$. 2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{8n+7}}$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^4+1}$. 2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n+1}}{2^{n+1}+2}$. 2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$. 2.23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n+5}{5n-4}\right)^n$. 2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+7}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n-1}}$.

3. Исследовать сходимость следующих степенных рядов. Найти их области сходимости.

3.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^{2n}}$. 3.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3n}2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2 2^n}$.

3.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{2n}n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot n!}$. 3.4.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{n}^n x^n}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot(n+5)^n}$.

3.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n}{n^2+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n}$. 3.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^3+8}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+2)^n}$.

3.7.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$. 3.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{2n}\sqrt{n^2+1}}$.

3.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^2\sqrt{n+5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{(n+1)^{2n}}$. 3.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n}\right)^n x^n$.

3.11.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!\cdot x^n}{2^n}$. 3.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^n x^n$.

3.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{(n^2+2)^n}$. 3.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n}$.

3.15.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+9}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{3^n}$. 3.16.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+9}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n 5^n}$.

3.17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$. 3.18.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^n}{4^n}$.

3.19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n}$. 3.20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n^2+1)^n}$.

3.21.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{(n+1)!}$. 3.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n}\right)^n x^n$.

3.23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{2^n}$. 3.24.а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n+1}$.

4. Вычислить определенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд. Обеспечить абсолютную погрешность $h < 0{,}001$:

4.1. $\int_0^{0,1} e^{-5x^2} dx.$

4.2. $\int_0^{0,1} \frac{\sin 10x^2}{x} dx.$

4.3. $\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} dx.$

4.4. $\int_0^{0,2} \frac{e^{-5x^2} - 1}{x} dx.$

4.5. $\int_0^{0,9} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right)}{x} dx.$

4.6. $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx.$

4.7. $\int_0^{0,4} \sin 3x^2 \, dx.$

4.8. $\int_0^{1/2} \cos 5x^3 \, dx.$

4.9. $\int_0^{0,1} \frac{e^{-2x} - 1}{x} dx.$

4.10. $\int_0^{0,6} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{6}\right)}{x} dx$

4.11. $\int_0^{3} e^{-\frac{x^2}{90}} dx.$

4.12. $\int_0^{1/2} \sin \frac{x^2}{2} dx.$

4.13. $\int_0^{0,1} \cos 5x^2 \, dx$

4.14. $\int_0^{0,3} e^{-3x^2} dx.$

4.15. $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2} - 1}{10x} dx.$

4.16. $\int_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{5}} dx.$

4.17. $\int_0^{0,4} \frac{1 - \cos 7x^2}{x^2} dx$

4.18. $\int_0^{0,2} \sin \frac{x^4}{4} dx.$

4.19. $\int_0^{1/2} \cos\left(\frac{x}{5}\right)^2 dx.$

4.20. $\int_0^{0,2} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} dx$

4.21. $\int_0^{0,1} \frac{e^{-5x^2} - 1}{x^2} dx.$

4.22. $\int_0^{1/2} x^2 \cos x^4 \, dx$

4.23. $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^3} - 1}{x^2} dx.$

4.24. $\int_0^{1/2} \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} dx.$

4.25. $\int_0^{1/2} \frac{e^{-2x^2} - 1}{x^2} dx.$

5. Найти первые три числа разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с заданными условиями.

5.1. $y'' = yy' - x^2ё;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

5.2. $y' = x^2 y^2 - 1, y(0) = 1.$

5.3. $y' = e^y + xy, y(0) = 0.$

5.4. $y' = 2xy, y(1) = 1.$

5.5. $y' = -\dfrac{y}{x}, y(2) = 2.$

5.6. $y' = \cos x + y^2, y(0) = 1.$

5.7. $y' = e^x + y^2, y(0) = 0.$

5.8. $y'' = y^2 - x^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

5.9. $y'' = yy' + x^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

5.10. $y' = y + y^2, y(0) = 3.$

5.11. $y' = 2e^y - xy, y(0) = 0.$

5.12. $y' = \sin x + y^2, y(0) = 1.$

5.13. $y' = e^x + y, y(0) = 4.$

5.14. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 2.$

5.15. $y' = \sin x + 0{,}5y^2, y(0) = 1.$

5.16. $y' = 2e^y + xy, y(0) = 0.$

5.17. $y' = x + x^2 + y^2\ y(0) = 5.$

5.18. $y'' = yy' - x^2;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

5.19. $y'' + xy^2 = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

5.20. $y' = e^{2x} + y, y(1) = 1.$

5.21. $y'' - \sin x + \cos y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

5.22. $y'' + xy + e^x = 0;\ y(1) = 0,\ y'(0) = 1.$

5.23. $y'' = e^{3x} + y^2;\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0.$

5.24. $y' = e^{2x} + y, y(1) = 1.$

5.25. $y'' = xy^2 + x^2;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

6. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\ell;\ell)$.

6.1. $y = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ -x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.2. $y = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ x+8, & 1 \le x < 2. \end{cases}$

6.3. $y = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, \\ x-3, & 1 \le x < 3. \end{cases}$

6.4. $y = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.5. $y = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 2, \\ 6, & 2 \le x < 3. \end{cases}$

6.6. $y = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ x + 4, & 1 \le x < 5. \end{cases}$

6.7. $y = \begin{cases} 2x, & -\pi < x < 0, \\ -x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.8. $y = \begin{cases} 4, & 0 < x < 5, \\ 4x\text{-}7, & 5 \le x < 6. \end{cases}$

6.9. $y = \begin{cases} 9, & 0 < x < 4, \\ 9\text{-}x, & 4 \le x < 8. \end{cases}$

6.10. $y = \begin{cases} 4, & 0 \le x < 2, \\ x - 1, & 2 \le x < \pi. \end{cases}$

6.11. $y = \begin{cases} 7, & 0 < x < 1, \\ 1\text{-}x, & 1 \le x < 3. \end{cases}$

6.12. $y = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ -5, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.13. $y = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.14. $y = \begin{cases} 25, & 0 < x < 2, \\ x - 5, & 2 \le x < 3. \end{cases}$

6.15. $y = \begin{cases} 5x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 3. \end{cases}$

6.16. $y = \begin{cases} 7, & 0 < x < 1, \\ 1\text{-}x, & 1 \le x < 3. \end{cases}$

6.17. $y = \begin{cases} 2, & 0 < x < 10, \\ -x, & 10 \le x < 12. \end{cases}$

6.18. $y = \begin{cases} 9, & 0 < x < 4, \\ 3x, & 4 \le x < 8. \end{cases}$

6.19. $y = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0, \\ 3, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.20. $y = \begin{cases} 2 + x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 3. \end{cases}$

6.21. $y = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 2x, & \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$

6.22. $y = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ -1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6.23. $y = \begin{cases} 1, & 0 < x < 3, \\ x\text{-}8, & 3 \le x < 5. \end{cases}$

6.24. $y = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2, \\ 1\text{-}x, & 2 \le x < 3. \end{cases}$

6.25. $y = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ -4, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ