3. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Системой материальных точек (*механической системой*) называется система, в которой положение и перемещение каждой ее точки зависит от положения и перемещения остальных точек системы.

Центром масс механической системы, состоящей из n материальных точек, называется геометрическая точка C, радиус-вектор которой

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_i\vec{r}_i}{m_1 + m_1 + \ldots + m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m},$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – масса всей системы (приведенная масса); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор точки механической системы.

Моментом инерции J_y механической системы, состоящей из n материальных точек, относительно некоторой оси Oy называется сумма произведений масс m_i точек системы на квадраты расстояний l_i от этих точек до оси Oy:

$$J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2 .$$

Момент инерции механической системы является мерой ее инертности при ее вращательном движении.

Теорема (Гюйгенса–Штейнера). *Момент инерции J_y твердого тела (механической системы) относительно некоторой оси Oy (рис. 3.1) равен моменту инерции J_{y_1} тела относительно параллельной оси Cy_1, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния d между осями:*

$$J_y = J_{y_1} + md^2,$$

где C – центр масс тела.

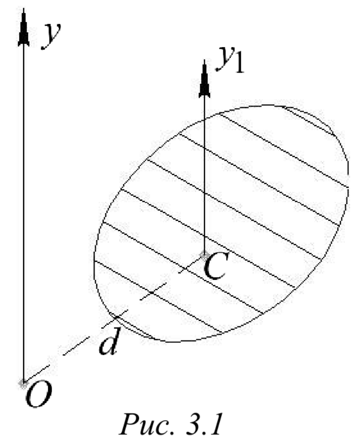

Рис. 3.1

Все силы, действующие на точки механической системы, разделяют на *внешние* $\vec{F}_i^E$ и *внутренние* $\vec{F}_i^J$; внешними силами $\vec{F}_i^E$ называют силы, действующие на точки механической системы со стороны точек, не входящих в эту систему; внутренними $\vec{F}_i^J$ – силы взаимодействия между точками системы.

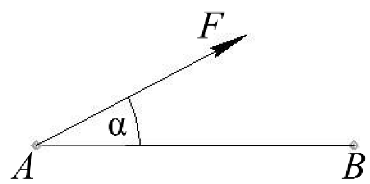

Рис. 3.2

Работа силы A – это скалярная физическая величина, равная произведению вектора силы на перемещение, пройденное точкой приложения силы.

Если некоторая точка под действием постоянной силы $\vec{F}$ перемещается по прямой из положения A в положение B (рис. 3.2), тогда:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB\cos\left[\vec{F} \,\hat{;}\, \overrightarrow{AB}\right] = F \cdot AB\cos\alpha .$$

Примеры работ, совершаемых некоторыми силами.

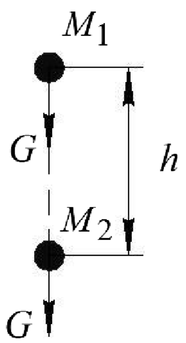

Рис. 3.3

1. Если тело массы m падает вертикально вниз под действием силы тяжести $\vec{G}$ из положения M_1 в положение M_2 (рис. 3.3), тогда работа силы на конечном участке пути:

$$A_G = \vec{G} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = G \cdot M_1M_2 = mgh ,$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли; h – вертикальное перемещение точки приложения силы.

При подъеме тела значение работы силы тяжести $\vec{G}$ будет отрицательным.

2. Если тело массы m совершает перемещение S по негладкой наклонной поверхности (рис. 3.4), тогда работа силы сухого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ на этом перемещении определяется как

$$A_{F\,\text{тр}} = \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{S} = -\mu mg\cos\alpha \cdot S ,$$

где μ – коэффициент трения скольжения тела о поверхность.

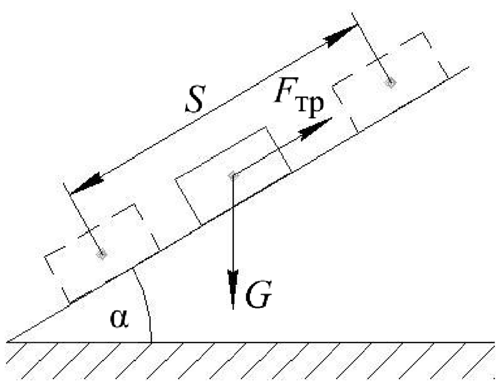

Рис. 3.4

3. Если тело жестко связано с пружиной, другой конец которой закреплен неподвижно, тогда при деформации пружины на расстояние x в ней возникают силы упругости и на

тело, вызывающее растяжение, действует реакция пружины. Работа силы упругости на перемещении тела x (на расстоянии равном полной деформации пружины) определяется как

$$A_{F\,\text{упр}} = -\frac{cx^2}{2},$$

где c – коэффициент упругости пружины (жесткость пружины).

4. Если под действием некоторой силы, приложенной к центру C круглого тела массы m, оно катится по горизонтальной плоскости без скольжения, то две взаимно уравновешивающиеся силы образуют пару сил $\vec{G}$ и $\vec{N}$, препятствующую качению тела (рис. 3.5).

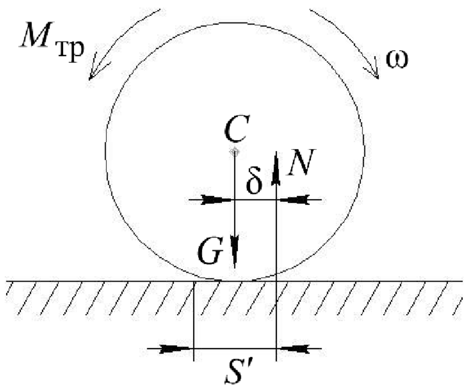

Рис. 3.5

Момент этой пары сил называется моментом трения качения $\vec{M}_{\text{тр}}$, величина которого определяется как

$$M_{\text{тр}} = \delta N,$$

где δ – коэффициент трения качения (половина пятна контакта S', которое возникает из-за неабсолютной твердости тела и плоскости); $\vec{N}$ – реакция плоскости на тело.

Работа момента трения качения $A_{M\,\text{тр}}$ определяется как произведение величины момента $M_{\text{тр}}$ на угол поворота φ круглого тела:

$$A_{M\,\text{тр}} = M_{\text{тр}}\varphi = -\delta mg\varphi$$

или

$$A_{M\,\text{тр}} = M_{\text{тр}}\varphi = -\delta mg\frac{S_C}{R},$$

где S_C – перемещение центра круглого тела радиуса R.

Кинетическая энергия T механической системы определяется как алгебраическая сумма кинетических энергий T_i всех входящих в эту систему n материальных точек:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2,$$

где m_i – масса точки системы; v_i – скорость точки системы.

Теорема Кенига. *Кинетическая энергия T механической системы в общем случае ее движения равна сумме кинетической энергии* $T_c = \frac{mv_c^2}{2}$ *ее центра масс, масса которого* m_c *равна массе всей системы m и кинетической энергии* $T_{\text{отн}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{i[c]}^2$ *этой системы в ее относительном движении относительно центра масс:*

$$T = T_c + T_{\text{отн}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{i[c]}^2,$$

где v_c – скорость центра масс C механической системы; $v_{i[c]}$ – скорость точки системы относительно ее центра масс C.

Кинетическая энергия твердого тела при различных видах его движения.

1. При поступательном движении твердого тела его кинетическая энергия $T_{\text{пост}}$ вычисляется как кинетическая энергия любой его точки, масса которой равна массе m всего тела:

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}mv_i^2,$$

где v_i – скорость любой точки тела.

2. При вращательном движении твердого тела его кинетическая энергия $T_{\text{вр}}$ определяется половиной произведения момента инерции тела J_x относительно оси вращения x на квадрат угловой скорости ω_x вращения тела относительно той же оси:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}J_x\omega_x^2.$$

3. При плоском движении твердого тела его кинетическая энергия $T_{\text{пл}}$ определяется как сумма кинетической энергии поступательного движения тела массы m и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости движения, т .е.

$$T_{\text{пл}} = T_c + T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

где v_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения; ω – угловая скорость вращения тела при его плоском движении.

Теорема. *Изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних* ΣA_i^E *и внутренних* ΣA_i^J *сил, действующих на точки системы на этом же перемещении:*

$$T - T_0 = \Sigma A_i^E + \Sigma A_i^J,$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил и моментов сил, действующих на элементы системы на ее перемещении из начального положения в конечное; ΣA_i^J – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Задача 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Условие задачи

Механическая система, состоящая из абсолютно твердых тел, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя с недеформированной невесомой пружиной; начальное положение системы показано на рис. 3.6. Учитывая силу сухого трения, упругую силу и момент сопротивления качению определить скорость v_1 тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S_1. Другими силами сопротивления пренебречь.

Один из блоков механической системы считать состоящим из двух, жестко соединенных между собой тонких однородных дисков одинаковой толщины и плотности. Второй блок считать однородным тонким диском с одним из вариантов конфигурации, показанной на рис. 3.7.

Нити, соединяющие элементы механической системы, считать нерастяжимыми, невесомыми и параллельными соответствующим плоскостям.

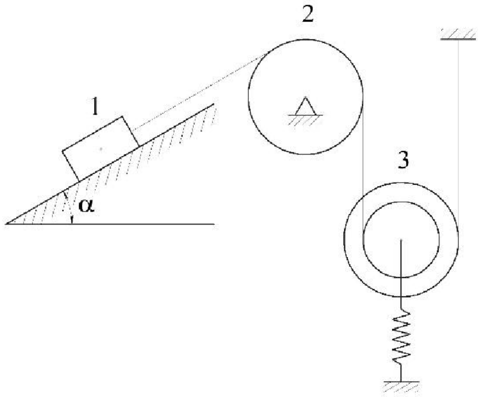

Схема 1

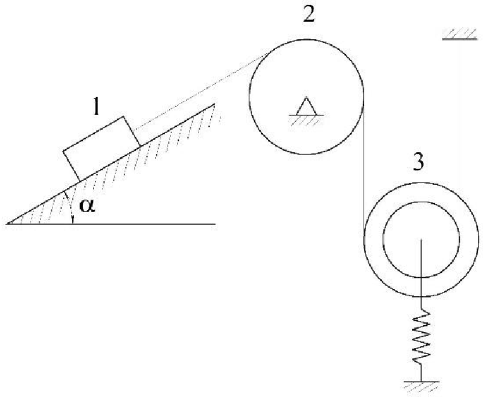

Схема 2

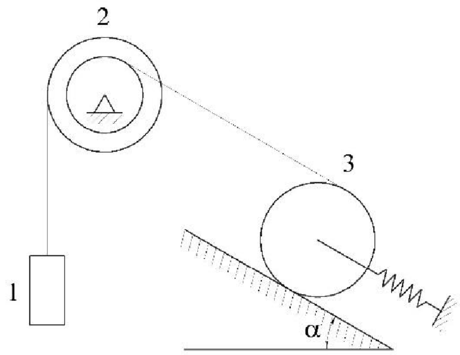

Схема 3

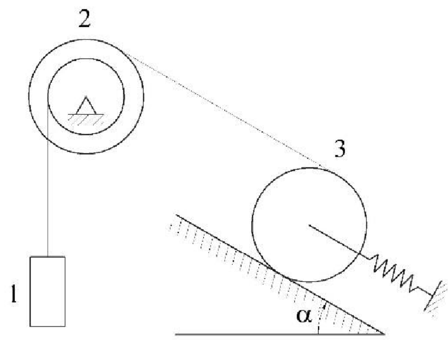

Схема 4

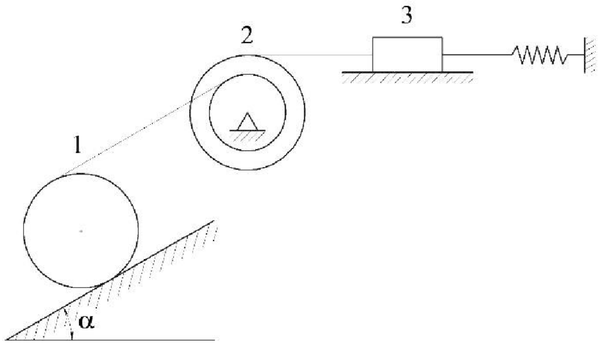

Схема 5

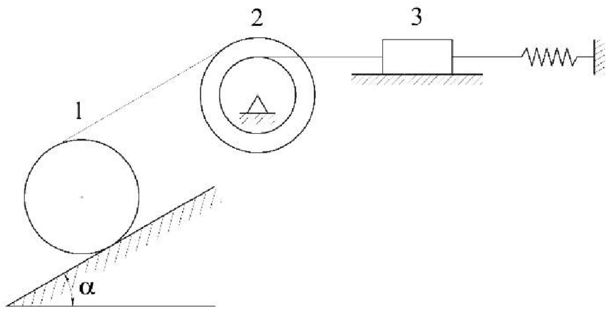

Схема 6

Рис. 3.6

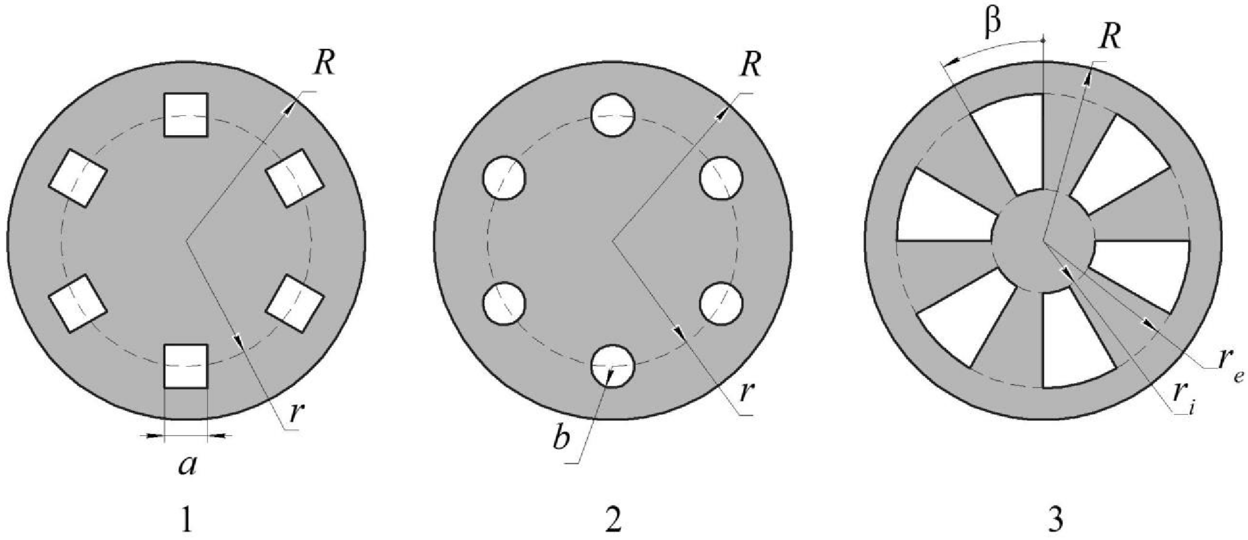

Рис. 3.7

Исходные данные для выполнения задачи приведены в табл. 3.1 и 3.2.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел 1, 2 и 3; R_1, R_2, R_3 – радиусы больших окружностей тел 1, 2 и 3; r_1, r_2, r_3 – радиусы малых окружностей тел 1, 2 и 3, либо радиусы, на которых по концентрической сетке расположены геометрические центры отверстий заданной формы в соответствии с конфигурациями дисков (рис. 3.7); r_e, r_i – радиусы внешней и внутренней окружностей, ограничивающих вырезанные в диске секторы (для вариантов с конфигурацией диска 3, рис. 3.7); n – количество элементов, вырезанных в диске; a – длина стороны квадратного отверстия; b – радиус круглого отверстия; β – угол между боковыми сторонами сектора (для вариантов с конфигурацией диска 3, рис. 3.7); α – угол наклона плоскости к горизонту; μ – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения; c – коэффициент упругости пружины.

3.2. Порядок решения задачи

1. В соответствии с вариантом выбрать схему механической системы (см. рис. 3.6) и конфигурацию диска (см. рис. 3.7).
2. Представить в виде таблицы исходные данные для решения задачи, руководствуясь содержимым табл. 3.1 и табл. 3.2.
3. Изобразить механическую систему в конечном ее положении (т. е. после прохождения телом 1 пути S_1).

Таблица 3.1

Вар.	Схема	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	α, °	μ	δ, м	c, Н/м	S_1, м
1	1	49,5	18,5	14,5	50	0,25	—	58	5,0
2	2	34,0	20,0	29,0	70	0,13	—	75	9,0
3	3	9,0	26,5	13,0	25	—	1,3	142	3,5
4	4	37,0	12,5	16,5	75	—	0,5	54	3,0
5	5	47,5	42,5	25,5	40	0,08	0,2	39	2,0
6	6	34,0	46,0	28,5	60	0,19	0,9	73	9,0
7	1	34,5	35,0	24,0	50	0,14	—	71	4,5
8	2	49,0	16,0	14,5	65	0,04	—	271	3,0
9	3	25,5	40,0	17,0	35	—	3,1	63	7,5
10	4	25,5	25,5	6,5	50	—	2,2	224	2,5
11	5	38,5	14,0	14,0	50	0,28	2,4	15	1,5
12	6	16,5	36,5	5,5	70	0,29	0,3	479	4,0
13	1	38,0	1,5	21,5	65	0,07	—	86	4,5
14	2	22,0	4,5	5,0	70	0,08	—	254	8,5
15	3	28,0	33,5	17,0	55	—	0,6	332	5,0
16	4	49,0	9,5	25,5	55	—	0,7	59	4,0
17	5	40,0	42,0	24,5	65	0,08	1,9	12	2,5
18	6	29,5	36,5	29,5	60	0,23	1,1	21	8,5
19	1	34,5	13,0	23,0	50	0,21	—	105	3,5
20	2	33,5	38,5	22,0	20	0,11	—	731	2,5
21	3	42,0	12,5	29,5	35	—	1,9	877	5,5
22	4	48,5	35,5	7,5	65	—	0,4	21	6,5
23	5	46,0	44,5	16,0	60	0,18	1,7	11	7,5
24	6	24,0	13,5	15,0	40	0,21	1,1	960	8,5
25	1	47,0	40,5	15,5	60	0,26	—	314	3,5
26	2	28,0	41,5	4,5	60	0,18	—	284	9,0
27	3	29,0	36,5	23,0	65	—	0,5	161	3,0
28	4	46,5	46,0	23,5	55	—	0,3	83	3,0
29	5	44,5	47,5	3,5	55	0,06	0,9	33	1,5
30	6	25,5	9,0	29,0	55	0,01	0,2	347	3,5

Таблица 3.2

Вар.	Диск	R_1, м	R_2, м	R_3, м	r_1, м	r_2, м	r_3, м	r_i, м	r_e, м	a, м	b, м	β, °	n
1	1	—	12,5	11,0	—	5,0	3,5	—	—	5,0	—	—	3
2	2	—	6,0	20,0	—	2,5	19,5	—	—	—	1,5	—	3
3	3	—	25,0	43,5	—	23,0	—	4,5	28,5	—	—	15	20
4	2	—	9,5	9,0	—	6,0	3,5	—	—	—	2,0	—	3
5	3	5,5	8,0	—	—	7,5	—	2,0	4,0	—	—	20	17
6	1	9,0	27,5	—	4,0	8,0	—	—	—	4,0	—	—	3
7	3	—	42,5	29,0	—	—	28,0	6,5	40,0	—	—	35	7
8	1	—	8,5	18,5	—	3,5	11,5	—	—	4,0	—	—	3
9	2	—	19,5	34,0	—	7,0	14,5	—	—	—	7,5	—	3
10	1	—	6,5	26,5	—	4,5	12,5	—	—	12,5	—	—	3
11	2	29,0	13,5	—	12,5	10,5	—	—	—	—	6,5	—	3
12	3	18,0	28,5	—	—	5,5	—	7,5	14,5	—	—	20	16
13	2	—	10,5	18,5	—	4,5	11,0	—	—	—	2,5	—	3
14	3	—	9,0	5,0	—	—	2,5	2,5	7,0	—	—	15	16
15	1	—	8,0	9,0	—	6,5	4,0	—	—	4,0	—	—	3
16	3	—	27,5	9,5	—	16,0	—	3,0	6,0	—	—	15	17
17	1	20,0	9,0	—	9,5	7,5	—	—	—	8,5	—	—	3
18	2	12,0	16,5	—	4,5	2,0	—	—	—	—	2,5	—	3
19	1	—	36,5	29,0	—	17,0	23,0	—	—	17,5	—	—	3
20	2	—	19,0	28,0	—	8,5	6,0	—	—	—	4,5	—	3
21	3	—	16,0	46,0	—	9,5	—	1,5	30,5	—	—	20	15
22	2	—	17,5	10,5	—	16,0	5,0	—	—	—	2,5	—	3
23	3	46,5	24,5	—	—	23,5	—	6,5	33,0	—	—	10	20
24	1	14,0	19,5	—	6,5	1,5	—	—	—	6,5	—	—	3
25	3	—	44,5	7,5	—	—	4,0	8,0	26,0	—	—	50	4
26	1	—	19,5	10,0	—	7,0	2,0	—	—	7,5	—	—	3
27	2	—	28,5	6,0	—	10,5	2,5	—	—	—	1,5	—	3
28	1	—	18,5	15,5	—	13,5	5,5	—	—	6,0	—	—	3
29	2	12,5	16,0	—	5,5	14,5	—	—	—	—	3,0	—	3
30	3	6,0	26,0	—	—	3,5	—	4,0	5,5	—	—	35	8

4. Показать на рисунке с механической системой кинематические характеристики всех ее элементов (линейные и угловые скорости).
5. Показать на рисунке с механической системой внешние силы и моменты сил, действующие на ее элементы.
6. Определить значения кинетических энергий T_1, T_2 и T_3 элементов механической системы в ее конечном положении; представить полученные выражения через скорость v_1 тела 1. Определить кинетическую энергию T механической системы в ее конечном положении как алгебраическую сумму кинетических энергий ее элементов.
7. Определить работы A_1, A_2 и A_3 внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на ее конечном перемещении; представить полученные выражения через путь S_1 тела 1. Определить суммарную работу ΣA_i^E внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на конечном перемещении.
8. Используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы, выразить скорость v_1 тела 1 через пройденный им путь S_1 и определить численное значение этой скорости.
9. Записать ответ.

3.3. Пример решения задачи

Условие задачи. Механическая система, состоящая из абсолютно твердых тел, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя с недеформированной невесомой пружиной; начальное положение системы показано на рис. 3.8. Учитывая силу сухого трения, упругую силу и момент сопротивления качению, определить скорость v_1 тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S_1. Другими силами сопротивления пренебречь.

Неподвижный блок 2 считать состоящим из двух, жестко соединенных между собой тонких однородных дисков одинаковой толщины и плотности. Подвижный блок 3 считать однородным тонким диском с конфигурацией, показанной на рис. 3.9.

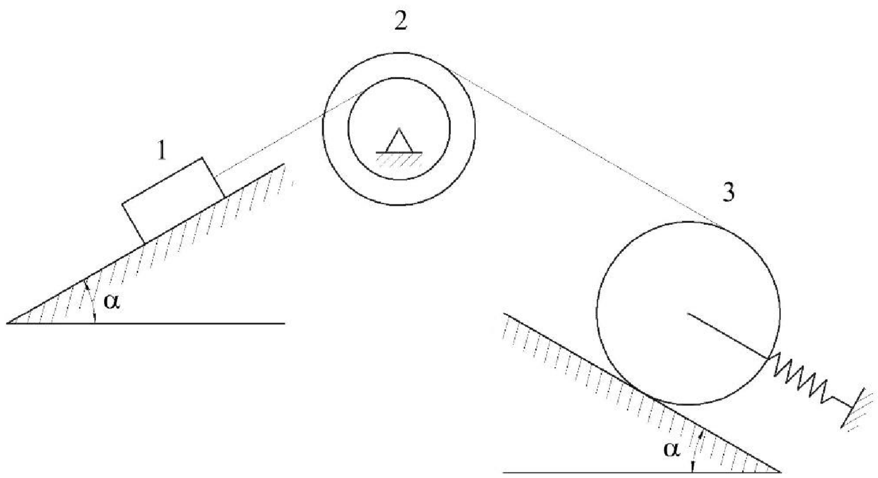

Рис. 3.8

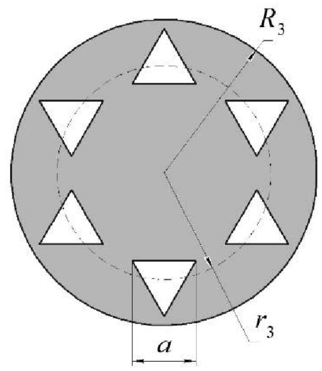

Рис. 3.9

Нити, соединяющие элементы механической системы, считать нерастяжимыми, невесомыми и параллельными соответствующим плоскостям.

Исходные данные для выполнения задачи приведены в табл. 3.3.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел 1, 2 и 3; R_2, R_3 – радиусы больших окружностей тел 2 и 3; r_2 – радиус малой окружности тела 2; r_3 – радиус, на котором по концентрической сетке расположены геометрические центры отверстий в форме правильных треугольников с длиной стороны a (рис. 3.9); n – количество элементов, вырезанных в диске; α – угол наклона плоскости к горизонту; μ – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения; c – коэффициент упругости пружины.

Таблица 3.3

m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	μ	δ, м	c, Н/м	α, °	n	a, м	S_1, м
16	7	12	3	2	3,6	1,5	0,14	0,06	2,5	30	6	1,5	5

Решение.

1. Изобразим на рисунке механическую систему в конечном ее положении (рис. 3.10), покажем кинематические характеристики всех ее элементов после прохождения телом 1 пути S_1, а также обозначим внешние силы и моменты сил, действующие на систему на данном участке пути.

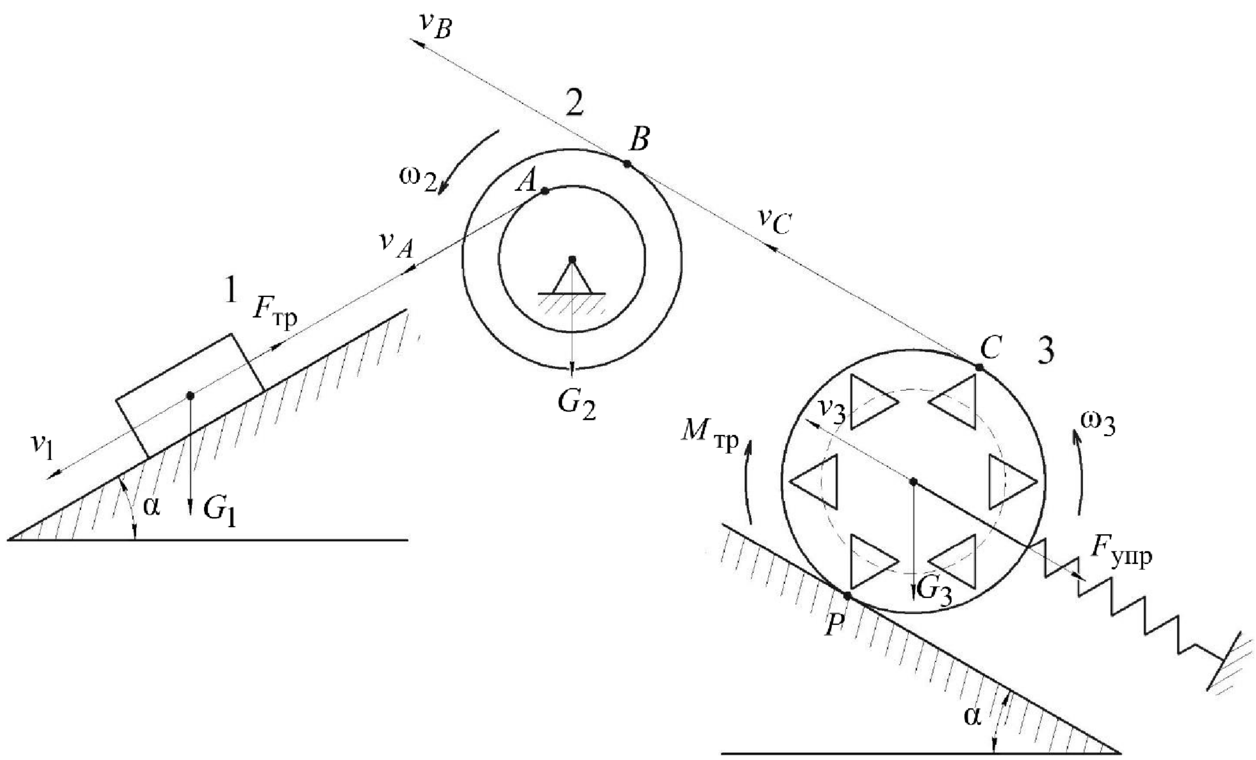

Рис. 3.10

2. Для определения значения скорости v_1 тела 1 применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \Sigma A_i^E + \Sigma A_i^J, \tag{3.1}$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил и моментов сил, действующих на элементы системы на ее перемещении из начального положения в конечное; ΣA_i^J – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Поскольку система приходит в движение из состояния покоя, то $T_0 = 0$. Для механической системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями,

$$\Sigma A_i^J = 0.$$

Следовательно, (3.1) принимает вид

$$T = \Sigma A_i^E. \tag{3.2}$$

3. Определим кинетическую энергию механической системы в ее конечном положении и представим полученное выражение через скорость v_1 тела 1.

Кинетическая энергия T механической системы определяется как алгебраическая сумма кинетических энергий всех входящих в эту систему элементов:

$$T = \Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3, \tag{3.3}$$

где T_1, T_2 и T_3 – значения кинетических энергий тел 1, 2 и 3.

Кинетическая энергия T_1 тела 1, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 8v_1^2. \tag{3.4}$$

Кинетическая энергия T_2 тела 2, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости рисунка, и проходящей через центр масс тела:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}, \tag{3.5}$$

где J_2 – момент инерции тела 2 относительно оси его вращения; ω_2 – угловая скорость вращения тела 2.

Поскольку тело 2 является блоком, состоящим из двух, жестко соединенных между собой тонких однородных дисков одинаковой толщины и плотности, момент инерции

$$J_2 = J_{21} + J_{22}, \tag{3.6}$$

где $J_{21} = \dfrac{m_{21} r_2^2}{2}$ и $J_{22} = \dfrac{m_{22} R_2^2}{2}$ – моменты инерции малого и большого однородных тонких дисков, образующих тело 2.

При этом

$$m_2 = m_{21} + m_{22}, \tag{3.7}$$

где m_{21} и m_{22} – массы этих дисков.

Определим значения m_{21} и m_{22}, руководствуясь тем, что диски имеют одинаковую толщину h и изготовлены из одного и того же материала с плотностью ρ. Тогда:

$$\begin{cases} m_{21} = \rho h \pi r_2^2 \\ m_{22} = \rho h \pi R_2^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_{21}}{m_{22}} = \frac{r_2^2}{R_2^2}. \tag{3.8}$$

Из уравнений (3.7) и (3.8) получим:

$$\begin{cases} m_{21} + m_{22} = 7 \\ \dfrac{m_{21}}{m_{22}} = \dfrac{2^2}{3^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{21} + m_{22} = 7 \\ \dfrac{m_{21}}{m_{22}} = 0{,}44 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}44 m_{22} + m_{22} = 1{,}44 m_{22} = 7 \Rightarrow \begin{cases} m_{21} = 2{,}14\,\text{кг}; \\ m_{22} = 4{,}86\,\text{кг}. \end{cases}$$

Определим момент инерции J_2 тела 2 по (3.6):

$$J_2 = J_{21} + J_{22} = \frac{m_{21} r_2^2}{2} + \frac{m_{22} R_2^2}{2} = \frac{2{,}14 \cdot 2^2}{2} + \frac{4{,}86 \cdot 3^2}{2} = 26{,}15 \ \ \text{кг} \cdot \text{м}^2. \qquad (3.9)$$

Угловую скорость ω_2 тела 2 представим через линейную скорость v_1 тела 1. Линейная скорость v_A точки A, лежащей на ободе малого диска тела 2, алгебраически равна скорости v_1 тела 1 (см. рис. 3.10), следовательно по формуле Эйлера:

$$\begin{cases} \omega_2 = \dfrac{v_A}{r_2} \\ v_A = v_1 \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{v_1}{2}. \qquad (3.10)$$

Подставим (3.9) и (3.10) в (3.5) и получим значение кинетической энергии T_2 тела 2 через скорость v_1 тела 1:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 26{,}15 \cdot \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 \Rightarrow T_2 = 3{,}27 v_1^2. \qquad (3.11)$$

Кинетическая энергия T_3 тела 3, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}, \qquad (3.12)$$

где v_3 – скорость центра масс тела 3; J_3 – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости его движения; ω_3 – угловая скорость вращения тела 3.

Поскольку тело 3 является однородным тонким диском с конфигурацией, показанной на рис. 3.9, момент инерции

$$J_3 = J_{\text{O}} - 6 J_{\Delta}, \qquad (3.13)$$

где $J_O = \frac{m_O R_3^2}{2}$ – момент инерции однородного тонкого диска радиуса R_3 относительно оси, проходящей через центр масс тела 3 перпендикулярно плоскости его движения; J_Δ – момент инерции вырезанного в теле 3 элемента (треугольной пластины) относительно оси, проходящей через центр масс тела 3 перпендикулярно плоскости его движения; при этом, учитывая, что $J_{\Delta C} = \frac{m_\Delta a^2}{12}$ – момент инерции треугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс пластины, перпендикулярной ее плоскости, и используя теорему Гюйгенса–Штейнера, получим:

$$J_\Delta = \frac{m_\Delta a^2}{12} + m_\Delta r_3^2.$$

Видно, что для определения моментов инерции J_O и J_Δ, необходимо определить массу m_O тела 3 без вырезанных элементов (массу сплошного диска) и массу m_Δ одного вырезанного элемента (треугольной пластины).

Масса m_3 тела 3 (см. рис. 3.9):

$$m_3 = m_O - 6m_\Delta. \tag{3.14}$$

Определим значения m_O и m_Δ, руководствуясь тем, что диск и треугольная пластина имеют одинаковую толщину h и изготовлены из одного и того же материала плотности ρ, тогда:

$$\begin{cases} m_O = \rho h \pi R_3^2 \\ m_\Delta = \rho h \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_O}{m_\Delta} = \frac{4\pi R_3^2}{\sqrt{3} a^2}. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) получим:

$$\begin{cases} m_O - 6m_\Delta = 12 \\ \frac{m_O}{m_\Delta} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}6^2}{\sqrt{3} \cdot 1{,}5^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_O - 6m_\Delta = 12 \\ \frac{m_O}{m_\Delta} = 41{,}77 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 41{,}77 m_\Delta - 6m_\Delta = 35{,}77 m_\Delta = 12 \Rightarrow \begin{cases} m_O \approx 14{,}04\,\text{кг}; \\ m_\Delta \approx 0{,}34\,\text{кг}. \end{cases}$$

Определим момент инерции J_3 тела 3 по (3.13):

$$J_3 = J_O - 6J_\Delta = \frac{m_O R_3^2}{2} - 6\left(\frac{m_\Delta a^2}{12} + m_\Delta r_3^2\right) =$$
$$= \frac{14{,}04 \cdot 3{,}6^2}{2} - 6\left(\frac{0{,}34 \cdot 1{,}5^2}{12} + 0{,}34 \cdot 1{,}5^2\right) = 86{,}01 \text{кг} \cdot \text{м}^2. \tag{3.16}$$

Угловую скорость ω_3 тела 3 представим через линейную скорость v_1 тела 1. По формуле Эйлера и с учетом (3.10) линейная скорость v_B точки B, лежащей на ободе большого диска тела 2 (см. рис. 3.10), равна:

$$\begin{cases} v_B = \omega_2 \cdot R_2 \\ \omega_2 = \dfrac{v_1}{2} \end{cases} \Rightarrow v_B = \frac{v_1}{2} \cdot R_2 = \frac{3}{2} v_1. \tag{3.17}$$

Кроме того, линейная скорость v_B точки B алгебраически равна скорости v_C точки C, лежащей на ободе диска 3, и угловая скорость ω_3 определяется как

$$\omega_3 = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{CP}, \tag{3.18}$$

где точка P – мгновенный центр скоростей двигающегося плоского тела 3.

Из (3.17) и (3.18) получим:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{CP} = \frac{3}{2} v_1 \cdot \frac{1}{2R_3} = \frac{3v_1}{4 \cdot 3{,}6} = 0{,}21 v_1. \tag{3.19}$$

С учетом выражения (3.19) определим скорость v_3 центра тела 3:

$$v_3 = \omega_3 R_3 = 0{,}21 v_1 \cdot 3{,}6 = 0{,}76 v_1. \tag{3.20}$$

Подставим (3.16), (3.19) и (3.20) в (3.12) и получим значение кинетической энергии T_3 тела 3 через скорость v_1 тела 1:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{12 \cdot (0{,}76 v_1)^2}{2} + \frac{86{,}01 \cdot (0{,}21 v_1)^2}{2} = 5{,}36 v_1^2. \tag{3.21}$$

Подставим (3.4), (3.11) и (3.21) в (3.3) и получим значение кинетической энергии T механической системы через скорость v_1 тела 1:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 8v_1^2 + 3{,}27 v_1^2 + 5{,}36 v_1^2 = 16{,}63 v_1^2. \tag{3.22}$$

4. Определим суммарную работу ΣA_i^E внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на конечном перемещении, и представим полученное выражение через путь S_1 тела 1.

Суммарная работа ΣA_i^E определяется как алгебраическая сумма работ внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на том же перемещении:

$$\Sigma A_i^E = A_1 + A_2 + A_3, \tag{3.23}$$

где A_1, A_2 и A_3 – значения работ внешних сил и моментов сил, приложенных к телам 1, 2 и 3 на конечном перемещении.

Тело 1 проходит путь S_1 под действием двух внешних сил, силы тяжести $\vec{G}_1$ и силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, тогда работа этих сил на данном перемещении:

$$A_1 = A_{G1} + A_{F\,\text{тр}}, \tag{3.24}$$

где A_{G1} – работа силы тяжести, приложенной к телу 1; $A_{F\,\text{тр}}$ – работа силы трения скольжения, приложенной к телу 1.

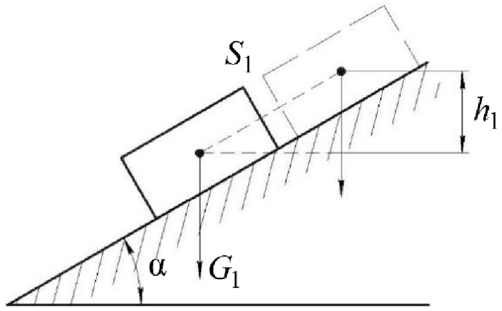

Рис. 3.11

Тело 1 пройдя путь S_1 под действием силы тяжести $\vec{G}_1$, совершает вертикальное перемещение $h_1 = S_1 \sin\alpha$ вниз (рис. 3.11), тогда работа этой силы:

$$A_{G1} = G_1 h_1 = m_1 g h_1 = m_1 g S_1 \sin\alpha, \tag{3.25}$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Определим работу $A_{F\,\text{тр}}$ силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ на перемещении S_1:

$$\begin{cases} A_{F\,\text{тр}} = -F_{\text{тр}} S_1 \\ F_{\text{тр}} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow A_{F\,\text{тр}} = -\mu m_1 g \cos\alpha S_1, \tag{3.26}$$

где N_1 – величина реакции наклонной плоскости, действующей на тело 1.

Подставим (3.25) и (3.26) в (3.24) и получим значение работы, совершенной над телом 1 на перемещении S_1:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{G1} + A_{F\,\text{тр}} = m_1 g S_1 \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha S_1 = m_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) S_1 = \\ &= 16 \cdot 9{,}81(0{,}5 - 0{,}14 \cdot 0{,}87) S_1 = 59{,}36 S_1 = 59{,}36 \cdot 5 = 296{,}8 \text{ Дж.} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Сила тяжести $\vec{G}_2$, приложенная к телу 2, работу не совершает, так как тело 2 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (отсутствует вертикальное перемещение), следовательно:

$$A_2 = 0. \qquad (3.28)$$

Тело 3 проходит путь S_3 под действием двух внешних сил, силы тяжести $\vec{G}_3$ и силы упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$, а также под действием момента сопротивления к качению $\vec{M}_{\text{тр}}$, тогда работа совершенная над телом 3 на данном перемещении:

$$A_3 = A_{G3} + A_{F\,\text{упр}} + A_{M\,\text{тр}}, \qquad (3.29)$$

где A_{G3} – работа силы тяжести, приложенной к телу 3; $A_{F\,\text{упр}}$ – работа силы упругости пружины, приложенной к телу 1; $A_{M\,\text{тр}}$ – работа момента сопротивления к качению тела 3.

При прохождении телом 1 пути S_1 тело 3 переместится на расстояние S_3. Выразим расстояние S_3, пройденное телом 3, через путь S_1. Для этого представим (3.20) в виде:

$$\frac{dS_3}{dt} = 0{,}76\frac{dS_1}{dt}. \qquad (3.30)$$

Тогда, проинтегрировав выражение (3.30) при нулевых начальных условиях, получим соотношение для путей S_1 и S_3, пройденных телами 1 и 3:

$$S_3 = 0{,}76S_1. \qquad (3.31)$$

Тело 3 пройдя путь S_3 под действием силы тяжести $\vec{G}_3$, совершает вертикальное перемещение $h_3 = S_3 \sin\alpha$, тогда, с учетом (3.31), работа этой силы:

$$A_{G3} = -G_3h_3 = -m_3gh_3 = -m_3gS_3\sin\alpha = -0{,}76m_3gS_1\sin\alpha. \qquad (3.32)$$

Определим работу $A_{F\,\text{упр}}$ силы упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$ при ее деформации на величину S_3, учитывая (3.31):

$$A_{F\,\text{упр}} = -\frac{cS_3^2}{2} = -\frac{c(0{,}76S_1)^2}{2}. \qquad (3.33)$$

Работа $A_{M\,\text{тр}}$ момента сопротивления к качению $\vec{M}_{\text{тр}}$ тела 3:

$$\begin{cases} A_{M\,\text{тр}} = -M_{\text{тр}}\varphi_3 \\ M_{\text{тр}} = \delta N \end{cases} \Rightarrow A_{M\,\text{тр}} = -\delta N\varphi_3, \qquad (3.34)$$

где φ_3 – угол, на который повернется тело 3, когда тело 1 пройдет путь S_1.

Для определения φ_3 представим (3.19) в следующем виде:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = 0{,}21\frac{dS_1}{dt}. \tag{3.35}$$

Тогда, проинтегрировав (3.35) при нулевых начальных условиях, получим соотношение для угла φ_3 и пути S_1:

$$\varphi_3 = 0{,}21S_1. \tag{3.36}$$

С учетом (3.36) определим работу $A_{M\,\text{тр}}$ момента сопротивления к качению $\vec{M}_{\text{тр}}$ тела 3:

$$A_{M\,\text{тр}} = -\delta N\varphi_3 = -\delta N 0{,}21S_1 = -\delta m_3 g\cos\alpha \cdot 0{,}21S_1. \tag{3.37}$$

Подставим (3.32), (3.33) и (3.37) в (3.29) и получим значение работы, совершенной над телом 3 при перемещении тела 1 на величину S_1:

$$\begin{aligned} A_3 &= A_{G3} + A_{F\,\text{упр}} + A_{M\,\text{тр}} = \\ &= -0{,}76m_3gS_1\sin\alpha - \frac{c(0{,}76S_1)^2}{2} - \delta m_3 g\cos\alpha \cdot 0{,}21S_1 = \\ &= -m_3g(0{,}76\sin\alpha + 0{,}21\delta\cos\alpha)S_1 - \frac{c(0{,}76S_1)^2}{2} = \\ &= -12 \cdot 9{,}81(0{,}76 \cdot 0{,}5 + 0{,}21 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}87) \cdot 5 - \frac{2{,}5 \cdot (0{,}76 \cdot 5)^2}{2} = -248{,}17\,\text{Дж}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Подставим (3.27), (3.28) и (3.38) в (3.23) и получим значение работы ΣA_i^E, совершенной механической системой на конечном перемещении:

$$\Sigma A_i^E = A_1 + A_2 + A_3 = 296{,}8 - 248{,}17 = 48{,}63\ \text{Дж}. \tag{3.39}$$

Используя полученные значения кинетической энергии (3.22) и работы (3.39) механической системы и учитывая их соотношение (3.2), получим значение скорости v_1 тела 1:

$$T = \Sigma A_i^E \Rightarrow 16{,}63v_1^2 = 48{,}63 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{48{,}63}{16{,}63}} = 1{,}71\ \text{м/с}.$$

Примечание. Определим момент инерции тела, являющегося однородным тонким диском (см. рис. 3.9), из выражения:

$$J = J_{\text{O}} - nJ_{\nabla}, \tag{3.40}$$

где $J_{\text{O}} = \dfrac{m_{\text{O}}R^2}{2}$ – момент инерции однородного тонкого диска радиуса R относительно оси его вращения; J_{∇} – момент инерции вырезанного в теле элемента (сектора) относительно оси вращения тела.

Тело в форме сектора не является телом простейшей формы, поэтому выведем выражение для определения его момента инерции. Для этого зададим сектор в виде плоской фигуры в полярной системе координат, как показано на рис. 3.12. При этом r_e и r_i – радиусы внешней и внутренней окружностей, ограничивающих сектор.

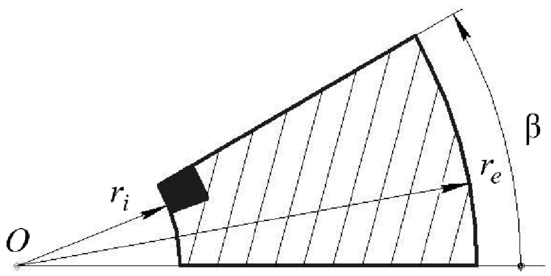

Рис. 3.12

Разобьем сектор на малые элементы площадью $s_k = dr \cdot r_k d\varphi$, где r и φ – полярные координаты, а dr и $r_k d\varphi$ – стороны малого элемента (радиальное и поперечное перемещение).

Тогда площадь сектора, состоящего из j малых элементов $s_{\nabla} = \sum\limits_{k=1}^{j} s_k$; переходя к пределу суммы, получим:

$$s_{\nabla} = \int\limits_{r_i}^{r_e}\int\limits_{0}^{\beta} r_k dr d\varphi = \beta \frac{r_k^2}{2}\Bigg|_{r_i}^{r_e} = \frac{\beta(r_e^2 - r_i^2)}{2}. \tag{3.41}$$

Если тело толщиной h выполнено в форме сектора и изготовлено из материала плотности ρ, масса такого тела $m_{\nabla} = \rho h s_{\nabla}$, и с учетом (3.41):

$$m_{\nabla} = \rho h \frac{\beta(r_e^2 - r_i^2)}{2}. \tag{3.42}$$

Определим момент инерции J_{∇} тела в форме сектора как момент инерции тела произвольной формы:

$$J_{\nabla} = \sum_{k=1}^{j} m_k r_k^2, \tag{3.43}$$

где m_k – масса малого элемента площадью $s_k = dr \cdot r_k d\varphi$.

Тогда:

$$J_{\nabla} = \sum_{k=1}^{j} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{j} \rho h r_k^3 dr d\varphi = \rho h \sum_{k=1}^{j} r_k^3 dr d\varphi.$$

Переходя к пределу суммы, получим:

$$J_{\nabla} = \rho h \sum_{k=1}^{j} r_k^3 dr d\varphi = \rho h \int_{r_i}^{r_e} \int_{0}^{\beta} r_k^3 dr d\varphi = \rho h \beta \frac{r_k^4}{4} \Big|_{r_i}^{r_e} = \rho h \frac{\beta (r_e^4 - r_i^4)}{4}.$$

Учитывая (3.42), получим момент инерции J_{∇} тела в форме сектора относительно оси вращения, проходящей через центры окружностей, радиусы которых ограничивают его габариты:

$$J_{\nabla} = \frac{m_{\nabla} (r_e^4 - r_i^4)}{2(r_e^2 - r_i^2)}. \tag{3.44}$$

Видно, что для определения моментов инерции J_{O} и J_{∇}, необходимо определить массу m_{O} тела 3 без вырезанных элементов (массу сплошного диска) и массу m_{∇} одного вырезанного элемента (сектора).

Масса m тела:

$$m = m_{\mathrm{O}} - n m_{\nabla}. \tag{3.45}$$

Определим значения m_{O} и m_{∇}, руководствуясь тем, что диск и вырезанные в форме сектора элементы имеют одинаковую толщину h и изготовлены из одного и того же материала плотности ρ. Тогда, с учетом (3.42):

$$\begin{cases} m_{\mathrm{O}} = \rho h \pi R_3^2 \\ m_{\nabla} = \rho h \dfrac{\beta (r_e^2 - r_i^2)}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{m_{\mathrm{O}}}{m_{\nabla}} = \frac{2\pi R_3^2}{\beta (r_e^2 - r_i^2)}. \tag{3.46}$$

Определив массы m_{O} и m_{∇} диска и сектора, рассчитаем момент инерции J_{O} и, используя (3.44), момент инерции J_{∇}; подставим полученные значения в (3.40) и определим момент инерции тела, являющегося однородным тонким диском (см. рис. 3.9).