Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА имени адмирала С.О. МАКАРОВА

Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА
Кафедра основ инженерного проектирования

СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебно-методическое пособие

Изд. 4-е, испр. и доп.

Санкт-Петербург
Издательство ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова
2017

УДК 531.8
С52

С52 Содержание курсовой работы по теоретической механике: учеб.-методич. пособие. — Изд. 4-е, исп. и доп. / Сост.: П. М. Гукьямухов, Б. Ф. Клочков, Е. В. Потехина. — СПб.: ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2017. — 152 с.

Работа содержит варианты заданий курсовой работы по разделам «Статика», «Кинематика» и «Динамика» дисциплин «Механика», «Механика (теоретическая)» и «Теоретическая механика», теоретическую базу применяемых методов решения, перечень вопросов, вынесенных на защиту заданий курсовой работы.

Предназначено для студентов заочной формы обучения и курсантов, обучающихся по специальностям: 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования», 25.05.05 «Судовождение», 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок», 26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики» направления подготовки 26.03.01 «Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства» (по профилям «Гидрографическое обеспечение мореплавания и морских инженерных изысканий», «Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение мореплавания и морских инженерных изысканий» и «Управление водными и мультимодальными перевозками») и направлениям подготовки 23.03.01 «Технология транспортных процессов» (по профилю «Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)») в качестве основной литературы по дисциплине «Теоретическая механика».

Учебными планами специальностей и направлений подготовки и программами образовательной дисциплины «Теоретическая механика» предусмотрено выполнение студентами (курсантами) курсовой работы по теоретической механике. Курсовая работа состоит из нескольких заданий по основным темам теоретической механики (в зависимости от специальности и направления подготовки).

Рекомендовано к изданию на заседании кафедры основ инженерного проектирования. Протокол № 3 от 27 ноября 2017 г.

СТАТИКА

1. Задание. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из двух частей. Определить реакции внешних связей составной конструкции, и реакцию соединительного шарнира *C*.

Схемы механических систем показаны на рис. 1 – 3. Необходимые для вычислений данные сведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер варианта (рис. 1 – 3)	P_1,	P_2,	M, кН·м	q кН/м,	Номер варианта (рис. 1 – 3)	P_1,	P_2,	M, кН·м	q кН/м,
	кН					кН			
1	5,0	–	24,0	0,8	16	7,0	10,0	14,0	3,8
2	6,0	10,0	22,0	1,0	17	9,0	12,0	26,0	4,0
3	7,0	9,0	20,0	1,2	18	11,0	10,0	18,0	3,5
4	8,0	–	18,0	1,4	19	13,0	9,0	30,0	3,0
5	9,0	–	16,0	1,6	20	15,0	8,0	25,0	2,5
6	10,0	8,0	25,0	1,8	21	10,0	7,0	20,0	2,0
7	11,0	7,0	20,0	2,0	22	5,0	6,0	15,0	1,5
8	12,0	6,0	15,0	2,2	23	8,0	5,0	10,0	1,4
9	13,0	–	10,0	2,4	24	11,0	4,0	5,0	1,3
10	14,0	–	12,0	2,6	25	14,0	6,0	7,0	1,2
11	15,0	5,0	14,0	2,8	26	12,0	8,0	9,0	1,1
12	12,0	4,0	16,0	3,0	27	10,0	7,0	11,0	1,0
13	9,0	6,0	18,0	3,2	28	8,0	9,0	13,0	1,2
14	6,0	–	20,0	3,4	29	6,0	10,0	15,0	1,4
15	5,0	8,0	22,0	3,6	30	10,0	12,0	17,0	1,6

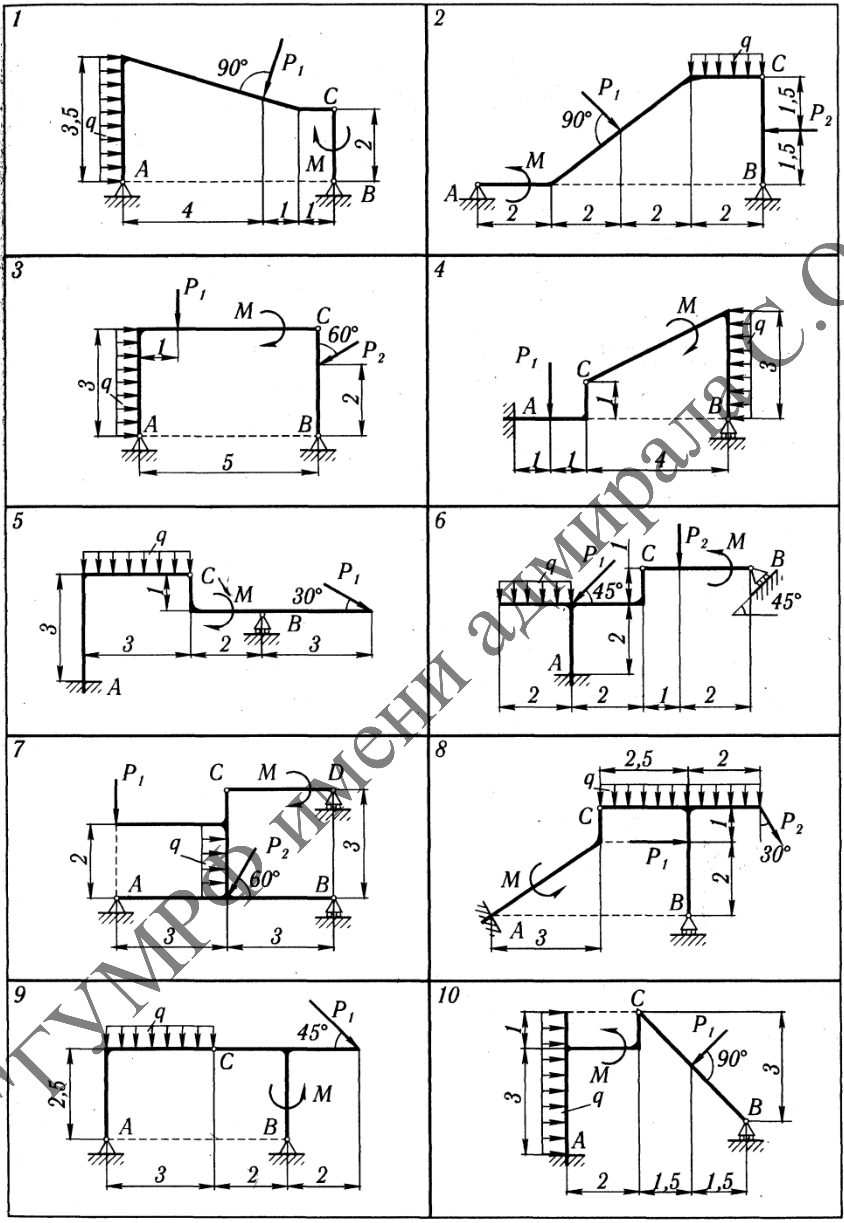

1
90°
P_1
C
3,5
q
M
A
B
4
1
1
2
q
C
P_1
90°
M
A
1,5
P_2
B
2
3
P_1
M
C
60°
P_2
1
q
A
B
5
4
M
q
P_1
C
A
B
1
1
4
5
q
C
M
30°
P_1
B
A
6
P_2
M
B
C
P_1
45°
A
7
P_1
C
M
D
q
P_2
60°
A
B
8
2,5
2
q
C
P_2
P_1
30°
M
B
A
9
q
P_1
45°
C
2,5
A
B
M
10
C
P_1
90°
M
q
A
B
1,5

Рис. 1

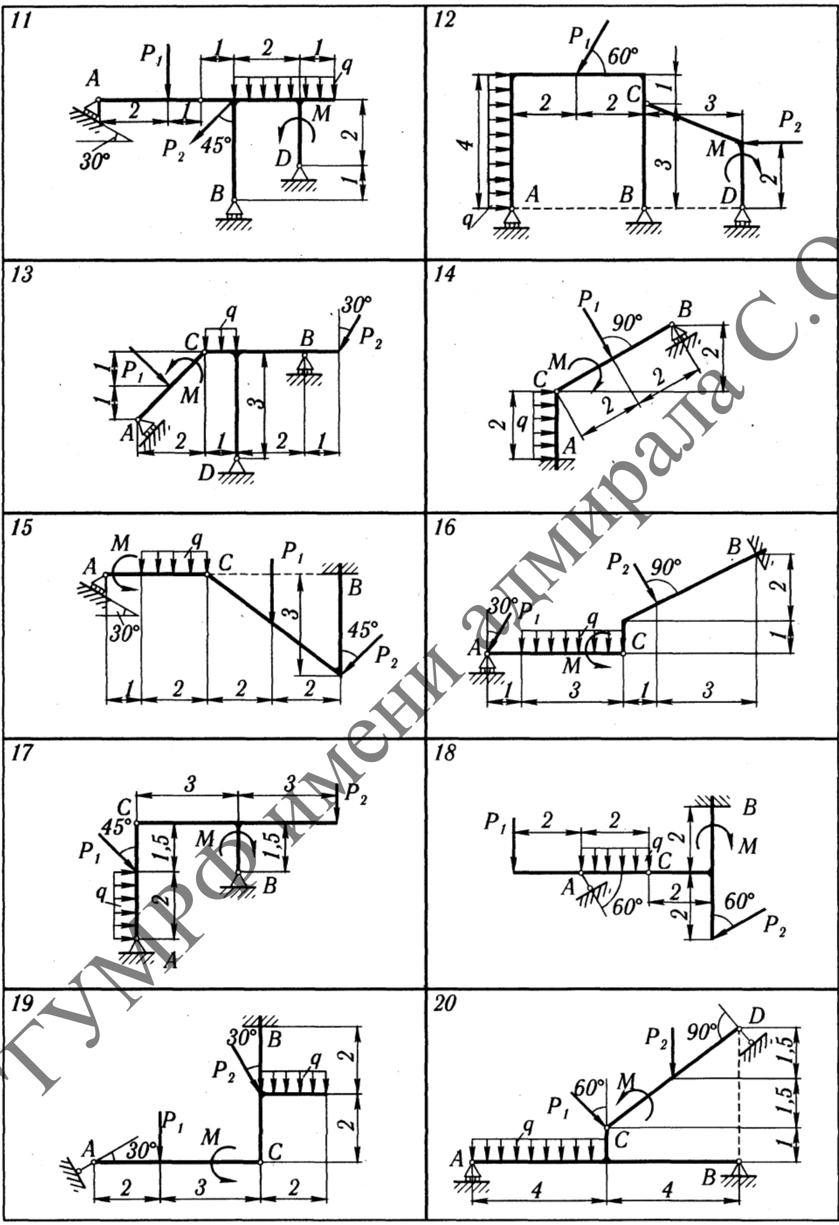


Рис. 2

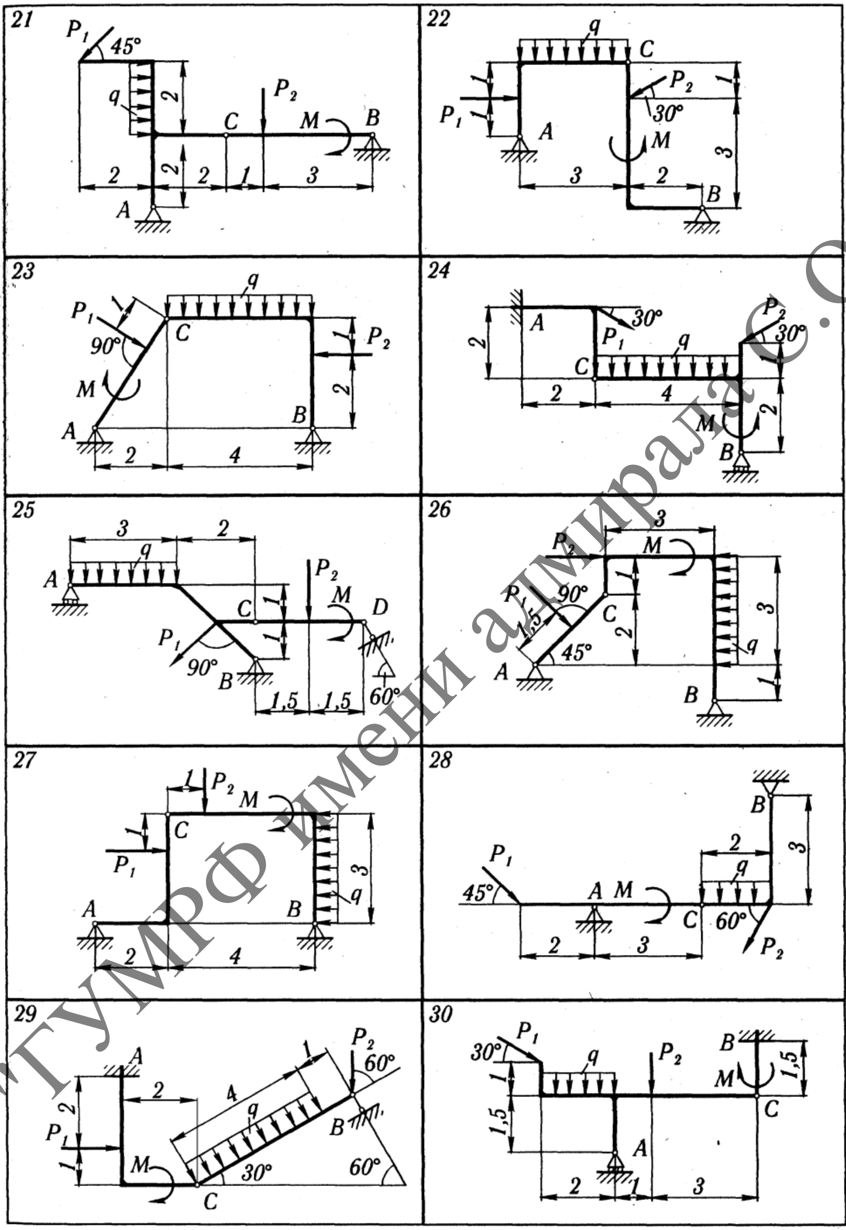


Рис. 3

Методика решения задач по определению реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Перед выполнением задания на тему «Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)» необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру.

Образец титульного листа приведен в прил. 1.

Момент силы относительно точки как алгебраическая величина. Алгебраическая величина момента силы относительно данной точки равна произведению модуля силы $F \equiv \left|\vec{F}\right|$ на кратчайшее расстояние от данной точки до линии действия силы (линии, вдоль которой направлен вектор силы). Это расстояние (d) называют плечом силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Момент силы относительно точки принято считать положительным, если сила свое плечо относительно данной точки стремится повернуть против хода часовой стрелки. Величина момента силы зависит от модуля силы и плеча силы (рис. 4), измеряется в (Н·м) и определяется по формуле:

$$M_O\left(\vec{F}\right) = \pm F \cdot d = \pm F \cdot OA \cdot \sin\alpha.$$

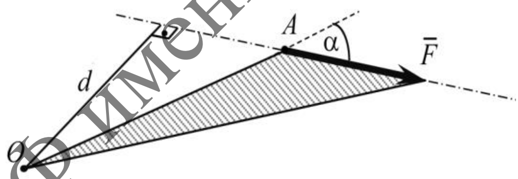


Рис. 4. Момент силы относительно точки как алгебраическая величина

Очевидно, что момент силы относительно указанного полюса (точки) не меняется при перемещении точки приложения силы вдоль линии её действия.

Момент силы относительно точки равен нулю только в тех случаях, когда сила равна нулю или линия её действия проходит через точку, относительно которой определяют момент.

Пара сил. Момент пары. Две равные по величине и противоположно направленные силы $\left(\vec{F},\, \vec{F}'\right)$, если линии их действия не совпадают, образуют систему сил, называемую парой сил (рис. 5).

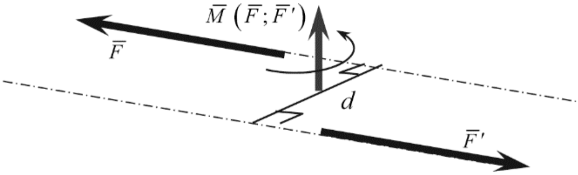


Рис. 5. Пара сил, момент пары

Пара сил характеризуется плоскостью действия, направлением вращательного действия, величиной момента пары. Силы, составляющие пару, не образуют уравновешенную систему сил, хотя их векторная сумма равна нулю.

Момент пары сил может быть определен как сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки. Он не зависит от выбора этой точки и его величина равна произведению силы $F = F'$ на плечо пары d (d — кратчайшее расстояние между линиями действия сил, образующих пару):

$$M\left(\vec{F},\ \vec{F}'\right) = \pm F \cdot d\ ;$$

(знак + ставят в том случае, если пара сил свое плечо стремится повернуть против хода стрелки часов, и наоборот).

Момент пары сил, как и момент силы, измеряют в Н·м.

Распределенные силы. Силы, приложенные в точке, называют сосредоточенными. В действительности взаимодействие тел может происходить по некоторой линии или поверхности либо объёму. Примером поверхностных сил является давление воды на подводную часть корабля, примером объёмных — силы тяжести, распределенные в объёме тела (часто, для удобства распределённые силы заменяют равнодействующей, приложенной в центре тяжести).

Распределённые силы характеризуются интенсивностью и направлением действия. Интенсивностью распределённой нагрузки называется величина силы, приходящаяся на единицу объёма, площади или длины линии.

Силы принимаются распределёнными по линии в том случае, когда размерами тела в поперечном сечении можно пренебречь по сравнению с его длиной. Такие тела называются стержнями или балками. Распределёнными обычно бывают силы, имеющие параллельные или сходящиеся в точке линии действия, однако распределёнными могут быть и пары сил.

Рассмотрим вопросы замены систем распределённых сил равнодействующими сосредоточенными силами $\vec{Q}$.

Частные случаи распределенных нагрузок. Случай распределенной нагрузки постоянной интенсивности (равномерно распределенная нагрузка) приведен на рис. 6:

$$q(x) = q = \text{const};$$
$$Q = q\,AB = q\,L;$$
$$AC = 1/2\,AB = 1/2\,L.$$

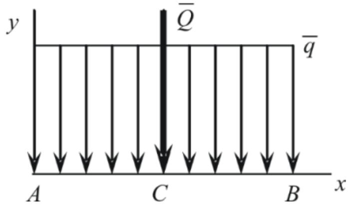


Рис. 6. Равномерно распределённая нагрузка (постоянной интенсивности *q*)

Распределенная нагрузка с линейно изменяющейся интенсивностью *q(x)*, *AB* = *L* (рис. 7, *а*):

$$q(x) = q_{\min} + \frac{q_{\max} - q_{\min}}{L}x;$$
$$Q = 1/2\left(q_{\max} + q_{\min}\right)L;$$
$$AC = 1/3\frac{2q_{\max} + q_{\min}}{q_{\max} + q_{\min}}L.$$

Если $q_{\min} = 0$, получим треугольное распределение (*AB* = *L*) — рис. 7, *б*):

$$q(x) = q_{\max}\frac{x}{L};$$
$$Q = 1/2\,q_{\max}\,L; \qquad AC = 2/3L.$$

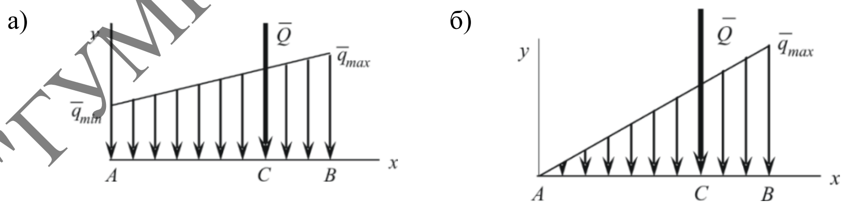


Рис. 7. Распределенная нагрузка с линейно изменяющейся интенсивностью (*а*) и с интенсивностью, изменяющейся по закону треугольника (*б*)

Равномерно распределённая нагрузка (направление действия нагрузки не перпендикулярно стержню *AB*, задано углом α, отсчитываемым от нормали к стержню *AB*) и равнодействующая показаны на рис. 8:

$$q = q(x) = \text{const};$$

$$Q = q \cdot L;$$

$$AC = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2}.$$

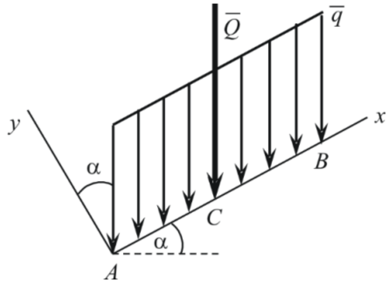


Рис. 8. Равномерно распределенная нагрузка, не перпендикулярная стержню

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи следует начинать с условия: рисунка — схемы механической системы, заданной по условию задания; записать, что дано и что требуется найти. Решение должно содержать рисунок — расчетные схемы с указанием размеров и всех векторов, заданных в условии задания и определяемых решением; метод — указание, каким образом составлены уравнения; уравнения в общем виде; уравнения с численными значениями; значения вычисленных характеристик с указанием единиц измерения. Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю. Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем.

Далее приведен рекомендованный алгоритм (последовательность) решения задач статики:

1. Выделить объект равновесия (тело (элемент или систему тел), равновесие которого будем рассматривать), и изобразить его как свободное тело (применение аксиомы освобождения от связей).

2. Приложить к объекту равновесия активную нагрузку (силы, пары сил) в соответствии с условием задачи (под термином силы понимаем и распределенную нагрузку).

3. Вместо отброшенных внешних связей приложить к объекту равновесия реакции этих связей.

4. Выполнить анализ полученной системы сил (активных и реакций внешних связей), ответив на вопросы:

– Получена система сил, лежащих в одной плоскости, или пространственная?

– Каково взаимное расположение линий действия сил? (Получена система произвольно расположенных сил или система параллельных сил, или система сил, сходящихся в точке?)

Ответы на поставленные вопросы укажут, сколько независимых уравнений равновесия может быть составлено.

5. Сравнить число неизвестных (реакций связей) и количество независимых уравнений равновесия. Выяснить, является задача статически определённой или нет.

6. В случае статически определимой системы составить уравнения равновесия и решить их.

7. Проанализировать полученные результаты.

Пример выполнения задания

Дано: механическая система (рис. 9) состоит из двух твердых тел: *AC* и *CB*.

$P_1 = 5$ кН; $P_2 = 7$ кН; $M = 22$ кН·м; $q = 2$ кН/м; $\alpha = 60°$, размеры механической системы (в метрах) приведены на рис. 9.

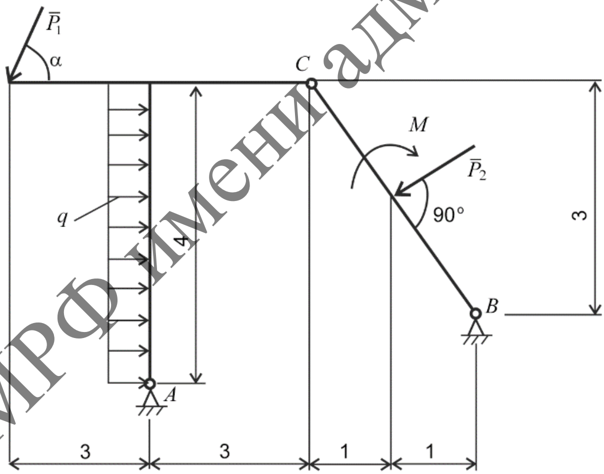


Рис. 9. Схема механической системы

Определить реакции в шарнирах *A* и *B*, а также в соединительном шарнире *C*.

Решение

Решение этой задачи можно провести, разделив механическую систему по шарниру *C* на две.

Выделим объект равновесия — механическую систему, расположенную левее шарнира *C* (рис. 10).

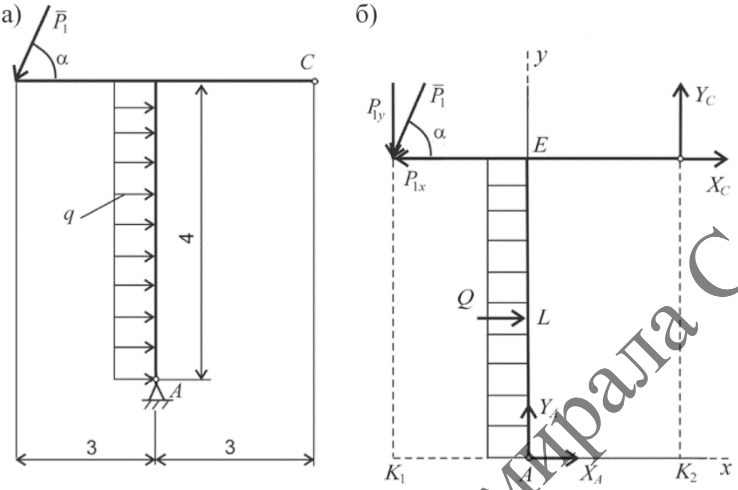


Рис. 10. Схемы механической системы: *а* — объект равновесия находится левее шарнира; *б* — действие на систему произвольной системы сил

Представим его как свободное тело, мысленно удалив наложенные связи. Приложим в соответствии с условием задачи внешнюю нагрузку: сосредоточенную силу P, равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = q{\cdot}(AE) = 2{\cdot}4 = 8$ кН ($AL = LE = 0{,}5\ AE = 2$ м; $AK_1 = OE = 3$ м; $AK_2 = EC = 2$ м).

Вместо удаленных связей в точках A и C приложим составляющие реакций X_A, Y_A, X_C, Y_C.

На механическую систему, показанную на рис. 10, действует плоская произвольная система сил. В таком случае может быть составлено три независимых уравнения равновесия.

Составим уравнения проекций сил на оси x и y, а также уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum F_{ix}^e = X_A + Q + X_C - P_1 \cdot \cos\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy}^e = Y_A + Y_C - P_1 \cdot \sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Для упрощения вычисления момента силы P_1 относительно точки A разложим ее на горизонтальную (P_{1x}) и вертикальную (P_{1y}) составляющие:

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \text{ кН};$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot 0{,}866 = 4{,}33 \text{ кН}.$$

Момент силы P_1 относительно точки A определим следующим образом:

$$M_A(P_1) = M_A(P_{1x}) + M_A(P_{1y});$$

$$\sum M_{iA}^{e} = P_1 \cdot \cos\alpha \cdot AE + P_1 \cdot \sin\alpha \cdot AK_1 - Q \cdot AL - X_C \cdot AE + Y_C \cdot AK_2 = 0. \quad (3)$$

После подстановки численных значений уравнения (1) – (3) получают вид:

$$X_A + X_C = -5{,}5 \text{ кН}; \quad (4)$$

$$Y_A + Y_C = 0{,}87 \text{ кН}; \quad (5)$$

$$3Y_C - 4X_C = 6{,}99 \text{ кН}. \quad (6)$$

Система трех алгебраических уравнений (4) – (6) содержит четыре неизвестные и пока решена быть не может.

Рассмотрим равновесие механической системы, расположенной правее шарнира *C* (рис. 11), используя приведенную выше методику.

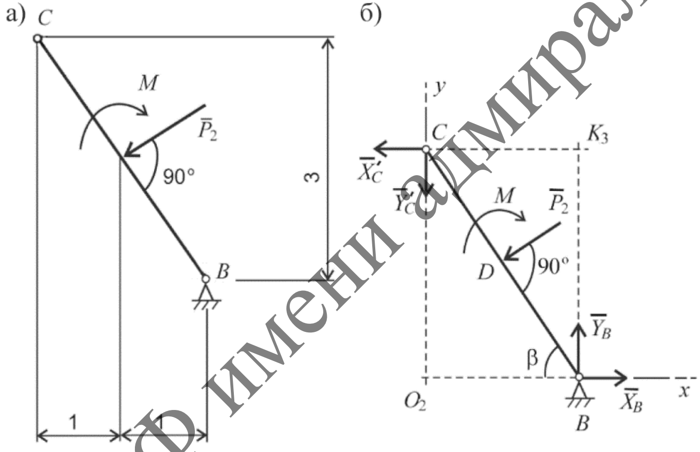


Рис. 11. Схемы механической системы: *а* — объект равновесия находится правее шарнира; *б* — действие на систему произвольной системы сил

Активная нагрузка, приложенная к балке CB — сосредоточенная сила $\boldsymbol{P_2}$, момент M ($\boldsymbol{P} \equiv \vec{P}$). Реакции связей в точках B и C: $\boldsymbol{X_B}, \boldsymbol{Y_B}, \boldsymbol{X_C}', \boldsymbol{Y_C}'$.

В соответствии с аксиомой о равенстве действия и противодействия:

$$X_C = X_C'; \quad (7)$$

$$Y_C = Y_C'. \quad (8)$$

Составим уравнения равновесия механической системы (рис. 11, *б*):

$$\sum F^E_{ix} = X_B - P_2 \cdot \cos(90° - \beta) - X_C' = 0; \quad (9)$$

$$\sum F^E_{iy} = Y_B - P_2 \cdot \sin(90° - \beta) - Y_C' = 0; \quad (10)$$

$$\sum M^E_{iB} = X_C' \cdot BK_3 + Y_C' \cdot O_2B - M + P_2 \cdot DB = 0; \quad (11)$$

$$CB = \sqrt{CO_2^2 + O_2B^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47 \text{ м};$$

$$DB = 0{,}5\ CB = 2{,}24 \text{ м}; \cos\beta = O_2B/CB = 2/4{,}47 = 0{,}45;$$

$$\sin\beta = O_2C/CB = 4/4{,}47 = 0{,}89; \cos(90° - \beta) = \sin\beta = 0{,}89;$$

$$\sin(90° - \beta) = \cos\beta = 0{,}45.$$

После подстановки численных значений и вычислений получим

$$X_B - X_C' = 6{,}23 \text{ кН}; \qquad (12)$$

$$Y_B - Y_C' = 3{,}15 \text{ кН}; \qquad (13')$$

$$4\ X_C' + 2\ Y_C' = 6{,}32 \text{ кН}. \qquad (14')$$

Система шести алгебраических уравнений (4) – (6), (12) – (14) с учетом равенств (7) и (8) содержит шесть неизвестных реакций, которые могут быть определены.

Из уравнений (6) и (14) находим Y_C = 2,66 кН; X_C = (6,32 – 2·2,66)/4 = = 0,25 кН.

Из уравнения (5) определим Y_A = 0,87 – 2,66 = –1,79 кН.

Из уравнения (4) можно найти X_A = –5,5 – 0,25 = –5,75 кН.

С помощью уравнения (12) определим X_B = 6,23 + 0,25 = 6,48 кН.

Решая уравнение (10), вычислим Y_B = 3,15 + 2,66 = 5,81 кН.

Для проверки правильности найденных величин реакций убедимся, что справедливо не использованное ранее уравнение равновесия сил, приложенных ко всей механической системе (рис. 9), например,

$$\sum F_{ix}^E = X_A + Q - P_{1x} - P_2 \cdot \cos(90° - \beta) + X_B = 0;$$

$$-5{,}75 + 8 - 2{,}5 - 7 \cdot 0{,}89 + 6{,}48 \cong 0.$$

Найденные реакции связей:

$$X_A = -5{,}75 \text{ кН}; \ Y_A = -1{,}79 \text{ кН};$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 6{,}02 \text{ кН}, \ X_B = 6{,}48 \text{ кН}, \ Y_B = 5{,}81 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 8{,}7 \text{ кН}, \ X_C = 0{,}25 \text{ кН}, Y_C = 2{,}66 \text{ кН};$$

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 2{,}67 \text{ кН}.$$

Значения реакций связей X_A и Y_A оказались отрицательными, в связи с чем их действительные направления противоположны показанным на рис. 10.

Методические рекомендации к защите задания

Перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. В чем состоит предмет статики?
2. Что следует отнести к основным понятиям статики?

3. Что является мерой механического взаимодействия тел?

4. Какие три фактора характеризуют действие силы на твердое тело?

5. Какого рода объект можно назвать абсолютно твердым телом?

6. Как формулируются аксиомы статики?

7. Что такое система сил? Какие две системы называются эквивалентными?

8. Известно, что $F_A = F_B$. Можно ли сказать, что силы F_A и F_B эквиваленты?

9. Какую силу называют равнодействующей некоторой системы сил?

10. Силы действия и противодействия двух тел равны по величине, действуют на одной прямой и направлены в противоположные стороны. Можно ли считать, что эта система сил уравновешенная?

11. Что называют механической связью, наложенной на твердое тело?

12. Что такое реакция связи?

13. В чем заключается принцип освобождаемости от связей?

14. Основные виды опор — указать их наименование, реакции связей.

15. Что называют проекцией силы на ось?

16. Что называют моментом силы относительно точки?

17. Чему равен момент силы относительно точки?

18. Что называют плечом силы относительно точки?

19. Как назначают знак момента силы относительно точки на плоскости?

20. Изменится ли момент силы относительно неподвижного центра при переносе точки приложения силы вдоль линии её действия?

21. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

22. Что называют парой сил?

23. Чему равен модуль момента пары сил?

24. Чему равно плечо пары сил?

25. Как назначают знак момента пары сил?

26. Что означает выражение «привести силу к центру»? Что получается в результате выполнения этой операции?

27. Чему равен момент присоединенной пары сил?

28. Что называют главным вектором системы сил?

29. Что называют главным моментом системы сил?

30. Зависит ли главный вектор системы сил от выбора центра приведения?

31. Зависит ли главный момент системы сил от выбора центра приведения?

32. Можно ли главный вектор системы сил отождествлять с равнодействующей?

33. К чему может быть приведена система сил, если ее главный вектор отличен от нуля, а главный момент равен нулю?

34. К чему может быть приведена система сил, если ее главный вектор равен нулю, а главный момент отличен от нуля?

35. К чему может быть приведена система сил, если ее главный вектор и главный момент не равны нулю?

36. В каком состоянии пребывает произвольная система сил, если ее главный вектор и главный момент равны нулю?

37. Сколько независимых уравнений равновесия, какие именно, можно составить в случае действия плоской произвольной системы сил?

38. Сколько независимых уравнений равновесия и какие можно составить в случае действия плоской системы параллельных сил?

39. Сколько независимых уравнений равновесия и какие можно составить в случае действия плоской системы сходящихся в точке сил?

40. Какие системы называют статически определимыми, какие — статически неопределимыми?

2. Задание.
Равновесие с учетом сцепления (трения покоя)

Определить минимальное (в вариантах 1 – 20, 25, 26, 29, 30) или максимальное (в вариантах 21 – 24, 27, 28) значение силы $\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{P} \equiv \vec{P}$) и реакции опор системы, находящейся в покое. Схемы вариантов представлены на рис. 12 – 14, а необходимые для расчета данные — в табл. 2.

В вариантах 1 – 20 сцепление (трение покоя) учесть только между тормозной колодкой и барабаном. В вариантах 21 – 30 учесть сцепление в двух опорных точках тела весом $\boldsymbol{G}$.

Решение задания предполагает: знание студентом (курсантом) аксиом статики; видов систем сил и соответствующих уравнений равновесия; состояния предельного равновесия; статически определенных (неопределенных) задач; основных видов связей и их реакций; умений проецировать вектор силы на координатные оси; вычислять алгебраическое значение момента силы относительно точки; ознакомление с алгоритмом решения задач статики, изложенным в предыдущем задании.

Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру.

Образец титульного листа приведен в прил. 1.

Таблица 2

Номер варианта (рис. 12 – 14)	G	Q	a	b	c	α, град	Коэффициент сцепления (коэффициент трения покоя)	Точки, в которых определяются реакции
	кН		м					
1.	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	*O*, *A*
2.	1,1	–	0,10	0,15	–	30	0,15	*O*, *A*, *B*
3.	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	*O*, *A*
4.	1,8	15	0,10	0,40	0,06	–	0,25	*O*, *A*
5.	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	*O*, *A*
6.	1,6	18	0,15	0,10	–	45	0,35	*O*, *A*, *B*
7.	2,0	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	*O*, *A*
8.	2,2	18	0,20	0,10	–	30	0,35	*O*, *A*, *B*
9.	2,1	20	0,10	0,20	–	30	0,30	*O*, *A*, *B*
10.	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	*O*, *A*
11.	1,9	24	0,40	0,50	0,06	–	0,20	*O*, *A*
12.	2,0	25	0,10	0,25	–	30	0,15	*O*, *A*, *B*
13.	1,6	20	0,10	0,10	–	45	0,10	*O*, *A*, *B*
14.	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	*O*, *A*
15.	1,8	20	0,10	0,15	–	45	0,20	*O*, *A*, *B*
16.	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	*O*, *A*
17.	1,3	12	0,15	0,15	–	45	0,30	*O*, *A*, *B*, *C*
18.	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	*O*, *A*
19.	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	*A*, *C*, *D*
20.	1,6	18	0,10	0,15	–	–	0,45	*O*, *A*, *B*
21.	1,0	–	2	0,50	–	45	0,45	*A*, *B*, *C*, *D*
22.	1,5	–	3	0,80	–	30	0,35	*A*, *B*, *C*, *D*
23.	2	–	5	1,4	–	–	0,40	*A*, *B*, *C*
24.	3	–	4	0,8	–	–	0,30	*A*, *B*, *C*, *D*
25.	1,0	–	0,8	0,4	–	30	0,25	*A*, *B*, *C*, *D*
26.	2,0	–	0,4	–	–	–	0,25	*A*, *B*, *C*
27.	4	–	4	1,0	–	45	0,35	*A*, *B*, *C*, *D*
28.	5	–	5	0,8	–	30	0,40	*A*, *B*, *C*, *D*
29.	2,0	–	2	0,3	–	30	0,20	*A*, *B*, *C*
30.	1	–	2	8,0	–	30	0,20	*A*, *B*, *C*, *D*

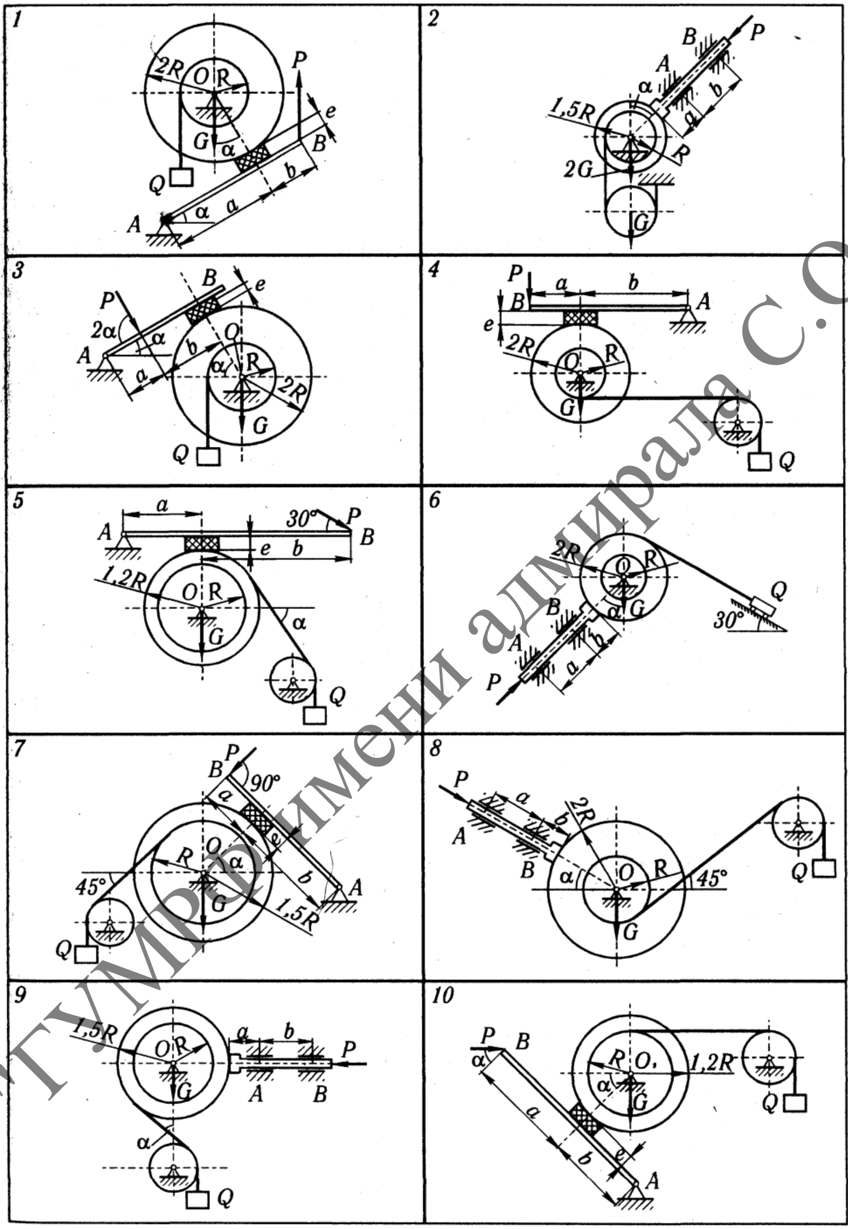

1
2R
O
R
P
e
G
α
B
b
Q
A
α
a
2
B
P
A
α
1,5R
b
a
R
2G
G
3
B
e
P
2α
α
O
A
b
α
R
a
2R
G
Q
4
P
a
b
B
A
e
2R
O
R
G
Q
5
a
30°
P
A
B
e
b
1,2R
O
R
α
G
Q
6
2R
O
R
Q
B
α
G
A
b
30°
P
a
7
B
P
90°
a
e
R
O
α
b
A
45°
G
1,5R
Q
8
P
a
2R
A
b
B
α
O
R
45°
Q
G
9
1,5R
O
R
a
b
P
G
A
B
α
Q
10
P
B
α
R
O
1,2R
α
G
Q
a
b
e
A

Рис. 12

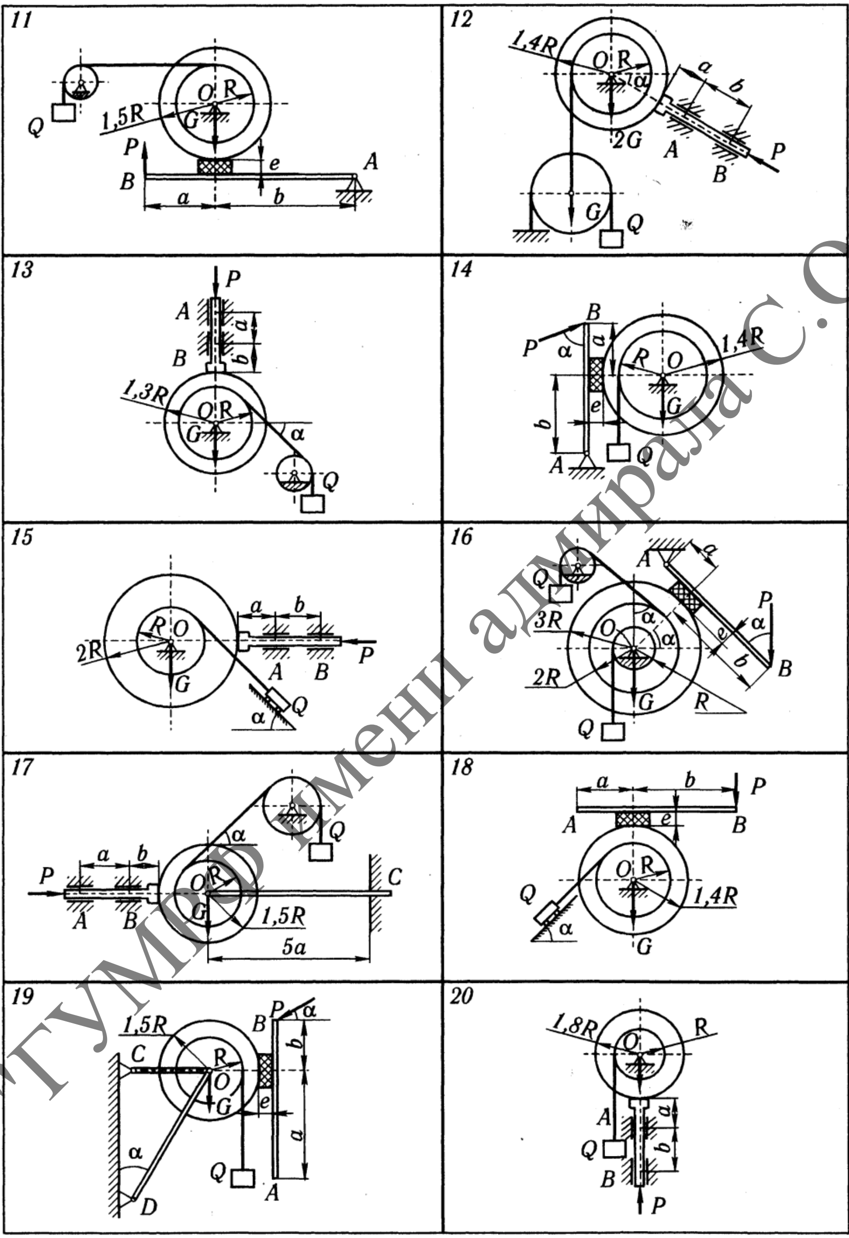

11
Q
O R
1,5R
G
P
e
A
B
a
b
12
1,4R
O R
α
a
b
2G
A
P
B
G
Q
13
P
A
a
b
B
1,3R
O R
G
α
Q
14
B
P
α
a
R O
1,4R
b
e
G
Q
A
15
R O
a
b
2R
P
A
B
G
Q
α
16
A
a
Q
P
3R
O
α
α
e
α
2R
b
B
G
R
Q
17
α
Q
a
b
P
C
O R
A
B
G
1,5R
5a
18
a
b
P
A
e
B
O R
Q
1,4R
α
G
19
P
α
1,5R
B
C
R
b
O
G
e
α
a
Q
D
A
20
1,8R
O
R
A
a
Q
b
B
P

Рис. 13

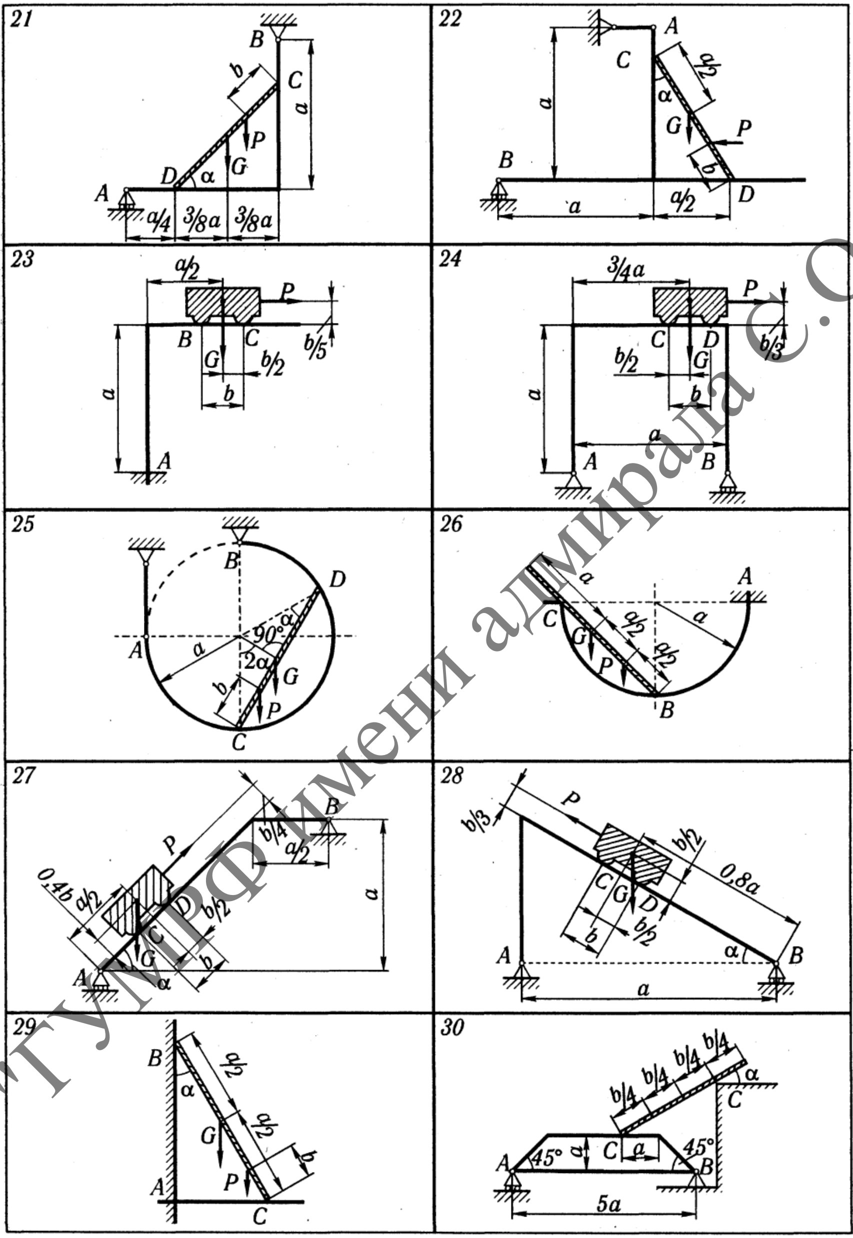

21
B
C
b
a
P
G
A
D
α
a/4
3/8a
3/8a
22
A
C
a/2
a
α
G
P
B
b
D
a
a/2
23
a/2
P
B
C
b/5
G
b/2
a
b
A
24
3/4a
P
C
D
b/3
b/2
G
a
b
a
A
B
25
B
D
90°
α
A
a
2α
G
b
P
C
26
a
A
C
a/2
a
G
a/2
P
B
27
B
b/4
P
a/2
0,4b
a/2
D
b/2
a
C
G
b
A
α
28
b/3
P
b/2
0,8a
C
G
D
b
b/2
A
α
B
a
29
B
a/2
α
G
a/2
b
A
P
C
30
b/4
b/4
b/4
b/4
b/4
α
C
45°
a
C
a
45°
A
B
5a

Рис. 14

Пример выполнения задания

Дано G = 3 кН; Q = 9 кН; G_1 = 5 кН; a = 20 см, b = 25 см, e = 10 см, s = = 15 см, c = 80 см, u = 5 см, α = 45°, $f_{тр}$ = 0,2 (рис. 15, 16). Безразмерный коэффициент трения покоя $f_{тр}$ зависит от материала соприкасающихся тел, качества поверхностей (величины микронеровностей), влажности поверхностей, …, не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

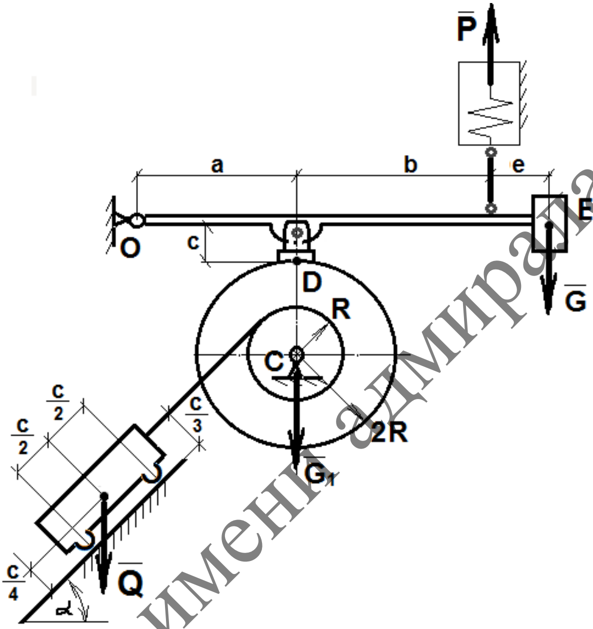


Рис. 15. Механическая система 1

Определить предельное значение силы $\vec{P}$ ($P = P_{\max}$ — рис. 15 или $P = P_{\min}$ — рис. 16) и реакции опор системы, находящейся в покое.

Сцепление (трение покоя) будем учитывать между тормозной колодкой и барабаном, а также в двух опорных точках тела весом Q.

На рис. 15 и 16 показаны две механические системы, различающиеся способом закрепления тормозной колодки.

Решение задачи проведем, исследуя равновесие отдельных частей (тел): механических систем 1 и 2.

Рассмотрим равновесие тела весом Q (касается обеих механических систем). Мысленно перережем нить, что удерживает груз, применив аксиому освобождаемости от связей. Составим расчетную схему механической системы и системы внешних сил, действующих на объект равновесия (рис. 17).

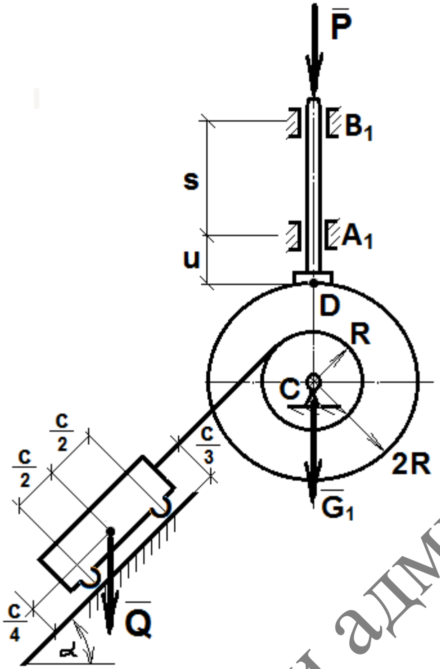


Рис. 16. Механическая система 2

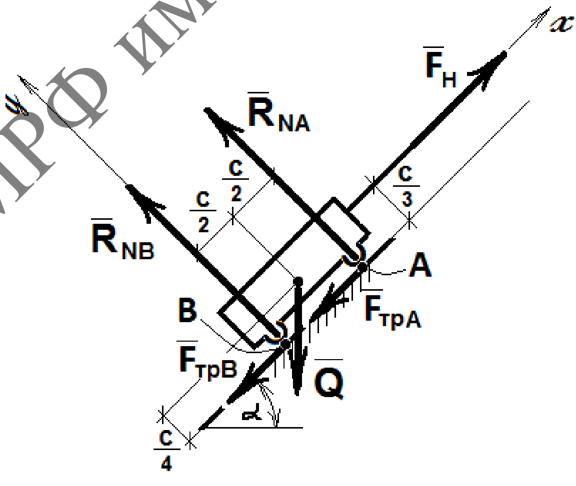


Рис. 17. Равновесие тела весом Q

На объект равновесия действуют:

Активные силы: вес тела — $\vec{Q}$.

Реакции внешних связей: в точках A и B — нормальные реакции: $\vec{R}_{NA}, \vec{R}_{NB}$, и силы трения покоя (сцепления): $\vec{F}_{\text{тр}A}, \vec{F}_{\text{тр}B}$, натяжение нити: $\vec{F}_{\text{Н}}$. (При стремлении силы $\vec{F}_{\text{Н}}$ сдвинуть вверх, вдоль оси x тело, прижатое весом $\vec{Q}$, к наклонной шероховатой поверхности, в плоскости соприкосновения возникают силы противодействия такому смещению – это силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}A}, \vec{F}_{\text{тр}B}$).

По условию задания необходимо определить минимальное или максимальное значение силы $\vec{P}$, что указывает на состояние предельного равновесия. В таком случае используем линейную зависимость силы трения покоя (сцепления) от нормальной реакции

$$F_{\text{тр}A} = f_{\text{тр}} \cdot R_{NA}\,;\; F_{\text{тр}B} = f_{\text{тр}} \cdot R_{NB}\,. \tag{1}$$

Состояние предельного равновесия означает, что сдвигающая сила $\vec{F}_{\text{Н}}$ имеет максимальную величину, при которой сохраняется равновесие тела весом $\vec{Q}$. Любое сколь угодно малое увеличение силы $\vec{F}_{\text{Н}}$ приведет к нарушению состояния равновесия.

Система внешних сил, показанных на рис. 17, образует систему произвольно расположенных на плоскости сил. Следовательно, могут быть составлены три независимых уравнения равновесия, например,

$$\sum F_{ix}^{e} = F_{\text{Н}} - F_{\text{тр}A} - F_{\text{тр}B} - Q \cdot \sin\alpha = 0; \tag{2}$$

$$\sum F_{iy}^{e} = R_{NA} + R_{NB} - Q \cdot \cos\alpha = 0; \tag{3}$$

$$\sum M_{iC1}^{e} = R_{NA}\left(\frac{c}{2}\right) - F_{\text{Н}}\left(\frac{c}{3}\right) - F_{\text{тр}A}\left(\frac{c}{4}\right) - R_{NB}\left(\frac{c}{2}\right) - F_{\text{тр}B}\left(\frac{c}{4}\right) = 0, \tag{4}$$

где $\sum F_{ix}^{e}$, $\sum F_{iy}^{e}$ — алгебраические суммы проекций внешних сил, приложенных к объекту равновесия на оси x, y, соответственно; $\sum M_{iC_1}^{e}$ — алгебраическая сумма моментов указанных сил относительно точки C_1.

Система трех линейных алгебраических уравнений (2 – 4) с учетом равенств (1) содержат 3 неизвестные реакции R_{NA}, R_{NB}, $F_{\text{Н}}$ и, следовательно, могут быть решены:

Из уравнения (2) с учетом (1) получим

$$F_{\text{Н}} - f_{\text{тр}} \cdot R_{NA} - f_{\text{тр}} \cdot R_{NB} - Q \cdot \sin\alpha = 0\,. \tag{2)'$$

Из уравнения (3) найдем

$$R_{NB} = Q \cdot \cos\alpha - R_{NA}. \tag{3)''$$

Уравнение (4) с учетом (1) может быть записано

$$R_{NA}\left(\frac{c}{2} - f_{\text{тр}} \cdot \frac{c}{4}\right) - F_{\text{Н}}\left(\frac{c}{3}\right) - R_{NB}\left(\frac{c}{2} + f_{\text{тр}} \cdot \frac{c}{4}\right) = 0. \qquad (4)''$$

Переписывая уравнения (2)' и (4)', учитывая условие (3)', получим

$$F_{\text{Н}} = Q\left(\cos\alpha \cdot f_{\text{тр}} + \sin\alpha\right) = 9\left(\cos 45° \cdot 0,2 + \sin 45°\right) = 7,637 \text{ кН};$$

$$R_{NA} = \frac{Q\cos\alpha\left(\frac{c}{2} - f_{\text{тр}}\frac{c}{4}\right) + F_{\text{Н}}\left(\frac{c}{3}\right)}{c};$$

$$R_{NA} = \frac{9\cos 45°\left(\frac{80}{2} - 0,2\frac{80}{4}\right) + 7,637\left(\frac{80}{3}\right)}{80} = 6,046 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3)' определим

$$R_{NB} = 9 \cdot \cos 45° - 6,046 = 0,318 \text{ кН}.$$

С помощью уравнений (1) найдем

$$F_{\text{тр}A} = 0,2 \cdot 6,046 = 1,209 \text{ кН};$$

$$F_{\text{тр}B} = 0,2 \cdot 0,318 = 0,064 \text{ кН}.$$

Равновесие тормозного барабана (касается обеих механических систем) (рис. 18).

Механическая система (рис. 18) находится с равновесии под действием активной силы $\vec{G}_1$, реакций внешних связей $\vec{F}_{\text{Н}_1}$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{R}_N$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ (сила $\vec{F}_{\text{Н}_1}$ стремится повернуть тормозной барабан против хода стрелки часов, а $\vec{F}_{\text{тр}}$ противодействует такому стремлению). Полученная система внешних сил – плоская произвольная. Следовательно, может быть составлено 3 независимых уравнения равновесия, например: уравнения проекций сил на координатные оси x и y, а также уравнение моментов сил относительно точки C.

$$\sum F_{ix}^e = X_C + F_{\text{тр}} \cdot \cos\alpha = 0; \qquad (5)$$

$$\sum F_{iy}^e = Y_C - G_1 - R_N - F_{\text{Н}_1} \cdot \sin\alpha = 0; \qquad (6)$$

$$\sum M_{iC}^e = F_{\text{Н}_1} \cdot R - F_{\text{тр}} \cdot 2R = 0. \qquad (7)$$

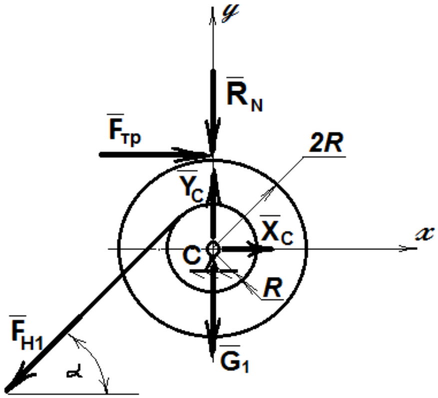


Рис. 18. Равновесие тормозного барабана

По условию задания (найти минимальное — механическая система 2 или максимальное — механическая система 1 значения силы $(\vec{P})$) механическая система находится в состоянии предельного равновесия, при котором существует линейная зависимость силы трения покоя (сцепления) от нормальной реакции

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{тр}} \cdot R_N. \tag{8}$$

На основании аксиомы равенства действия и противодействия следует (рис. 17 и 18):

$$F_{\text{Н1}} = F_{\text{Н}}. \tag{9}$$

Из уравнения (7) с учетом равенства (9) получим

$$F_{\text{тр}} = \frac{F_{\text{Н1}} \cdot R}{2R} = \frac{7,637}{2} = 3,818 \ \text{кН}.$$

Из равенства (8) следует

$$R_N = \frac{F_{\text{тр}}}{f_{\text{тр}}} = \frac{3,818}{0,2} = 19,092 \ \text{кН}.$$

Из уравнения (5) выразим

$$X_C = -F_{\text{тр}} \cdot \cos\alpha = -3,818 \cdot \cos 45° = -2,700 \ \text{кН}.$$

Равенство (6) позволяет определить

$$Y_C = G_1 + R_N + F_{\text{Н1}} \cdot \sin\alpha = 5 + 19,092 + 7,637 \cdot \sin 45° = 29,492 \ \text{кН}.$$

Равновесие балки *OE* (механическая система показана на рис. 15). Расчетная схема внешних сил: активных $(\vec{P}, \vec{G})$, реакций связей

$\left(\vec{X}_O,\ \vec{Y}_O,\ \vec{R}'_N,\ \vec{F}'_{\text{тр}}\right)$, показана на рис. 19. Эта система — произвольная плоская система сил. Уравнения равновесия (уравнения проекций сил на оси x и y и уравнение моментов сил относительно центра O) в таком случае имеют вид:

$$\sum F_{ix}^e = X_O + F'_{\text{тр}} = 0; \tag{10}$$

$$\sum F_{iy}^e = Y_O - G + R'_N + P = 0; \tag{11}$$

$$\sum M_{iO}^e = R'_N \cdot a - F'_{\text{тр}} \cdot c + P(a+b) - G(a+b+e) = 0. \tag{12}$$

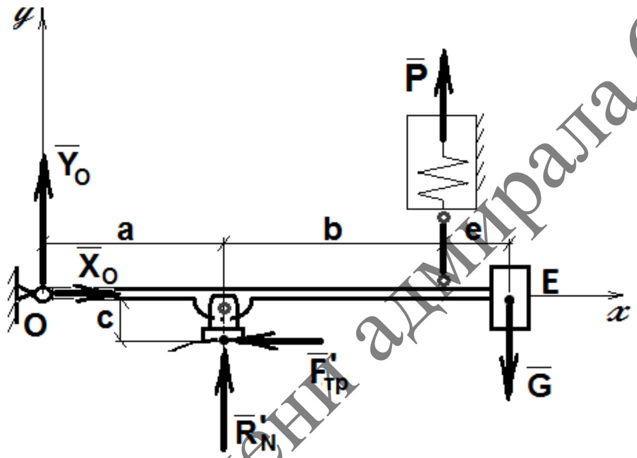


Рис. 19. Равновесие тела OE

На основании аксиомы равенства действия и противодействия можно отметить: $R'_N = R_N = 19{,}092$ кН, $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 3{,}818$ кН, сила $\vec{R}'_N$ направлена противоположно силе $\vec{R}_N$, а сила $\vec{F}'_{\text{тр}}$ — противоположна силе $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 18, 19).

Решая уравнение (10), получим

$$X_O = F'_{\text{тр}} = 3{,}818 \text{ кН}.$$

Из уравнения (12) определим величину силы P (в кН)

$$P = \frac{G \cdot (a+b+e) + F'_{\text{тр}} \cdot c - R'_N \cdot a}{(a+b)} =$$

$$= \frac{3(20+25+10) + 3{,}818 \cdot 80 - 19{,}092 \cdot 20}{20+20} = 1{,}97.$$

В этом случае $P = P_{\max}$.

Из уравнения (11) следует

$$Y_O = G - R'_N - P = 3 - 19{,}97 - 1{,}97 = -18{,}061\,\text{кН}.$$

Действительные направления реакций $\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Y}_O$, значения которых оказались отрицательными, противоположны показанным на расчетных схемах (рис. 18, 19).

Равновесие тормозной колодки B_1D (решение соответствует механической системе, показанной на рис. 16).

В этом случае к механической системе приложена плоская произвольная система сил: активная сила $\vec{P}$, реакции внешних связей $\left(\vec{R}_{A_1}, \vec{R}_{B_1}, \vec{R}'_N, \vec{F}'_{\text{тр}}\right)$ (сила $\vec{F}'_{\text{тр}}$ приводит к перекосу стержня B_1D в пределах зазора в опорах и прижимает его к точкам A_1 и B_1) — рис. 20. О направлениях и величинах сил $\vec{R}'_N$ и $\vec{F}'_{\text{тр}}$ — пояснения в разделе: равновесие балки *OE*.

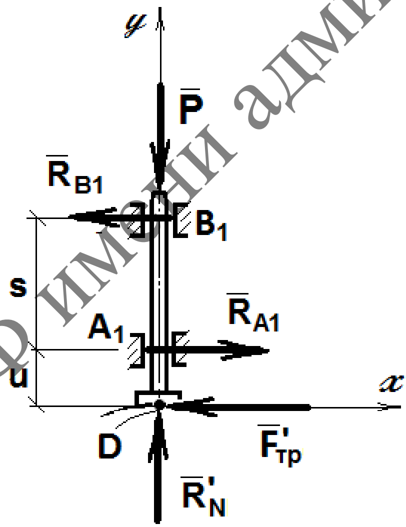


Рис. 20. Равновесие тормозной колодки

Известно, что в случае указанной системы сил можно составить 3 независимые уравнения равновесия (например, уравнения проекций сил на оси *x*, *y* и уравнение моментов сил относительно полюса A_1):

$$\sum F_{ix}^e = R_{A1} - R_{B1} - F'_{\text{тр}} = 0; \qquad (13)$$

$$\sum F_{iy}^{e} = R'_N - P = 0; \qquad (14)$$

$$\sum M_{iA_1}^{e} = R_{B_1} \cdot s - F'_{\text{тр}} \cdot u = 0. \qquad (15)$$

Аксиома равенства действия и противодействия позволяет записать

$$F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}};\ R'_N = R_N. \qquad (16)$$

Из уравнения (14) получим

$$P = R'_N = R_N = 19{,}092 \text{ кН}, \ (P = P_{\min}).$$

Из равенства (15) следует

$$R_{B_1} = \frac{F'_{\text{тр}} \cdot u}{s} = \frac{F_{\text{тр}} \cdot u}{s} = \frac{3{,}818 \cdot 5}{15} = 1{,}273 \text{ кН}.$$

Из выражения (13) получим

$$R_{A_1} = R_{B_1} + F'_{\text{тр}} = 1{,}273 + 3{,}818 = 5{,}091 \text{ кН}.$$

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Что называют механической связью, наложенной на твердое тело?
2. Что называют реакциями связей?
3. В чем заключается принцип освобождаемости от связей?
4. Основные виды опор – указать их наименование, реакции связей?
5. Из каких составляющих складывается реакция шероховатой поверхности?
6. От чего зависит и чему равна максимальная сила трения скольжения?
7. Что определяет величину коэффициента трения скольжения?
8. Что называют углом трения, конусом трения?
9. Какая зависимость связывает коэффициент трения и угол трения?
10. Что называют проекцией силы на ось?
11. Что называют моментом силы относительно точки?
12. Чему равен момент силы относительно точки?
13. Что называют плечом силы относительно точки?
14. Как назначают знак момента силы относительно точки на плоскости?
15. Изменится ли момент силы относительно неподвижного центра при переносе точки приложения силы вдоль линии её действия?
16. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

17. Что называют парой сил?

18. Чему равен модуль момента пары сил?

19. Чему равно плечо пары сил?

20. Как назначают знак момента пары сил?

21. Что означает выражение «привести силу к центру»?

22. Что получается в результате выполнения этой операции?

23. Чему равен момент присоединенной пары сил?

24. Что называют главным вектором системы сил?

25. Что называют главным моментом системы сил?

26. Зависит ли главный вектор системы сил от выбора центра приведения?

27. Зависит ли главный момент системы сил от выбора центра приведения?

28. Можно ли главный вектор системы сил отождествлять с равнодействующей?

29. К чему может быть приведена система сил, если ее главный вектор отличен от нуля, а главный момент равен нулю?

30. К чему может быть приведена система сил, если ее главный вектор равен нулю, а главный момент отличен от нуля?

31. К чему может быть приведена система сил, если ее главный вектор и главный момент не равны нулю?

32. В каком состоянии пребывает произвольная система сил, если ее главный вектор и главный момент равны нулю?

33. Сколько независимых уравнений равновесия, какие именно, можно составить для твердого тела, пребывающего в равновесии под действием плоской произвольной системы сил?

34. Сколько независимых уравнений равновесия и какие можно составить для твердого тела, пребывающего в равновесии под действием плоской параллельной системы сил?

35. Сколько независимых уравнений равновесия и какие можно составить для твердого тела, пребывающего в равновесии под действием плоской сходящейся системы сил?

36. Какие системы называют статически определимыми, какие – статически неопределимыми?

3. Задание.
Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рис. 21 – 23. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номер варианта (рис. 21–23)	Силы, кН			Размеры, см					Номер варианта (рис. 21–23)	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	*T*	*G*	*a*	*b*	*c*	*R*	*r*		*Q*	*T*	*G*	*a*	*b*	*c*	*R*	*r*
1	2	–	20	20	30	10	15	5	16	4	–	2	50	30	–	–	–
–2	4	–	2	20	10	30	10	10	17	2	–	1	15	10	20	20	5
3	20	–	18	400	400	450	–	–	18	6	–	2	60	40	60	–	–
4	3	–	2	30	20	40	15	10	19	–	8	2	20	30	40	20	15
5	5	–	3	30	40	20	20	15	20	4	–	–	60	40	20	–	–
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	–	–	40	60	30	–	–
7	–	3	1	30	10	5	18	6	22	–	–	5	20	50	30	–	–
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	–	–	4	40	30	50	–	–
9	5	–	3	20	15	10	30	40	24	5	–	2	–	–	–	–	–
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	–	–	3	50	50	60	–	–
11	–	2	1	20	30	15	15	10	26	–	–	1	20	60	40	–	–
12	4	–	1	25	20	8	15	10	27	10	–	–	50	30	50	–	–
13	10	–	5	40	30	20	25	15	28	35	–	32	400	200	200	–	–
14	–	2	1	30	90	20	30	10	29	–	4	3	15	20	15	15	10
15	3	–	2	60	20	40	20	5	30	5	–	–	40	40	10	–	–

Примечания: 1. Считать, что в вариантах 16, 18, 22 – 26 петли не препятствуют перемещению рамы вдоль *AB*.

2. В вариантах 20 и 21 соприкасающиеся поверхности считать абсолютно гладкими.

Методика решения задач о равновесии пространственной системы сил

Перед выполнением задания на тему «Определение реакций опор твердого тела» («Статика в пространстве») необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

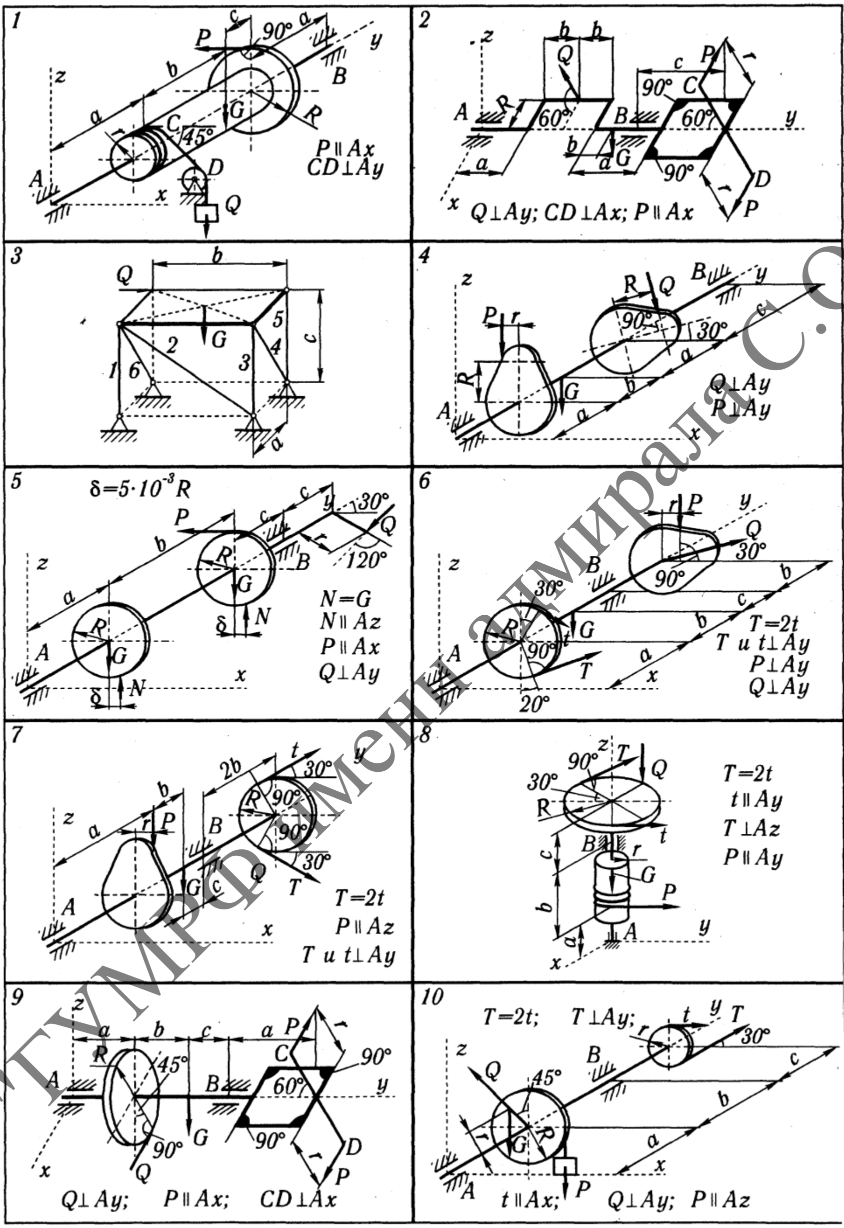

1
P ∥ Ax
CD ⊥ Ay
45°
90°
2
Q ⊥ Ay; CD ⊥ Ax; P ∥ Ax
60°
90°
3
4
Q ⊥ Ay
P ⊥ Ay
90°
30°
5
δ=5·10⁻³R
N=G
N ∥ Az
P ∥ Ax
Q ⊥ Ay
30°
120°
6
T=2t
T и t ⊥ Ay
P ⊥ Ay
Q ⊥ Ay
30°
90°
20°
7
T=2t
P ∥ Az
T и t ⊥ Ay
30°
90°
8
T=2t
t ∥ Ay
T ⊥ Az
P ∥ Ay
90°
30°
9
Q⊥ Ay; P ∥ Ax; CD ⊥ Ax
45°
60°
90°
10
T=2t; T ⊥ Ay;
t ∥ Ax; Q ⊥ Ay; P ∥ Az
45°
30°

Рис. 21

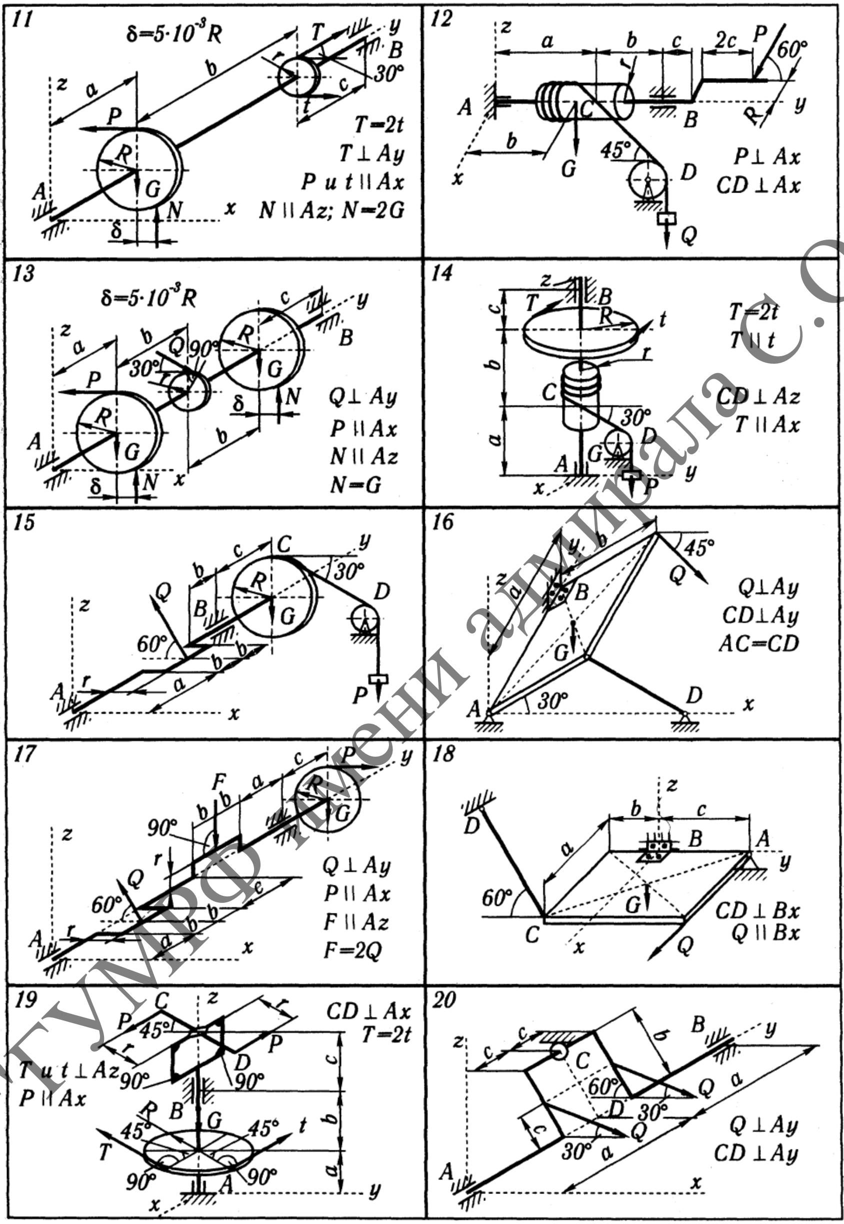

11
δ=5·10^-3 R
T=2t
T ⊥ Ay
P и t || Ax
N || Az; N=2G
12
P ⊥ Ax
CD ⊥ Ax
13
δ=5·10^-3 R
Q ⊥ Ay
P || Ax
N || Az
N=G
14
T=2t
T || t
CD ⊥ Az
T || Ax
15
16
Q⊥Ay
CD⊥Ay
AC=CD
17
Q ⊥ Ay
P || Ax
F || Az
F=2Q
18
CD ⊥ Bx
Q || Bx
19
CD ⊥ Ax
T=2t
T и t ⊥ Az
P || Ax
20
Q ⊥ Ay
CD ⊥ Ay

Рис. 22

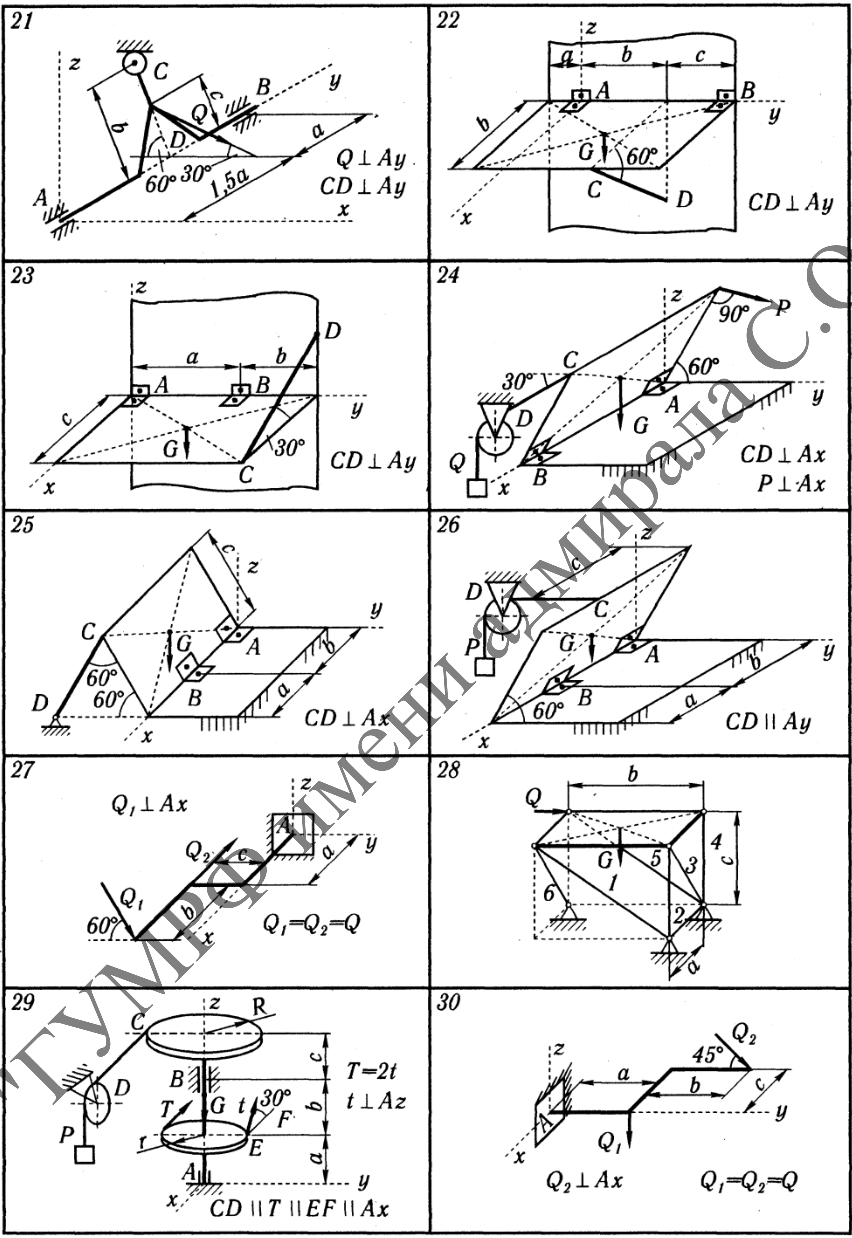

21
Q ⊥ Ay
CD ⊥ Ay
22
CD ⊥ Ay
23
CD ⊥ Ay
24
CD ⊥ Ax
P ⊥ Ax
25
CD ⊥ Ax
26
CD || Ay
27
Q1 ⊥ Ax
Q1=Q2=Q
28
29
T=2t
t ⊥ Az
CD || T || EF || Ax
30
Q2 ⊥ Ax
Q1=Q2=Q

Рис. 23

Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру.

Образец титульного листа приведен в прил. 1.

При выполнении данного задания в дополнение к знаниям и умениям, приобретенным курсантом (студентом) при выполнении предыдущих заданий по статике используются следующие сведения.

Моменты силы относительно координатных осей

Момент силы относительно оси можно найти с помощью алгоритма:

1. Найти проекцию силы на плоскость, перпендикулярную этой оси.

2. Определить плечо найденной проекции силы относительно точки пересечения указанных в п. 1 оси и плоскости. Плечо — кратчайшее расстояние от точки пересечения оси с плоскостью до линии действия проекции силы.

3. Вычислить произведение проекции силы на плечо.

4. Правило знаков: если при взгляде с положительного конца оси видно, что проекция силы стремится повернуть свое плечо вокруг точки пересечения оси с плоскостью против хода часовой стрелки, то момент силы положительный, иначе — отрицательный.

$$M_{Ox} = \pm F_{yz} \cdot h_{yz};$$

$$M_{Oy} = \pm F_{xz} \cdot h_{xz};$$

$$M_{Oz} = \pm F_{xy} \cdot h_{xy}.$$

Например, для вычисления момента M_{Oz} силы $\vec{F}$ относительно оси O_z, нужно выполнить действия (рис. 24):

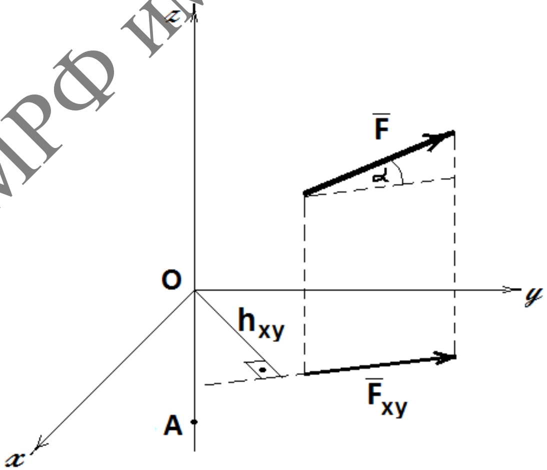


Рис. 24. Момент силы относительно координатной оси

1. Определяем проекцию F_{xy} силы $\vec{F}$ на координатную плоскость (xy), перпендикулярную оси O_z: $F_{xy} = F \cdot \cos\alpha$.

2. Находим плечо h_{xy} проекции силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки O пересечения оси O_z с плоскостью Oxy.

3. Записываем алгебраическую величину момента с положительным знаком $M_{Az} = +F_{xy} \cdot h_{xy}$, так как при взгляде с положительного направления оси O_z видно, что в плоскости (xy) проекция силы $\vec{F}_{xy}$ стремится повернуть свое плечо h_{xy} вокруг точки O против хода часовой стрелки.

Частные случаи, в которых момент силы относительно координатной оси равен нулю

Из приведенного выше алгоритма следует, что если выполнено одно из двух условий, момент силы относительно оси будет равен нулю:

1. сила параллельна оси — в этом случае проекция силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, будет равна нулю или
2. линия действия силы пересекает ось — тогда плечо проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости (см. п. 1 последовательности действий в определении момента силы относительно оси — с. 34, 35) будет равно нулю.

Моменты пары сил относительно координатных осей

В случае, когда плоскость действия пары сил не перпендикулярна координатной оси, следует найти проекцию пары сил на плоскость, перпендикулярную указанной оси, и затем вычислить момент найденной проекции пары сил (рис. 25):

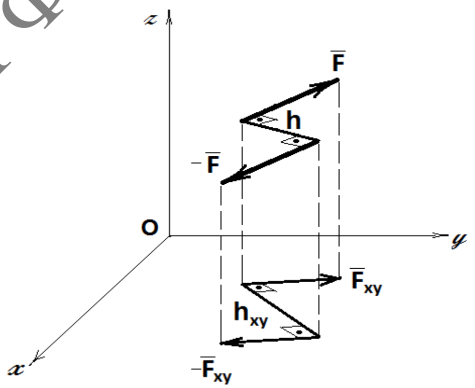


Рис. 25. Момент пары сил относительно координатной оси

$$M_{Ox} = \pm F_{yz} \cdot h_{yz};$$

$$M_{Oy} = \pm F_{xz} \cdot h_{xz};$$

$$M_{Oz} = \pm F_{xy} \cdot h_{xy}.$$

Правило знаков: если при взгляде с положительного конца оси видно, что проекции сил, образующих пару, стремятся повернуть свое плечо против хода часовой стрелки, то момент пары сил положительный, иначе — отрицательный.

Например, момент M_{Oz} пары сил, показанный на рис. 25, относительно оси O_z отрицательный

$$M_{Oz}\left(\vec{F}, -\vec{F}\right) = M\left(\vec{F}_{xy}, -\vec{F}_{xy}\right) = -F_{xy} \cdot h_{xy}.$$

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи следует начинать с условия: рисунка — схемы механической системы, заданной по условию задания; записать, что дано и что требуется найти. Решение должно содержать рисунок — расчетные схемы с указанием размеров и всех векторов, заданных в условии задания и определяемых решением; метод — каким образом составлены уравнения; уравнения в общем виде; уравнения с численными значениями; значения вычисленных характеристик с указанием единиц измерения. (Допускается составить подробные уравнения равновесия, в которых неизвестные — только реакции связей, и не решать их). Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю.

Далее приведен рекомендованный алгоритм (последовательность) решения задач статики.

1. Выделить объект равновесия (тело (элемент) или систему тел, равновесие которых будем рассматривать) и изобразить его как свободное тело (использование аксиомы освобождения от связей).

2. Приложить к объекту равновесия активную нагрузку (силы, пары сил) в соответствии с условием задачи.

3. Взамен отброшенных связей приложить к телу реакции этих связей, которые обычно определяют в п. 1.

4. Выполнить анализ полученной системы сил (активных и реакций связей), ответив на вопросы:

– Получена система сил, лежащих в одной плоскости, или пространственная? (Убедиться, что система сил пространственная)

– Каково взаимное расположение линий действия сил? Является задача статически определённой?

5. Записать уравнения равновесия (проекций сил на координатные оси и моментов сил относительно координатных осей *x*, *y*, *z*, указанных на расчетных схемах). Выполнить над уравнениями действия с целью определения неизвестных. (Допускается составить подробные уравнения равновесия, в которых неизвестные — только реакции связей, и не решать их).

6. Проанализировать полученные результаты.

Пример выполнения задания

Дано: крышка ящика *ABDE* весом $G = 240$ Н удерживается в открытом положении (угол $\alpha = 60°$) при помощи стержня *EK*, образующего с горизонталью угол $\beta = 60°$ (рис. 26). Сдвигающая сила $P = 20$ Н параллельна оси *Ax*. Размеры крышки: $AB = 1$ м, $AE = 0{,}6$ м.

Определить реакции подпятника *A* и подшипника *B*, а также усилие в стержне *EK*.

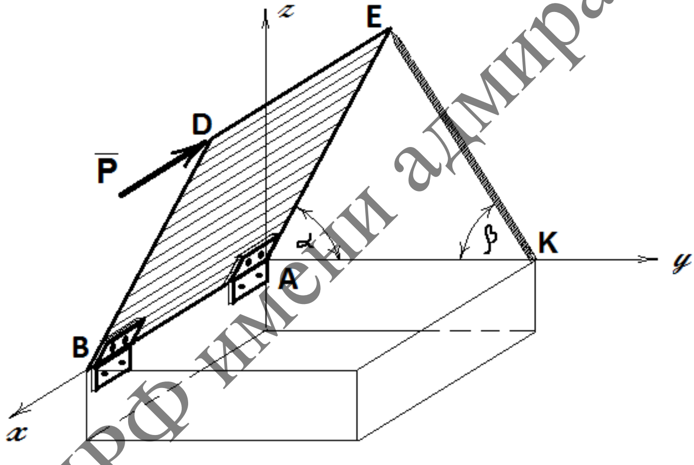


Рис. 26

Решение

Принятые обозначения: вектор силы $\vec{F} \equiv F$, величина силы $\left|\vec{F}\right| \equiv F$.

Выделим объект равновесия — крышку ящика *ABDE*. Рассматриваем равновесие внешних сил, приложенных к объекту равновесия. Крышка имеет две закрепленные точки: подпятник *A* и подшипник *B*. Для упрощения уравнений равновесия начало координат помещаем в одну из этих точек *A* и ось *x* проводим через обе точки (рис. 27).

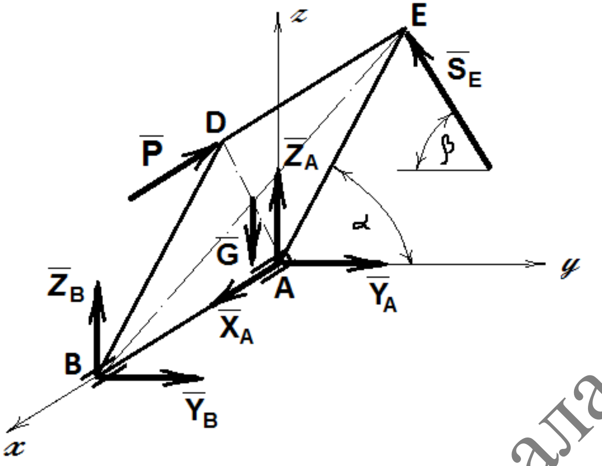


Рис. 27

Представим крышку как свободное тело, мысленно удалив наложенные связи. Взамен отброшенных связей прикладываем реакции этих связей. Реакция стержня S_E направлена вдоль стержня. Подшипник B схематически представляет собой кольцо, сквозь которое проходит ось, скрепленная с крышкой. Подшипник не ограничивает перемещение крышки вдоль оси x, а препятствует перемещению в плоскости, перпендикулярной этой оси. Разложим полную реакцию подшипника на составляющие Y_B и Z_B, направив их параллельно осям y и z.

Подпятник A схематически представляет собой совокупность такого же кольца и опорной плоскости. Благодаря наличию кольца реакция подпятника имеет составляющие Y_A и Z_A, а опорная плоскость дает составляющую X_A. Направим и эти силы вдоль соответствующих осей координат.

Приложим к объекту равновесия внешнюю активную (задаваемую) нагрузку в соответствии с условием задачи, т. е. сосредоточенную силу P и вес крышки G — в точке пересечения диагоналей прямоугольника $ABDE$, считая крышку однородной).

Шесть неизвестных сил — реакций связей X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, S_E могут быть определены с помощью шести уравнений равновесия

$$\sum F_{ix}^e = 0;$$

$$\sum F_{iy}^e = 0;$$

$$\sum F_{iz}^e = 0;$$

$$\sum M_{iOx}^{e} = 0;$$

$$\sum M_{iOy}^{e} = 0;$$

$$\sum M_{iOz}^{e} = 0.$$

При составлении уравнений моментов следует учитывать, что если линия действия силы параллельна оси или пересекает ее, то момент этой силы относительно оси равен нулю.

Чтобы облегчить вычисление моментов сил относительно осей координат и проекций сил на оси координат, выполним прямоугольные проекции крышки и системы сил на три координатные плоскости (каждая плоскость перпендикулярна одной из координатных осей) — рис. 28 – 30.

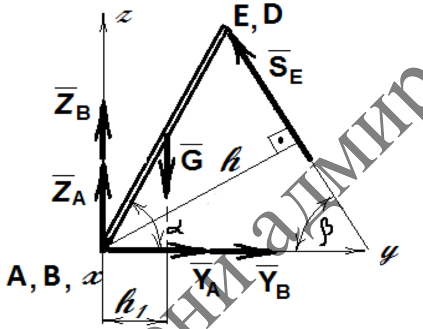


Рис. 28

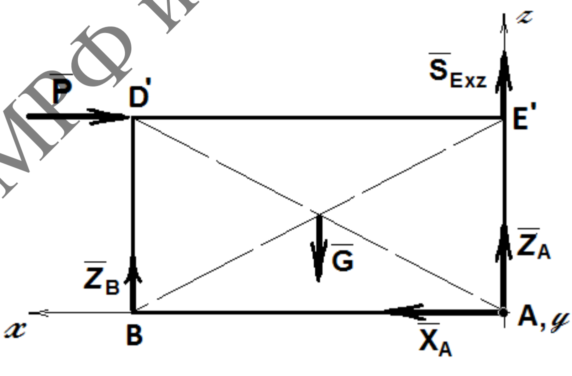


Рис. 29

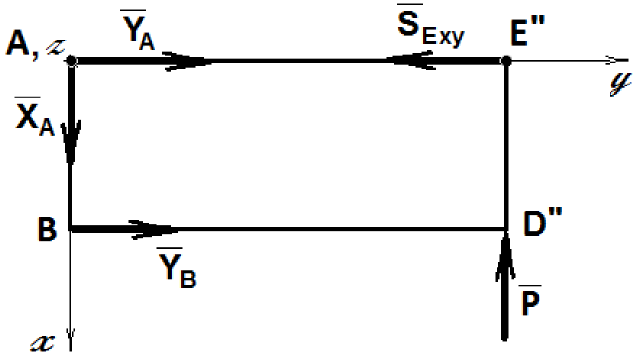


Рис. 30

Составим уравнения проекций сил на оси z и y, а также уравнение моментов относительно оси Ax, используя рис. 28:

$$\sum F^E_{iy} = Y_A + Y_B - S_E \cdot \cos\beta = 0; \tag{1}$$

$$\sum F^E_{iz} = Z_A + Z_B + S_E \cdot \sin\beta - G = 0; \tag{2}$$

$$\sum M^E_{iAx} = S_E \cdot h - G\, h_1 = 0, \tag{3}$$

где h — плечо относительно точки A проекции силы S_E на плоскость Ayz,: $h = AE \cdot \sin 60° = 0{,}52$ м; $h_1 = (AE/2)\cdot\cos\alpha$ (проекция силы S_E на плоскость Ayz равна самой силе).

После подстановки численных значений уравнения (1) – (3) принимают вид

$$Y_A + Y_B - S_E \cdot 0{,}5 = 0; \tag{4}$$

$$Z_A + Z_B + S_E \cdot 0{,}87 - 240 = 0; \tag{5}$$

$$S_E \cdot 0{,}52 - 36 = 0. \tag{6}$$

Система трех алгебраических уравнений (4) – (6) содержит пять неизвестных, из которых пока может быть найдено только одно

$$S_E = 36/0{,}52 = 69{,}23 \text{ Н}.$$

Составим уравнения проекций сил на ось x и моментов относительно оси Ay, используя рис. 29. Отметим, что на рис. 29 проекцию силы S_E на плоскость Axz определяем по формуле: $S_{Ezx} = S_E \cdot \sin\beta$, а расстояние $AE' = AE \cdot \sin\alpha = 0{,}6 \cdot \sin 60° = 0{,}52$ м.

$$\sum F^E_{ix} = X_A - P = 0; \tag{7}$$

$$\sum M^E_{iAy} = G \cdot AB/2 - P \cdot AE' - Z_B \cdot AB = 0. \tag{8}$$

После подстановки численных значений уравнения (7), (8) получают вид:

$$X_A - 20 = 0; \qquad (9)$$

$$120 - 10{,}4 - Z_B = 0. \qquad (10)$$

Откуда находим X_A = 20 Н и Z_B= 109,6 Н.

Составим уравнения моментов относительно оси Az, используя рис. 30. Отметим, что на рис. 30 проекция силы S_E на плоскость Axy определяется выражением: $S_{Exy} = S_E \cdot \cos\beta$, а расстояние $AE'' = AE \cdot \cos\alpha = 0{,}6 \cdot \cos 60° = 0{,}3$ м

$$\sum M^E_{iAz} = P \cdot AE'' + Y_B \cdot AB = 0. \qquad (11)$$

После подстановки численных значений уравнение (11) принимает вид

$$6 + Y_B = 0, \qquad (12)$$

откуда $Y_B = -6$ Н.

Подставляя в уравнения (1), (2) значения $Y_B = -6$ Н; S_E = 69,23 Н и Z_B= = 109,6 Н, определяем Y_A и Z_A:

$$Y_A - 6 - 69{,}23 \cdot \cos 60° = 0; \qquad (13)$$

$$Z_A + 109{,}6 + 69{,}23 \cdot \sin 60° - 240 = 0, \qquad (14)$$

из которых находим Y_A = 40,62 Н и Z_A= 70,42 Н.

Найденные реакции связей:

$$X_A = 20 \text{ Н}, Y_A = 40{,}62 \text{ Н}, Z_A = 70{,}42 \text{ Н};$$

$$Y_B = -6 \text{ Н}, Z_B = 109{,}6 \text{ Н};$$

$$S_E = 69{,}23 \text{ Н};$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{20^2 + 40{,}62^2 + 70{,}42^2} = 83{,}72 \text{ Н};$$

$$R_B = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{6^2 + 109{,}6^2} = 109{,}76 \text{ Н}.$$

Значение реакции связи Y_B оказалось отрицательным, следовательно, ее действительное направление противоположно показанному на рис. 27, 28 и 30. Усилие в стержне EK по величине равно реакции стержня S_E и направлено противоположно силе S_E, показанной на рис. 28.

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Что называют вектором момента силы относительно точки?

2. Чему равен модуль момента силы относительно точки?

3. Как выразить момент силы относительно точки в виде векторного произведения?

4. Момент силы относительно точки есть вектор — связанный, скользящий, свободный?

5. Что называют моментом силы относительно оси?

6. Когда момент силы относительно оси равен нулю?

7. При каком направлении силы величина ее момента относительно данной оси будет наибольшей?

8. Как определяют знак момента силы относительно оси?

9. Как связаны момент силы относительно оси и момент той же силы относительно точки, лежащей на этой оси?

10. Как направлен вектор момента пары сил?

11. Чему равен модуль момента пары сил?

12. Как назначают знак момента пары сил?

13. Можно ли выразить момент пары сил в виде векторного произведения?

14. Момент пары сил есть вектор — связанный, скользящий, свободный?

15. Существует ли в плоскости действия пары точка, относительно которой момент этой пары сил равен нулю?

16. Чему равен момент пары сил относительно любой точки в пространстве?

17. Как производят сложение пар сил в пространстве?

18. Основные виды пространственных связей: их названия и реакции?

19. Что называют главным вектором системы сил?

20. Что называют главным моментом системы сил?

21. Зависит ли главный вектор системы сил от выбора центра приведения?

22. Зависит ли главный момент системы сил от выбора центра приведения?

23. Сколько независимых уравнений равновесия, какие именно, можно составить для твердого тела, находящегося в равновесии под действием пространственной произвольной системы сил?

24. Сколько независимых уравнений равновесия, и какие именно можно составить для твердого тела, пребывающего в равновесии под действием пространственной системы параллельных сил?

25. Сколько независимых уравнений равновесия, и какие уравнения можно составить для твердого тела, пребывающего в равновесии под действием пространственной системы сходящихся в точке сил?

26. Чему равен главный вектор системы пар сил, действующих на твердое тело?

27. Как формулируются условия равновесия твердого тела, при действии на него системы пар сил?

КИНЕМАТИКА

4. Кинематика точки

4.1. Задание. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории. Необходимые для решения данные приведены в табл. 4.

Перед выполнением задания на тему «**Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения**» («Кинематика точки») необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи следует начинать с условия: записать, что дано и что требуется найти. Решение должно содержать рисунок, включающий траекторию точки, с указанием положения точки на траектории в момент времени t_1. На рисунке нужно изобразить проекции вектора скорости и вектора ускорения точки на оси координат x и y в данный момент времени, а также векторы скорости, полного, касательного и нормального ускорений точки. Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю. Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру. Образец титульного листа приведен в прил. 1.

Задание на тему «Кинематика точки» может быть решено в указанной последовательности:

1. Получить уравнение траектории точки в координатной форме, исключив из заданных уравнений движения параметр — время t.

2. Определить положение точки на траектории в указанный момент времени.

3. Определить проекции вектора скорости на оси координат x, y, модуль вектора скорости и изобразить их на рисунке.

4. Определить проекции ускорения точки на оси координат x, y, модуль полного ускорения точки, ее касательное и нормальное ускорения и изобразить их на рисунке.

5. Определить радиус кривизны траектории точки.

6. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 4

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1.	$-2t^2 + 3$	$-5t$	0,5
2.	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1,0
3.	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1,0
4.	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2,0
5.	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	1,0
6.	$3t^2 + 2$	$-4t$	0,5
7.	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1,0
8.	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1,0
9.	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2,0
10.	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1,0
11.	$-4t^2 + 1$	$-3t$	0,5
12.	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1,0
13.	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1,0
14.	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2,0
15.	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1,0
16.	$3t$	$4t^2 + 1$	0,5
17.	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1,0
18.	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1,0
19.	$-5t^2 - 4$	$3t$	1,0
20.	$2 - 3t - 6t^2$	$2 - 3t/2 - 3t^2$	0
21.	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1,0
22.	$7t^2 - 3$	$5t$	0,25
23.	$2 + 3t^2 + t$	$10 + 5t^2 + 5t/3$	1,0
24.	$-4\cos(\pi t/3) - 1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1,0
25.	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1,0
26.	$8\cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8\sin^2(\pi t/6) - 7$	1,0
27.	$-3 - 9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6) + 5$	1,0
28.	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1,0
29.	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1,0
30.	$2\cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2\sin(\pi t^2/3) + 3$	1,0

Перечень условных обозначений

t — время;

x, y, z — координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$;

s — дуговая координата точки, отсчитываемая по дуге траектории движения точки от заданного неподвижного начала отсчёта;

$\vec{r}$ — радиус-вектор точки;

r — модуль радиуса-вектора точки: $r = |\vec{r}|$;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты осей Ox, Oy, Oz декартовой системы координат $Oxyz$;

$\vec{V}$ — скорость точки;

V_τ — проекция скорости на касательную;

V — модуль скорости $V = |\vec{V}| = V_\tau$;

V_x=V_y=V_z — проекции скорости на оси Ox, Oy, Oz;

$\vec{a}$ — ускорение точки;

a_x, a_y, a_z — проекция ускорения на оси Ox, Oy, Oz;

$\vec{a}_\tau$ — касательное (тангенциальное) ускорение точки;

$a_{\tau к}$ — проекция ускорения на касательную;

$a_{\tau V}$ — проекция ускорения на скорость;

a_τ — модуль касательного ускорения: $a_\tau = |\vec{a}_\tau| = |a_{\tau к}| = |a_{\tau V}|$;

$\vec{a}_n$ — нормальное ускорение точки;

a_n — модуль нормального ускорения: $a_n = |\vec{a}_n|$;

ρ — радиус кривизны траектории точки.

Методические указания к выполнению задания

Задание на тему «Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения» («Кинематика точки») включено в состав курсовой работы, выполняемой курсантами всех специальностей и направлений подготовки.

Перед выполнением задания необходимо изучить тему «Кинематика точки» по конспекту лекций и по рекомендованному учебнику.

Ниже излагается порядок решения основных задач в теме «Кинематика точки»:

1) определение уравнения траектории движения точки;
2) определение скорости точки;
3) определение ускорений точки;
4) определение радиуса кривизны траектории точки.

Названные кинематические характеристики точки определяются относительно заданной системы отсчёта, которая в этой теме принимается неподвижной.

Рассмотрим решение указанных задач кинематики точки при каждом из трех способов задания её движения – естественном, координатном и векторном.

Определение уравнения траектории точки

При естественном способе задания движения точки траектория точки указана в условии задания. Поэтому задача определения уравнения траектории точки в этом случае не возникает.0

При координатном способе движение точки задается уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1}$$

В случае, если уравнения движения точки не заданы, их необходимо составить самостоятельно с помощью схемы механической системы.

Пример 1. Линейка эллипсографа $AB = l$ скользит концом A по оси абсцисс, а концом B — по оси ординат (рис. 31). Линейка приводится в движение кривошипом $OC = 0{,}5\,l$, шарнирно прикреплённым к её середине C. Расстояние $AM = a$ задано. Угол поворота φ кривошипа является заданной функцией времени $\varphi = \varphi(t) = kt$, где k — заданное постоянное число.

Составить уравнения движения точки M линейки эллипсографа.

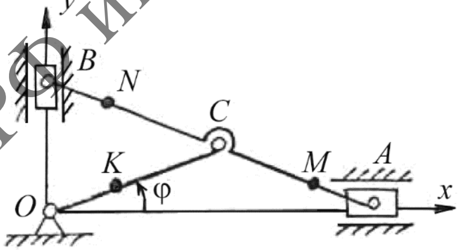


Рис. 31

Уравнения движения точки (1) одновременно являются параметрическими уравнениями траектории точки. Для нахождения уравнений траектории точки в координатной форме необходимо из уравнений движения (1) исключить параметр — время t. Например, из первого уравнения (1) определить $t = f\,(x)$ и подставить это выражение во второе и третье уравнения системы (1).

Решение. Для составления уравнений движения точки M рассмотрим треугольник OAC. Он равнобедренный: $OC = AC = 0{,}5\,l$, следовательно, $\angle\ COA = \angle\ CAO = \varphi = kt$. Тогда координаты точки M будут:

$$x = BM \cdot \cos\varphi = (l - a)\cdot \cos kt = x(t);$$

$$y = AM \cdot \sin\varphi = a \cdot \sin kt = y(t).$$

$$\begin{aligned} y &= y\big(f(x)\big); \\ z &= z\big(f(x)\big). \end{aligned} \qquad (2)$$

Уравнения (2) — уравнения траектории точки в координатной форме.

Если точка движется в плоскости, например, Oxy, уравнениями её движения будут два уравнения

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t). \end{aligned} \qquad (3)$$

Для нахождения уравнения траектории точки в координатной форме исключим из уравнений (3) время t. Для чего, например, из второго уравнения системы (2), определим время как функцию y

$$t = f(y).$$

и, подставив в первое уравнение системы (3), получим

$$x = x(f(y))\ ; \qquad (4)$$

или

$$\varphi(x, y) = 0\ . \qquad (5)$$

Уравнение (4) или, что то же самое, (5) является уравнением траектории точки в координатной форме. Рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 2. Движение точки задано уравнениями

$$x = 2t;$$

$$y = t^2.$$

Найти уравнение траектории точки в координатной форме.

Решение. Из первого уравнения выразим параметр t через x: $t = x/2$ и подставим это выражение во второе уравнение. Получим

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Это уравнение параболы и есть искомое уравнение траектории точки в координатной форме. Учитывая, что $t \geq 0$ траектория точки — правая ветвь параболы (рис. 32).

Замечание. При наличии в уравнениях движения точки функций $\sin(f(t))$ и $\cos(f(t))$ целесообразно попытаться использовать тождество

$$\sin^2(f(t)) + \cos^2(f(t)) = 1.$$

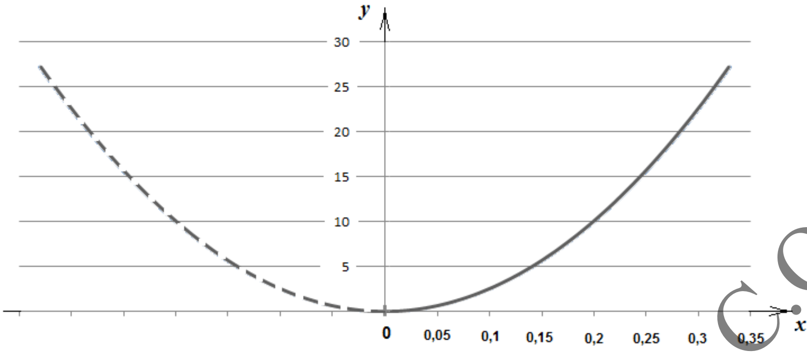


Рис. 32

Пример 3. Движение точки задано уравнениями:

$$x = a + b \cdot \cos(2\omega t);$$
$$y = c + d \cdot \sin(2\omega t), \qquad (6)$$

где a, b, c, d и ω — постоянные числа.

Определить уравнение траектории точки в координатной форме.

Решение. Преобразуем уравнения (6) следующим образом:

$$\frac{x-a}{b} = \cos(2\omega t);$$
$$\frac{y-c}{d} = \sin(2\omega t).$$

Возведем каждое из уравнений в квадрат и сложим

$$\frac{(x-a)^2}{b^2} + \frac{(y-c)^2}{d^2} = 1.$$

Полученное уравнение эллипса и есть уравнение траектории точки в координатной форме.

При векторном способе задания движения точки уравнение её движения имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Это векторное уравнение можно преобразовать к виду

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}, \qquad (7)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — проекции изменяющегося радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на оси координат x, y, z, соответственно. Эти проекции определяют изменение координат движущейся точки, они — уравнения движения точки в координатной форме.

Далее определение уравнения траектории точки проводится так же, как при координатном способе задания её движения (см. п. 1.1).

Пример 4. Движение точки задано уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = 3\cos(2t)\cdot\vec{i} + 3\sin(2t)\cdot\vec{j} \text{ (см)}.$$

Найти уравнение траектории точки.

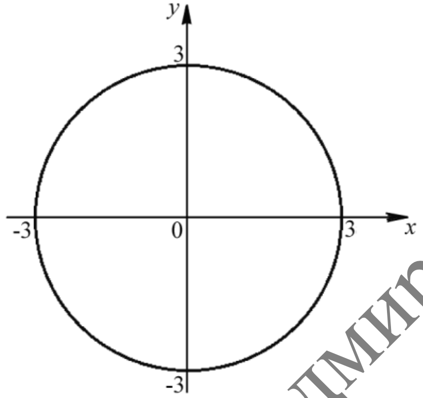


Рис. 33

Решение. Применяя равенство (7) определим уравнения движения точки в координатной форме:

$$\begin{aligned} x &= 3\cos(2t); \\ y &= 3\sin(2t). \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) являются также уравнениями траектории точки в параметрическом виде. Исключив из уравнений (8) время t, получим уравнение траектории точки в координатной форме

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Это уравнение окружности радиуса 3 см. (рис. 33).

Определение скорости точки

При естественном способе задания движения точки проекция скорости на касательную определяется формулой

$$V_\tau = \dot{s}.$$

Модуль скорости

$$V = \left|\vec{V}_\tau\right| = V_\tau .$$

Направление вектора скорости — по касательной к траектории точки в сторону движения. При этом если $V_\tau > 0$, то вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону возрастания дуговой координаты s; если $V_\tau < 0$ — то в противоположную сторону.

Пример 5. Точка движения по окружности радиуса $R = 5$ см по закону $s = 2t - t^3$ (см). Начало отсчёта дуговой координаты на плоскости Oxy принято в точке с координатами (5 см; 0 см). За положительное направление отсчёта дуговой координаты принято направление против хода часовой стрелки.

Определить вектор скорости точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Определим значение дуговой координаты точки в указанный момент времени

$$s = s(t_1) = 2 - 1 = 1 \text{ см.}$$

Этому значению дуговой координаты соответствуют декартовы координаты (в см):

$$x_1 = R \cdot \cos\left(\frac{s_1}{R}\right) = 5\cos\left(\frac{1}{5}\right) \approx 4{,}90;$$

$$y_1 = R \cdot \sin\left(\frac{s_1}{R}\right) = 5\sin\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0{,}99.$$

Угол между положительным направлением оси x и касательной к траектории точки, проведенной через точку траектории с координатами (4,90 см; 0,99 см), равен

$$\frac{\pi}{2} + \frac{s_1}{R} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5} \approx 1{,}77 \text{ рад} \approx 101{,}4°.$$

Вычислим проекцию скорости на касательную

$$V_\tau = \dot{s} = 2 - 3t^2.$$

В указанный момент времени $t_1 = 1$ с

$$V_{\tau 1} = 2 - 3\,t_1^2 = 2 - 3 = -1 \text{ см/с.}$$

Модуль скорости

$$V_1 = \left|\vec{V}_{\tau 1}\right| = 1 \text{ см/с.}$$

Так как проекция скорости на касательную отрицательна, то вектор скорости направлен в сторону убывания дуговой координаты. Следовательно, угол между положительным направлением оси x и вектором $\vec{V}_1$ равен

$$101{,}4° - 180° = -78{,}6°.$$

Итак, вектор скорости $\vec{V}_1$ имеет следующие характеристики:

а) точка приложения — точка на траектории, имеющая дуговую координату 1 см или, что то же, точка на плоскости Oxy с координатами (4,90 см; 0,99 см);

б) модуль вектора $\left|\vec{V}_1\right| = 1$ см/с;

в) направление — по касательной к траектории точки в сторону убывания дуговой координаты или, что то же, под углом –78,6° к оси x (рис. 34).

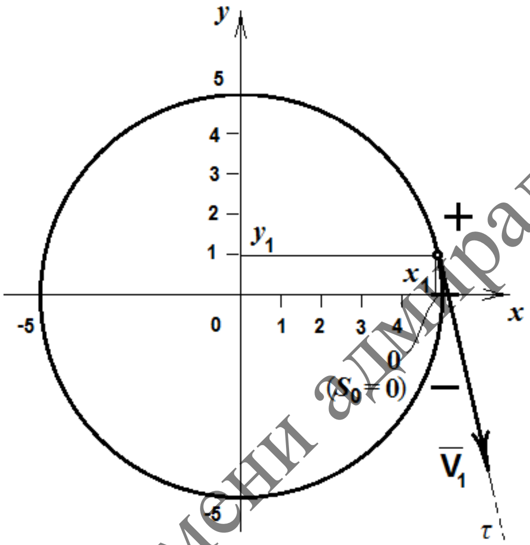


Рис. 34

При координатном способе задания движения точки вектор скорости точки равен

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}.$$

Проекции вектора скорости точки на координатные оси x, y, z определяются формулами:

$$V_x = \dot{x}(t);$$

$$V_y = \dot{y}(t);$$

$$V_z = \dot{z}(t).$$

Модуль скорости может быть найден

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Направление вектора скорости определяют направляющие косинусы:

$$\cos(x,\vec{V}) = \frac{V_x}{V};$$

$$\cos(y,\vec{V}) = \frac{V_y}{V};$$

$$\cos(z,\vec{V}) = \frac{V_z}{V}.$$

Пример 6. Движение точки задано уравнениями (x и y в см)

$$\begin{aligned} x &= 3\cos(\omega t); \\ y &= 3\sin(\omega t). \end{aligned} \qquad (9)$$

Определить скорость точки в момент времени $t_1 = \pi/3$ с. Значение ω принять равным $\omega = 0{,}5$ (рад/с).

Решение. Определим координаты точки в указанный момент времени, для чего, подставив в уравнения (9) вместо текущего времени t конкретный заданный момент времени t_1, получим (в см):

$$x_1 = 3\cdot\sin\omega t_1 = 3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}50;$$

$$y_1 = 2\cdot\cos\omega t_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}73.$$

Найденные координаты точки (x_1, y_1) являются первой характеристикой вектора скорости — точкой его приложения.

Вычислим далее проекции скорости на оси координат x, y:

$$V_x = \dot{x} = 3\omega\cos\omega t;$$

$$V_y = \dot{y} = 2\omega\sin\omega t.$$

В заданный момент времени $t_1 = \pi/3$ с проекции скорости (в см/с)

$$V_{x1} = 3\omega\cos\omega t_1 = 1{,}3;$$

$$V_{y1} = 2\omega\sin\omega t_1 = -0{,}5.$$

Модуль скорости в указанный момент времени равен (рис. 35)

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{1{,}3^2 + 0{,}5^2} \approx 1{,}39 \text{ см/с}.$$

Вычислим направляющие косинусы (косинусы углов между координатными осями и вектором скорости):

$$\cos(x,\vec{V}) = \frac{V_{x1}}{V} = \frac{1{,}3}{1{,}39} = 0{,}94;$$

$$\cos(y,\vec{V}) = \frac{V_{y1}}{V} = -\frac{0{,}5}{1{,}39} = -0{,}35.$$

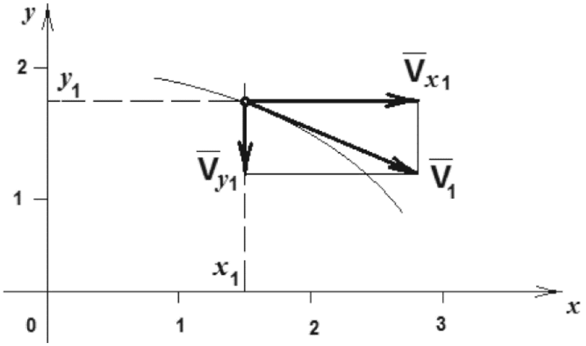


Рис. 35

Первому направляющему косинусу соответствует угол между осью x и вектором $\vec{V}_1$, равный ±20°, так как функция косинус положительна в 1-й и 4-й четвертях. Иначе говоря, в случае плоской задачи, по одному направляющему косинусу определяются два возможных направления вектора скорости. В данном случае — под углом ±20° к оси x. Для определения истинного направления вектора скорости определим второй угол — угол между осью y и вектором $\vec{V}_1$ В рассматриваемом примере он равен ±110°, так как функция косинус отрицательна во 2-й и 3-й четвертях (по отношению к оси y). Этим углам ±110° между осью у и вектором $\vec{V}_1$ соответствуют углы –20°, –160° между осью x и вектором $\vec{V}_1$. Сопоставляя углы, определенные по обоим направляющим косинусам, видим, что углы +20° и –160° между осью x и вектором $\vec{V}_1$ дают лишь предполагаемое направление вектора скорости, а угол –20° — истинное направление, так как только этот угол соответствует обоим направляющим косинусам.

Итак, вектор скорости $\vec{V}_1$ имеет следующие характеристики:

а) точка приложения — точка на плоскости (x, у) имеющая координаты (x_1 = 1,50 см; y_1 = 1,73 см);

б) модуль вектора скорости: V_1 = 1,39 (см/с);

в) направление вектора скорости — под углом –20° по отношению к оси x.

При векторном способе задания движения точки переход от векторного к координатному способу задания движения производят, применяя равенство (7). Далее вектор скорости определяют, как при координатном способе (см. п. 2.2).

Определение ускорений точки

При естественном способе задания движения точки векторы полного, касательного и нормального ускорений точки связаны равенством

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Проекцию полного ускорения точки на касательную к траектории точки (касательное ускорение $\vec{a}_\tau$) определяют по формуле

$$a_{\tau k} = \dot{V}_\tau = \ddot{s}.$$

Эта проекция имеет знак плюс, если направление касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ и направление оси τ совпадают, и знак минус, если они противоположны.

Модуль нормального ускорения определяется равенством

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Модуль полного ускорения точки равен (так как оси τ и n взаимноперпендикулярны)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Пример 7. Точка движется по окружности радиуса $R = 5$ см по закону

$$s = s(t) = 8 + 5t - t^2 \text{ см.}$$

Начало отсчёта дуговой координаты на плоскости Oxy принято в точке с координатами (5 см; 0 см). За положительное направление отсчёта дуговой координаты принято направление против хода часовой стрелки.

Определить касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение.

Определим скорость точки

$$V_\tau = \dot{s} = 5 - 2t;$$

$$V_{\tau 1} = 5 - 2t_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3 \text{ см/с;}$$

$$V_1 = V_{\tau 1} = 3 \text{ см/с.}$$

Определим проекцию ускорения на касательную

$$a_{\tau k} = \dot{V}_\tau = -2 \text{ см/с.}$$

Сопоставление знаков $a_{\tau k}$ и V_τ показывает, что векторы касательного ускорения $\vec{a}_{\tau 1}$ и скорости точки $\vec{V}_1$ направлены противоположно друг другу, т. е. движение точки замедленное (рис. 36). Так как $a_\tau = |a_{\tau k}| = 2 = \text{const}$, то движение точки равнозамедленное. Определим модуль нормального ускорения

$$a_{n1} = \frac{V_1^{\,2}}{\rho} = \frac{V_1^2}{R} = \frac{3^2}{5} = 1{,}8 \ \text{см/с}^2.$$

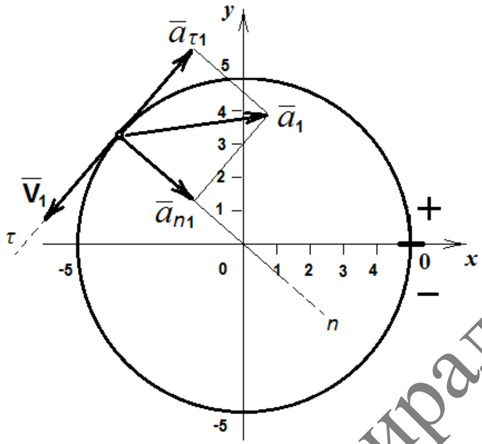


Рис. 36

Вычислим модуль полного ускорения точки

$$a_1 = \sqrt{a_{\tau 1}^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 1{,}8^2} = 2{,}7 \ \text{см/с}^2.$$

Угол между вектором скорости $\vec{V}_1$ и полным ускорением точки $\vec{a}_1$ равен

$$90° + \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{\tau 1}}{a_{n1}}\right) = 90° + \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1{,}8}\right) = 138°.$$

При координатном способе задания движения точки вектор полного ускорения точки $\vec{a}$ равен сумме

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Проекции вектора ускорения на оси координат *x*, *y*, *z* можно найти

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}(t);$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}(t);$$

$$a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}(t).$$

После этого модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора ускорения определяют с помощью направляющих косинусов

$$\cos(x, \vec{a}) = \frac{a_x}{a};$$

$$\cos(y, \vec{a}) = \frac{a_y}{a};$$

$$\cos(z, \vec{a}) = \frac{a_z}{a}.$$

Проекция касательного ускорения на скорость определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}.$$

Если эта проекция касательного ускорения точки положительная, то движение точки ускоренное, если отрицательная — движение замедленное.

Модуль нормального ускорения определяется по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Пример 8. Точка движется согласно уравнениям:

$$x = 30t \text{ м};$$

$$y = 20t - 5t^2 \text{ м}.$$

Определить ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Вычислим проекции вектора скорости на координатные оси *x*, *y*, *z*:

$$V_x = \dot{x} = 30 \text{ (м/с)} = \text{const};$$

$$V_y = \dot{y} = 20 - 10t.$$

При $t_1 = 1$ с проекции скорости в м/с:

$$V_{x1} = 30;$$

$$V_{y_1} = \dot{y}(t_1) = 20 - 10t_1 = 10.$$

Модуль скорости

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} \approx 31{,}62 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_1$ направлен по отношению к оси *x* под углом +18,43° (рис. 37).

Вычислим проекции на координатные оси ускорения точки (в м/с^2)

$$a_x = \dot{V}_x = 0;$$

$$a_y = \dot{V}_y = -10.$$

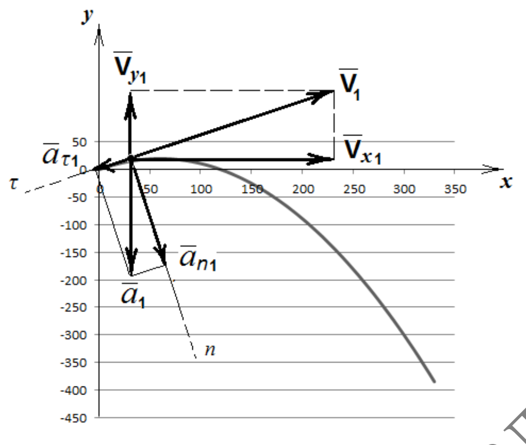


Рис. 37

Угол положительный при его отсчете от оси против хода стрелки часов и отрицательный — при отсчете по ходу часовой стрелки.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Вектор ускорения $\vec{a}_1$ направлен параллельно оси y в её отрицательную сторону и образует с положительным направлением оси x угол (–90°).

Определим проекцию касательного ускорения точки на скорость

$$a_{\tau V1} = \frac{V_{x1}a_{x1} + V_{y1}a_{y1}}{V_1} = \frac{30 \cdot 0 + 10 \cdot (-10)}{31{,}62} = -3{,}61 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус в этой проекции касательного ускорения показывает, что точка движется замедленно, т. е. вектор касательного ускорения $\vec{a}_{\tau 1}$ направлен противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$, и образует с положительным направлением оси угол 18,43° – 180° = –161,57°.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{10{,}0^2 + 3{,}16^2} = 9{,}49 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение образует с положительным направлением оси *x* угол –161,57° + 90° = –71,57° (см. рис. 37).

Все три вектора ускорений приложены к точке с координатами:

$$x_1 = x\,(t_1) = 30 \cdot 1 = 30 \text{ м};$$

$$y_1 = y\,(t_1) = 20 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 15 \text{ м}.$$

Если движение точки задано векторным способом, то по зависимости (7) производится переход к координатному способу, а затем ускорения точки определяются так же, как и при координатном способе задания её движения (см. п. 3.2).

Определение радиуса кривизны траектории точки

При естественном способе задания движения точки траектория точки в общем случае — пространственная кривая, и её уравнения обычно задаются в параметрической форме

$$x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t). \tag{10}$$

Тогда из уравнения движения точки

$$s = s(t);$$

можно выразить зависимость времени от дуговой координаты

$$t = f(s); \tag{11}$$

и подставить выражение (11) в уравнения (10) траектории точки, после чего получим

$$x = x(f(s)) = x(s);$$
$$y = y(f(s)) = y(s);$$
$$z = z(f(s)) = z(s).$$

После этого радиус кривизны траектории точки вычисляется по формуле

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}},$$

в которой штрихами обозначены производные по s, т. е.

$$x'' = \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Если движение точки задано координатным способом вектор полного ускорения точки, равен:

$$\vec{a}_M = a_{Mx} \cdot \vec{i} + a_{My} \cdot \vec{j} + a_{Mz} \cdot \vec{k},$$

радиус кривизны её траектории определяется по формуле

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}. \tag{12}$$

Пример 9. В примере 8 для момента времени $t_1 = 1$ с были вычислены значения модуля скорости точки $V_1 = 31{,}62$ м/с и нормального ускорения $a_{n1} = 9{,}49$ м/с^2.

Определить радиус кривизны траектории точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение.

По формуле (12)

$$\rho = \frac{V_1^{\,2}}{a_{n1}} = \frac{31{,}69^2}{9{,}49} = 105{,}36 \text{ м.}$$

При векторном способе задания движения точки по зависимости (7) производится переход к координатному способу, а далее радиус кривизны траектории точки определяется по формуле (12) (см. п.4.2).

Пример выполнения задания

Дано: Точка движется согласно уравнениям (x и y в см)

$$\begin{aligned} x &= 2t; \\ y &= 4t^2 - 1. \end{aligned} \qquad (13)$$

Определить: траекторию точки в координатной форме, положение точки на траектории в данный момент движения $t_1 = 1$ с, векторы скорости, полного, касательного и нормального ускорений, а также радиус кривизны траектории в точке.

Решение: Движение точки, как показывают уравнения (13) задано координатным способом. Следовательно, уравнения движения (13) одновременно и уравнения траектории точки в параметрическом виде (параметр - время t). Исключив из этих уравнения время t, получим уравнения траектории точки в координатной форме. Например, из первого уравнения системы (13) выразим параметр t через x: $t = x/2$ и подставим это выражение во второе уравнение

$$y = x^2 - 1.$$

В результате получили уравнение траектории точки в координатной форме. Траектория точки — парабола, точнее правая ветвь параболы (так как $x = 2t \geq 0$) — рис. 38.

Определим координаты точки (в см) в указанный момент движения $t_1 =$ $= 1$ с, для чего подставим в уравнения движения вместо текущего времени t конкретное значение t_1:

$$x_{M1} = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$y_{M1} = 4 \cdot 1^2 - 1 = 3.$$

Найденные координаты точки (x_1, y_1) являются первой характеристикой вектора скорости — точкой его приложения.

Вектор скорости точки M

$$\vec{V}_M = V_{Mx} \cdot \vec{i} + V_{My} \cdot \vec{j}.$$

Вычислим проекции вектора скорости на координатные оси x, y:

$$V_{Mx} = \dot{x} = \frac{d\,2t}{dt} = 2;$$

$$V_{My} = \dot{y} = \frac{d(4t^2 - 1)}{dt} = 8t.$$

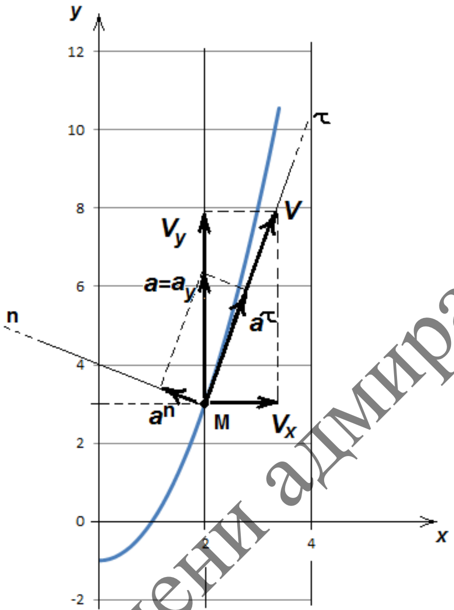


Рис. 38

Для заданного момента движения t_1 = 1 с проекции вектора скорости на оси координат будут равны:

$$V_{Mx1} = 2 \text{ см/с};$$
$$V_{My1} = 8 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости в любой момент движения равен

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = \sqrt{2^2 + (8t)^2} \neq \text{const},$$

а при t_1 = 1 с величина скорости будет

$$V_{M1} = \sqrt{V_{Mx1}^2 + V_{My1}^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 8{,}2 \text{ см/с}.$$

Графически вектор скорости построим как диагональ прямоугольника, стороны которого — проекции: $V_x = V_{Mx1}$ и $V_y = V_{My1}$ (см. рис. 38).

Ускорение точки, если движение задано координатным способом, равно

$$\vec{a}_M = a_{Mx} \cdot \vec{i} + a_{My} \cdot \vec{j}.$$

Вычислим проекции ускорения точки на координатные оси *x.y*:

$$a_{Mx} = \dot{V}_{Mx} = \frac{d(2)}{dt} = 0;$$

$$a_{My} = \dot{V}_{My} = \frac{d(8t)}{dt} = 8\ (\text{м/с}^2) = \text{const}.$$

Полное ускорение точки в любой момент движения (в том числе при $t_1 = 1$ с) определено

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8\ (\text{см/с}^2) = \text{const}.$$

Графически вектор полного ускорения можно построить как диагональ прямоугольника, стороны которого — проекции $a_x = a_{Mx1} = 0$ и $a_y = a_{My1} = a$. В нашем случае, так как $a_x = a_{Mx1} = 0$, полное ускорение точки равно: $\vec{a}_M = a_{My} \cdot \vec{j}$ (на рис. 38 $\vec{a}_M = \vec{a}$, $a_{My} \cdot \vec{j} = \vec{a}_y$). Полное ускорение точки равно проекции полного ускорения на ось *y*.

Спроецировав полное ускорение точки $\vec{a}_M = \vec{a}$ на направление скорости (ось τ), получим касательное ускорение (см. рис. 38)

$$a_{M\tau} = \frac{V_{Mx1} a_{Mx1} + V_{My1} a_{My1}}{V_{M1}} = \frac{0 \cdot 2 + 8 \cdot 8}{8{,}2} = 7{,}8\ (\text{см/с}^2).$$

Направление скорости $\vec{V}$ и касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ (см. рис. 38) получились одинаковые — следовательно, движение точки в этот момент — ускоренное.

Полное ускорение точки — постоянно, направлено параллельно оси *y*. Траектория точки — кривая (парабола). Как следует из рис. 38, при движении точки *M* по траектории угол между полным ускорением $\vec{a}$ постоянного направления и осью τ будет меняться (так как направление касательной к траектории в каждой точке на траектории будет разным). Следовательно, проекция полного ускорения на ось τ (это касательное ускорение $\vec{a}_\tau$) будет переменным. Окончательно: точка движется ускоренно, величина касательного ускорения не постоянная.

Векторы полного, касательного и нормального ускорений точки связаны: $\vec{a}_M = \vec{a}_{M\tau} + \vec{a}_{Mn}$.

Векторы $\vec{a}_{Mn}$ и $\vec{a}_{M\tau}$ взаимно перпендикулярны. Тогда модуль нормального ускорения точки найдем по формуле

$$a_{Mn1} = \sqrt{a_{M1}^2 - a_{M\tau1}^2} = \sqrt{8^2 - 7{,}8^2} = 1{,}78\ \text{см/с}^2.$$

Все три вектора ускорений точки $\vec{a}_M, \vec{a}_{M\tau}, \vec{a}_{Mn}$ приложены в точке с координатами (см. рис. 32)

$$x_{M1} = 2 \text{ см};$$
$$y_{M1} = 3 \text{ см}.$$

Радиус кривизны ρ траектории точки в момент движения t_1 определим по формуле (12)

$$\rho = \frac{{V_M}^2}{a_{Mn}} = \frac{8{,}2^2}{1{,}78} = 37{,}8 \text{ см}.$$

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. В чем состоит предмет кинематики?
2. Что следует отнести к основным понятиям кинематики?
3. Что изучает кинематика точки?
4. Что называют траекторией точки?
5. Что означает — задать движение точки?
6. Какими способами можно задать движение точки, в чем состоит существо каждого из них?
7. Как определить траекторию точки при координатном способе задания движения точки?
8. Можно ли, зная закон движения точки по траектории, определить саму траекторию?
9. Чему равен модуль вектора скорости точки, как направлен этот вектор?

10 Чему равны проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат?

11. Чему равен модуль вектора ускорения точки, как направлен этот вектор?
12. Как определяют проекции вектора ускорения точки на неподвижные оси декартовой системы координат?
13. Какого вида изменение скорости характеризует касательное ускорение точки?
14. Какого вида изменение скорости характеризует нормальное ускорение точки?
15. В каких случаях касательное ускорение точки равно нулю?
16. В каких случаях нормальное ускорение точки равно нулю?

17. Точка движется по криволинейной траектории с постоянной по модулю скоростью. Можно ли считать, что ускорение точки равно нулю?

18. Если точка движется по криволинейной траектории, в каких ситуациях ее нормальное ускорение может быть равно нулю?

19. При каком движении точки ее ускорение равно нулю?

20. Какое движение точки называется равномерным?

21. Какое движение точки называется равнопеременным?

5. Кинематика твердого тела

5.1. Задание. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

Движение груза 1 задается уравнением

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0, \qquad (1)$$

где t — время, с; C_0, C_1, C_2 — некоторые постоянные.

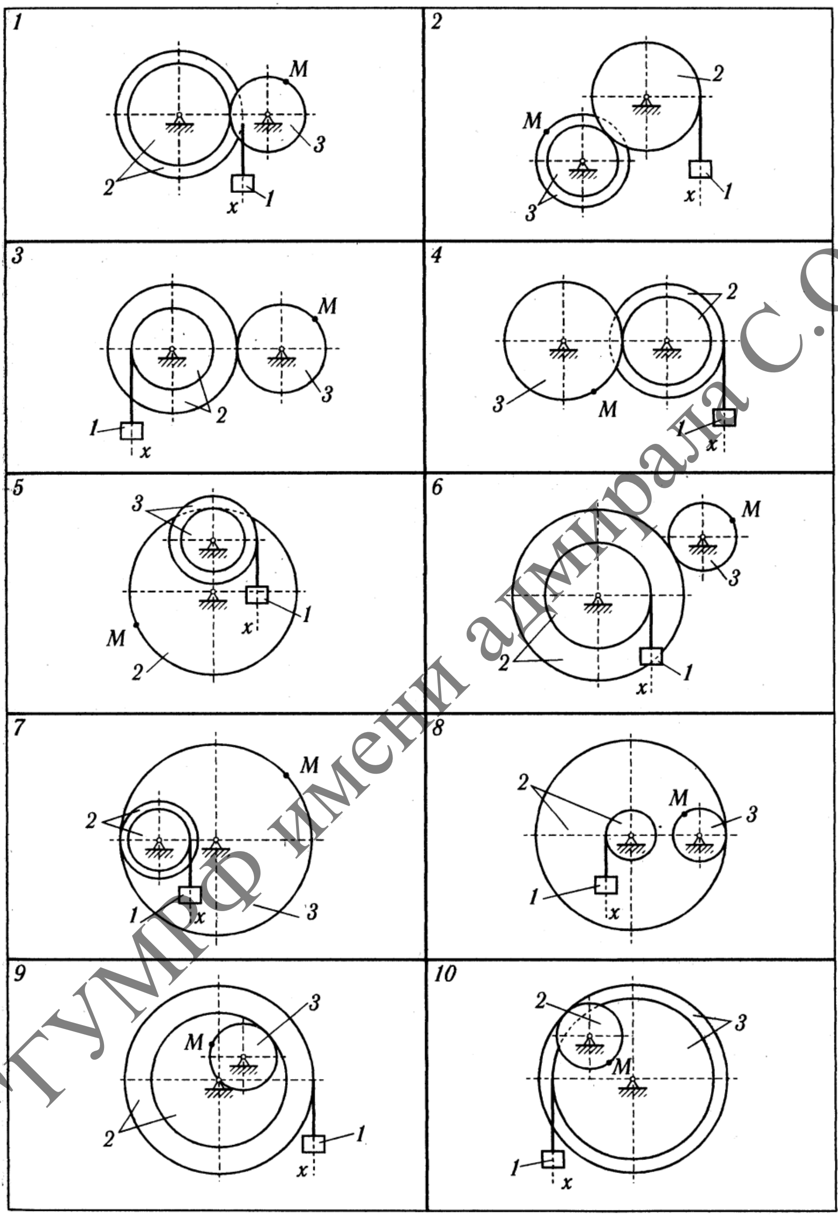
В начальный момент движения ($t = 0$) положение груза определяет координата x_0, и скорость груза равна v_0. Учесть, что в момент времени $t = t_2$ координата груза равна x_2.

Определить коэффициенты C_0, C_1, C_2, при которых осуществляется требуемое движение груза 1. Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза и точки M одного из колес механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 39 – 41, а необходимые данные приведены в табл. 5.

Перед выполнением задания необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи следует начинать с условия: записать, что дано и что требуется найти. Решение должно содержать рисунок с изображениями угловых скоростей и ускорений вращающихся тел, скорости и ускорения груза, а также с изображением скорости и ускорения указанной на рисунке точки M времени t_1. Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на про-верку преподавателю. Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру. Образец титульного листа приведен в прил. 1.



1
M
2
3
1
x
2
M
2
3
1
x
3
M
1
x
2
3
4
2
3
M
1
x
5
3
1
x
M
2
6
M
3
2
1
x
7
M
2
1
x
3
8
2
M
3
1
x
9
3
M
2
1
x
10
2
3
M
1
x

Рис. 39

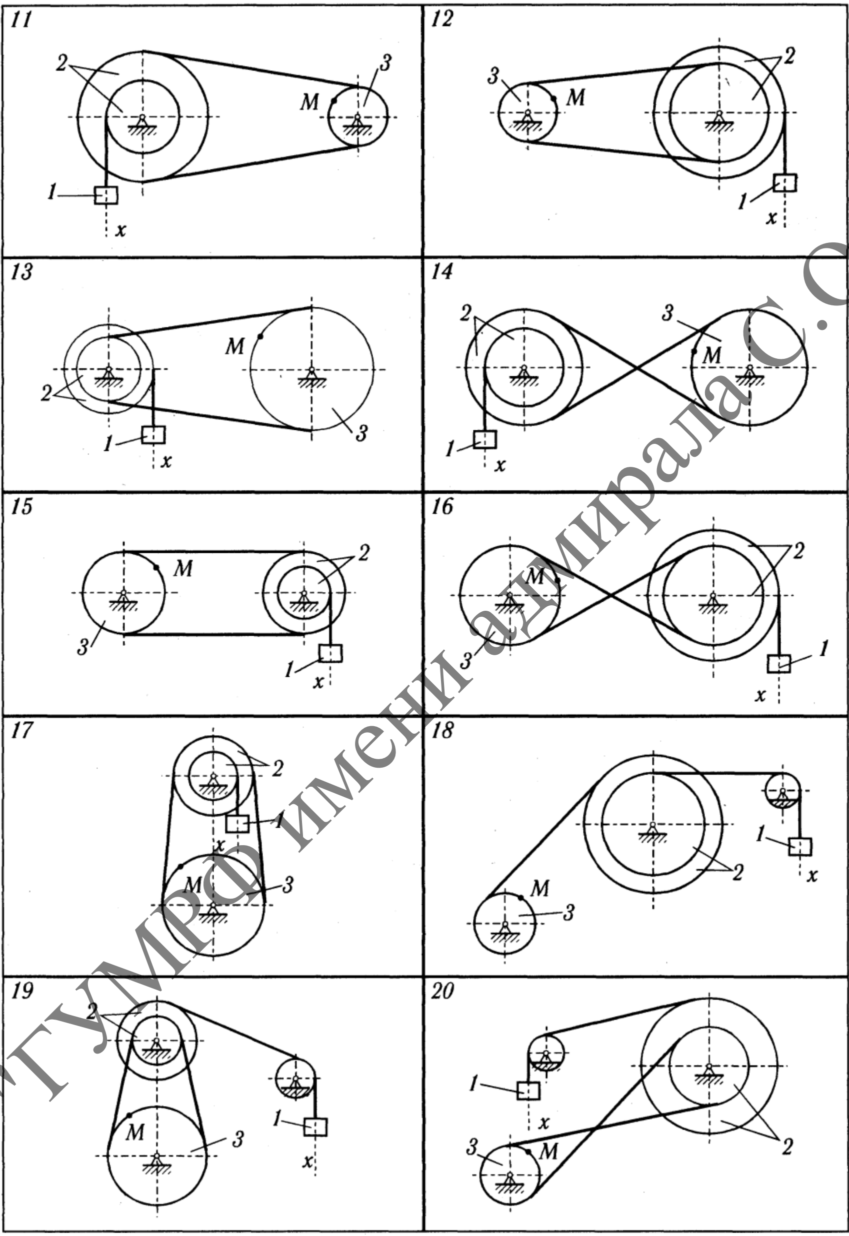
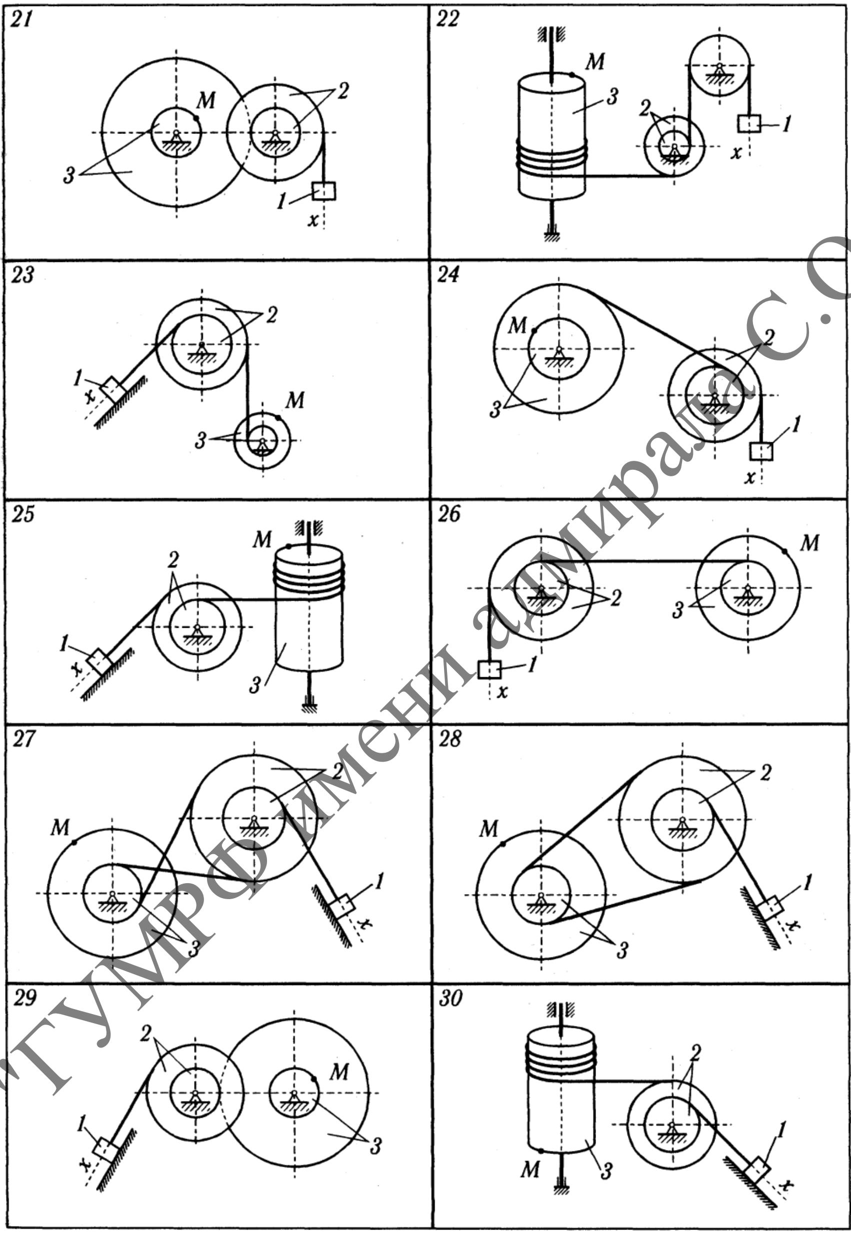


Рис. 40



21
M
2
3
1
x
22
M
3
2
1
x
23
2
1
x
M
3
24
M
2
3
1
x
25
M
2
1
x
3
26
M
2
3
1
x
27
2
M
1
x
3
28
2
M
1
x
3
29
2
M
1
x
3
30
2
1
M
3
x

Рис. 41

Таблица 5

Номер варианта (рис. 39 – 41)	Радиусы, см				Координаты и скорости груза 1			Расчетные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0, см	υ_0, см/с	x_2,см	t_2	t_1
1	60	45	36	–	2	12	173	3	2
2	80	–	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	–	8	6	40	4	2
4	58	45	60	–	4	4	172	4	3
5	90	–	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	–	7	16	215	4	2
7	45	35	105	–	8	5	124	4	3
8	35	10	10	–	6	2	111	3	2
9	40	30	15	–	10	7	48	2	1
10	15	–	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	–	9	8	65	2	1
12	20	15	10	–	5	10	179	3	2
13	30	20	40	–	7	0	557	5	2
14	15	10	15	–	6	3	80	2	1
15	15	10	15	–	5	2	189	4	2
16	20	15	15	–	4	6	220	4	3
17	15	10	20	–	8	4	44	2	1
18	20	15	10	–	3	12	211	4	1
19	15	10	20	–	5	10	505	5	3
20	25	15	10	–	10	8	277	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	–	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	194	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	–	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	862	4	2
27	40	18	40	18	5	10	193	2	1
28	40	20	40	15	8	5	347	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	–	10	7	128	2	1

Задача: определение скоростей и ускорений точек тела при его поступательном и вращательном движении может быть решена в последовательности, указанной далее.

1. Найти конкретные значения постоянных величин, при помощи которых описывается поступательное движение груза, его скорость и ускорение.
2. Определить угловые скорости и ускорения вращающихся тел.
3. Определить скорость и ускорение точки, указанной на рис. 39 – 41.
4. Проанализировать полученные результаты.

Пример выполнения задания

***Дано*:** Движение груза 1 задано уравнением $x = x(t) = C_2 t^2 + C_1 t + C_0$, где t — время, C_2, C_1 и C_0 — постоянные числа.

В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ положение груза определяется значением координаты $x = x_0 = 6$ см, и он имеет начальную скорость $V_0 =$ $= 8$ см/с. В момент времени $t = t_2 = 2$ с. координата груза равна $x_2 = 70$ см, $r_2 = 20$ см, $R_2 = 30$ см, $R_3 = 25$ см (рис. 42).

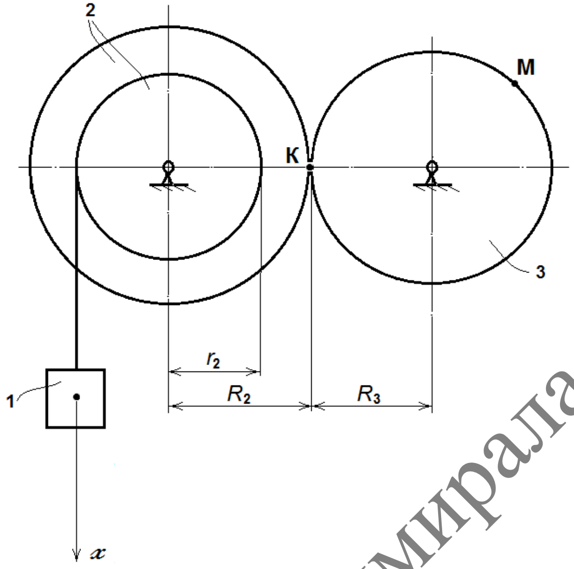


Рис. 42

Определить**:** числа C_0, C_1 и C_2, при которых осуществляется заданное движение груза. Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза, угловые скорости вращения и угловые ускорения тел 2 и 3 и скорость и ускорение точки M одного из тел. Нити, связывающие тела, считать нерастяжимыми. Передачу движения с одного из вращающихся тел на другое считать идеальной, т. е. без проскальзывания.

Изобразить на рисунке все найденные скорости и ускорения.

Решение**:** Движение груза 1 поступательное и задано уравнением

$$x = x(t) = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 \qquad (1)$$

(применен координатный способ описания движения точки).

Подстановка в это уравнение заданных $x = x_0 = 6$ см и $t = t_0 = 0$ с позволяет определить значение $C_0 = x_0 = 6$ см.

Скорость груза 1

$$V = V_x = \dot{x} = \frac{d(C_2 t^2 + C_1 t + C_0)}{dt} = 2C_2 t + C_1 . \qquad (2)$$

Подстановка в уравнение (2) значения $V = V_0 = 8$ см/с и $t = t_0 = 0$ с определяет значение $C_1 = V_0 = 8$ см/с, следовательно, уравнение движения груза 1, в соответствии с уравнением (1), приобретает вид

$$x = x(t) = C_2 t^2 + 8t + 6. \qquad (3)$$

Подстановка в уравнение (3) значений $x = x_2 = 70$ см и $t = t_2 = 4$ с приводит к зависимости $70 = C_2 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 + 6$, из которой определяется величина $C_2 = 2$ см/с^2.

Следовательно, конкретное уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = x(t) = 2t^2 + 8t + 6.$$

Скорость груза 1 равна $V = V_x = \dot{x} = 4t + 8$, и в момент времени $t = t_1 = 2$ с имеет значение $V = 16$ см/с.

Ускорение груза $a = a_\tau = \dot{V} = \dfrac{d(4t+8)}{dt} = 4$ см/с^2.

Так как нить, связывающая тела 1 и 2, нерастяжимая, и движение этого участка нити и груза 1 поступательное, то скорость груза 1 равна скорости точки на ободе цилиндра радиуса r_2 тела 2, а ускорение тела 1 равно касательному ускорению точки на ободе цилиндра радиуса r_2. Получаем

$$V = \omega_2 \cdot r_2, \tag{4}$$

откуда значение угловой скорости тела 2 равно:

$$\omega_2 = \frac{V}{r_2} = \frac{16}{20} = 0{,}8 \text{ рад/с} \equiv 1/\text{с}.$$

Взяв производную по времени от равенства (4), получим (учитывая, что $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{d\omega}{dt}$) $a = a_\tau = \dot{V} = \dot{\omega}_2 \cdot r_2 = \varepsilon_2 \cdot r_2$.

Определяем значение углового ускорения тела 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a}{r_2} = \frac{4}{20} = 0{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

Векторы угловой скорости $\vec{\omega}_2$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}_2$ блока цилиндров 2 направлены вдоль оси вращения O_{2z} блока 2, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку O_2. Точка приложения вектора $\vec{\omega}_2$ ($\vec{\varepsilon}_2$) — любая точка на оси вращения O_{2z}. Направление вектора — вдоль оси в ту сторону, откуда вращение ω_2 (или ε_2) будет видно происходящим против хода часовой стрелки. Векторы $\vec{\omega}_3$ и $\vec{\varepsilon}_3$ колеса 3 направлены вдоль оси вращения O_{3z} колеса 3, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку O_3. Точка приложения вектора $\vec{\omega}_3$ ($\vec{\varepsilon}_3$) — любая точка на оси вращения O_{3z}. Направление вдоль оси — в ту сторону, откуда вращение ω_3 (соответственно ε_3) будет видно происходящим против хода часовой стрелки.

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ могут быть перенесены параллельно самим себе. В рассматриваемом примере векторы $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\varepsilon}_2$ направлены перпендику-лярно плоскости рис. 43 на нас, а векторы $\vec{\omega}_3$ и $\vec{\varepsilon}_3$ — перпендикулярно плоскости рис. 43 от нас.

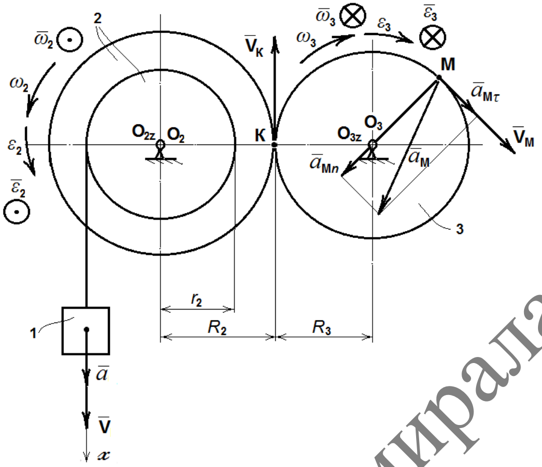


Рис. 43

Так как передача движения от тела 2 телу 3 идеальная (без проскальзывания) — скорость точки K соприкосновения цилиндра радиуса R_2 тела 2 равна скорости точки K на ободе цилиндра 3 радиуса R_3:

$$V_K = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3, \tag{5}$$

откуда

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = 0{,}8 \frac{30}{25} = 0{,}96 \text{ рад/с}.$$

Возьмем производную по времени от равенства (2.5):

$$\dot{\omega}_2 R_2 = \dot{\omega}_3 R_3;$$

или

$$\varepsilon_2 R_2 = \varepsilon_3 R_3.$$

Тогда

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{R_2}{R_3} = 0{,}2 \frac{30}{25} = 0{,}24 \text{ рад/с}^2.$$

Величина скорости точки M вычисляется по формуле

$$V_M = \omega_3 R_3 = 0{,}96 \cdot 25 = 24 \text{ см/с}.$$

Направление скорости точки M тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси по касательной к траектории точки, т. е. под углом 90° к радиусу, проведенному в точку M, в сторону вращения тела (в направлении ω_3) — см. рис. 43.

Вектор полного ускорения точки *M* равен векторной сумме касательного и нормального ускорений этой точки:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M\tau} + \vec{a}_{Mn}. \tag{6}$$

Величина касательного ускорения точки *M* равна

$$a_{M\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 0,24 \cdot 25 = 6 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение точки *M* тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направлено по касательной к траектории точки, то есть под углом 90° к радиусу, проведенному в точку *M* в сторону вращения углового ускорения тела (в направлении ε_3) — см. рис. 43.

Величина нормального ускорения точки *M* определена выражением

$$a_{Mn} = \omega_3^2 R_3 = 0,96^2 \cdot 25 \approx 23 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки *M* тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направлено по радиусу к оси вращения (рис. 43).

Так как векторы $\vec{a}_{M\tau}$ и $\vec{a}_{Mn}$ взаимно перпендикулярны, учитывая равенство (2.6), получим модуль полного ускорения точки *M*:

$$a_M = \sqrt{a_{M\tau}^2 + a_{Mn}^2} = \sqrt{86^2 + 23^2} \approx 23,8 \text{ см/с}^2.$$

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Какое движение твердого тела называют поступательным?

2. Что можно сказать о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, движущегося поступательно?

3. Могут ли траектории точек тела, совершающего поступательное движение, быть окружностями. Если такое возможно, то привести пример.

4. Какими уравнениями задают поступательное движение твердого тела?

5. Кабинки колеса обозрения подвешены так, что все время остаются вертикальными. Какие точки (пола или потолка) имеют большее ускорение?

6. Какое движение твердого тела называют вращением вокруг неподвижной оси?

7. Какого вида траектории описывают точки твердого тела, совершающего вращательное движение?

8. Каким уравнением задают вращение твердого тела вокруг неподвижной оси?

9. Какие зависимости связывают между собой величины: угол поворота, угловую скорость, угловое ускорение?

10. Какими зависимостями связаны скорость, касательное и нормальное ускорения точки вращающегося тела с его угловой скоростью и угловым ускорением?

11. Как расположены точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, скорости и ускорения которых — геометрически — равны?

12. Как направлен вектор угловой скорости вращающегося тела?

13. Как направлен вектор углового ускорения вращающегося тела?

14. Какое вращение твердого тела называется равномерным? Напишите уравнение такого вращения.

15. Какое вращение твердого тела называется равнопеременным?

16. Напишите уравнение такого вращения.

17. Как определить по заданному уравнению вращательного движения, является ли это вращение равнопеременным?

18. Две шестерни, радиусами R и $2R$, находятся в зацеплении. У какой шестерни угловая скорость больше? Во сколько раз?

19. Может ли быть ускорение точки вращающегося тела направлено к оси вращения?

20. Может ли быть ускорение точки вращающегося тела направлено по касательной к траектории ее движения?

5.2. Задание.
Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов приведены на рис. 44 – 46, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 6.

Перед выполнением задания на плоскопараллельное движение твердого тела необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи следует начинать с условия: записать, что дано и что требуется найти. Решение должно содержать рисунок с изображениями угловых скоростей и ускорений тел, скоростей и ускорений точек, указанных в условии задания.

Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю. Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру. Образец титульного листа приведен в прил. 1.

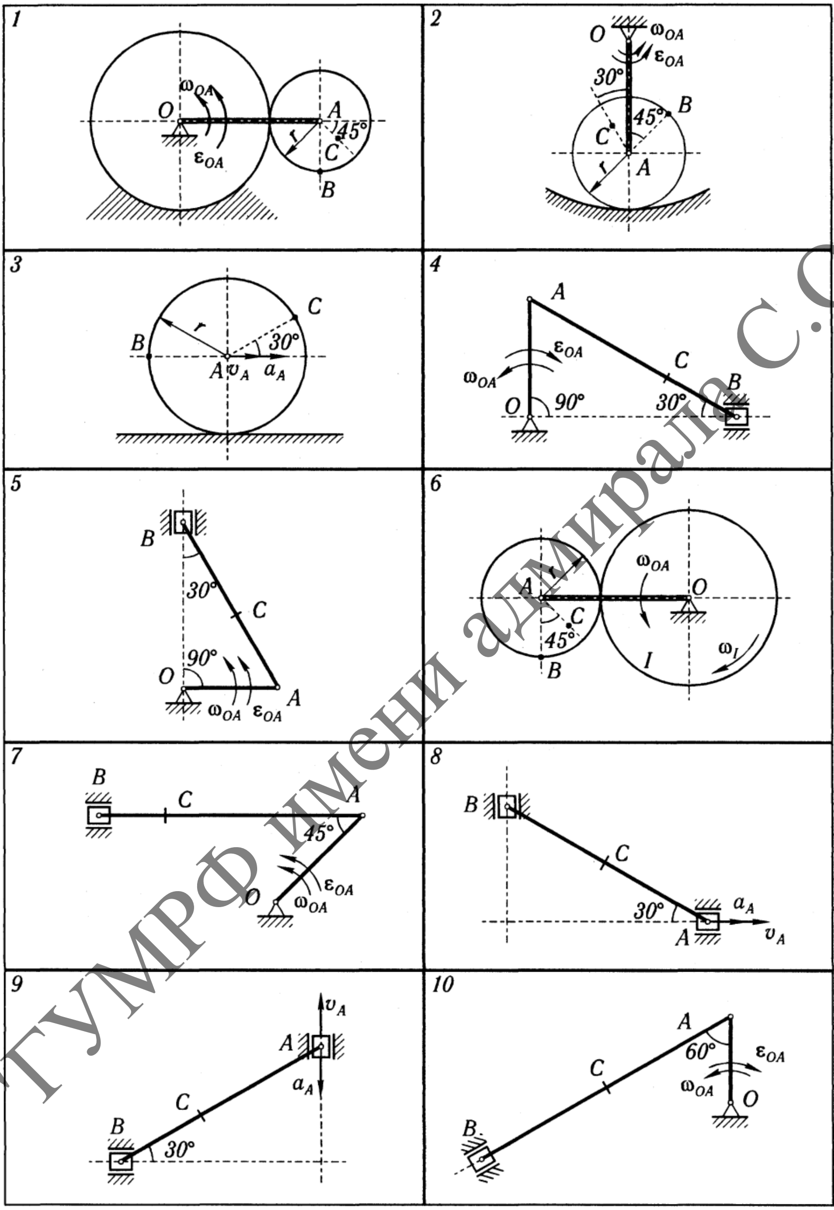

1
O
A
ωOA
εOA
r
45°
C
B
2
O
ωOA
εOA
30°
45°
B
C
A
r
3
C
r
30°
B
A
vA
aA
4
A
εOA
C
ωOA
B
O
90°
30°
5
B
30°
C
90°
O
A
ωOA
εOA
6
A
ωOA
O
C
45°
B
I
ωI
7
B
C
A
45°
εOA
O
ωOA
8
B
C
aA
30°
A
vA
9
vA
A
aA
C
B
30°
10
A
60°
εOA
C
ωOA
O
B

Рис. 44

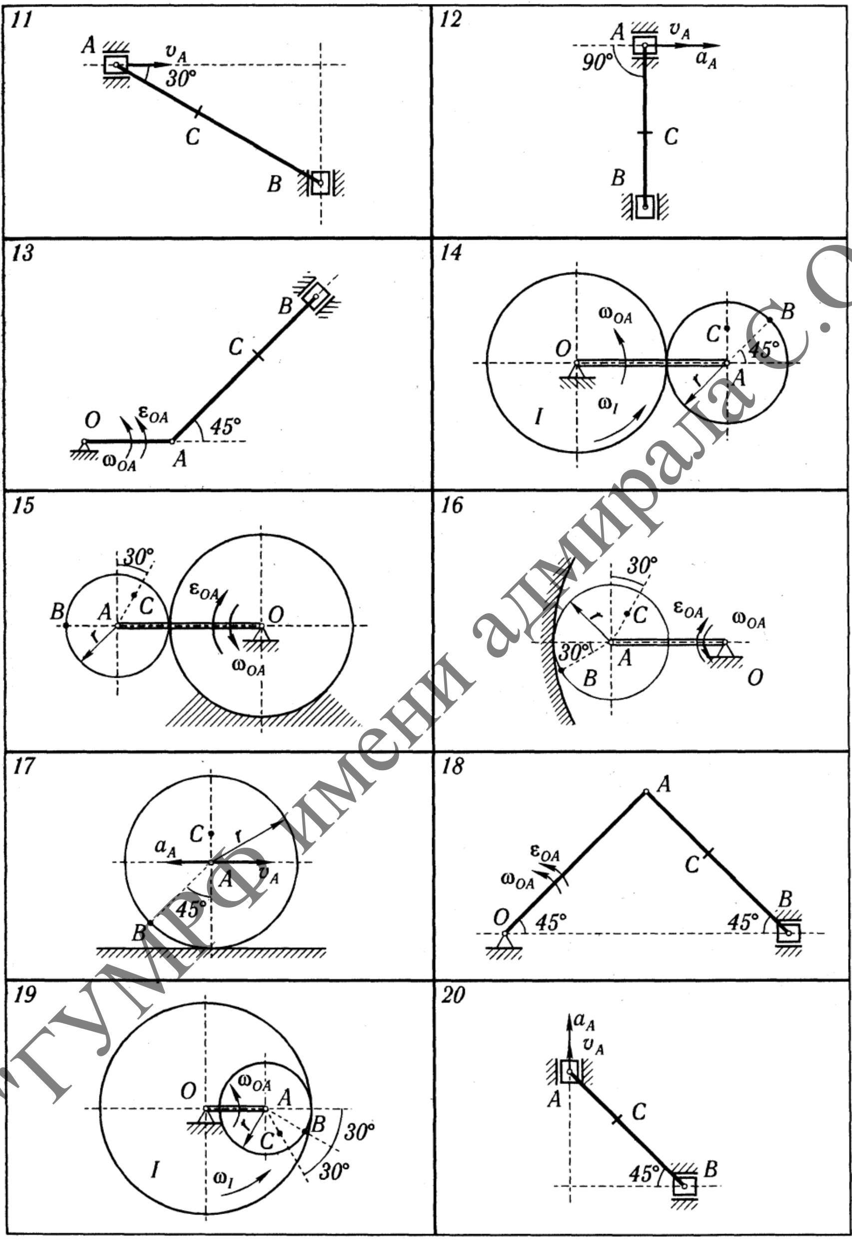

11
A
v_A
30°
C
B
12
A
v_A
a_A
90°
C
B
13
B
C
O
ε_{OA}
45°
ω_{OA}
A
14
ω_{OA}
O
C
B
45°
r
A
I
ω_I
15
30°
B
A
C
ε_{OA}
O
r
ω_{OA}
16
30°
r
C
ε_{OA}
ω_{OA}
30°
A
B
O
17
C
r
a_A
A
v_A
45°
B
18
A
C
ε_{OA}
ω_{OA}
O
45°
B
45°
19
O
ω_{OA}
A
r
C
B
30°
30°
I
ω_I
20
a_A
v_A
A
C
45°
B

Рис. 45

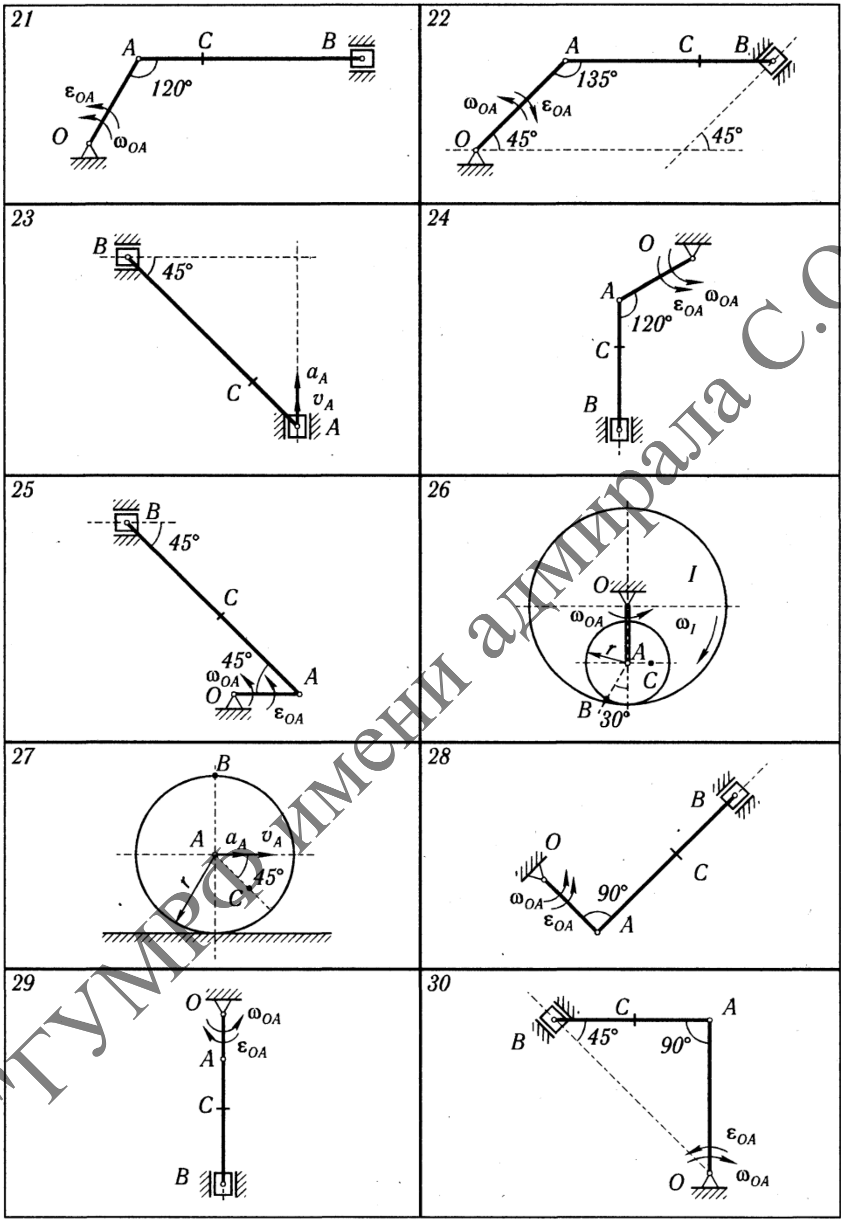

21
A
C
B
120°
ε_{OA}
O
ω_{OA}
22
A
C
B
135°
ω_{OA}
ε_{OA}
O
45°
45°
23
B
45°
a_A
C
v_A
A
24
O
A
ε_{OA} ω_{OA}
120°
C
B
25
B
45°
C
45°
ω_{OA}
A
O
ε_{OA}
26
O
I
ω_{OA}
ω_I
r
A
C
B
30°
27
B
A
a_A
v_A
45°
r
C
28
B
O
C
ω_{OA}
90°
ε_{OA}
A
29
O
ω_{OA}
ε_{OA}
A
C
B
30
C
A
B
45°
90°
ε_{OA}
O
ω_{OA}

Рис. 46

Таблица 6

Номер варианта (рис. 44 – 46)	Размеры, см				ω_{OA}, рад/с	ω_I, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	υ_A, см/с	α_A, см/с^2
	OA	*r*	*AB*	*AC*					
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	–	50	–	–	–	–	–	50	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	1	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	–	–	20	10	–	–	–	40	20
9	–	–	45	30	–	–	–	20	10
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	–	–	30	15	–	–	–	10	0
12	–	–	30	20	–	–	–	20	20
13	25	–	55	40	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–
15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	55	20	–	–	2	–	5	–	–
17	–	30	–	10	–	–	–	80	50
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	–	–	20	6	–	–	–	10	15
21	30	–	60	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	–	–	60	20	–	–	–	5	10
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	–	10	2	1,2	0	–	–
27	–	15	–	5	–	–	–	60	30
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	12	–	35	15	4	–	6	–	–
30	40	–	–	20	5	–	10	–	–

П р и м е ч а н и е. ω_{OA} и ε_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа *OA* при заданном положении механизма; ω_1 — угловая скорость колеса I (постоянная); V_A и a_A — скорость и ускорение точки *A*. Качение колес происходит без скольжения.

Задача кинематического анализа плоского механизма может быть решена в указанной последовательности.

1. Определить угловые скорости тел и скорости точек тел, воспользовавшись методом мгновенного центра скоростей или теоремой о сложении скоростей.

2. Определить угловые ускорения тел и ускорения точек тел, записав теорему о сложении ускорений.

3. Проанализировать полученные результаты.

Пример выполнения задания

***Дано*:** В кривошипно-шатунном механизме (рис. 47) кривошип *OA* (звено 1) вращается ускоренно с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с и угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2. Положение механизма в данный момент времени определяется углами 45° и 30°. Ползун *B* (звено 3) движется по криволинейной направляющей — окружности радиуса $R = 20$ см. Размеры механизма: $OA = 40$ см, $AB = 60$ см, $AC = 45$ см.

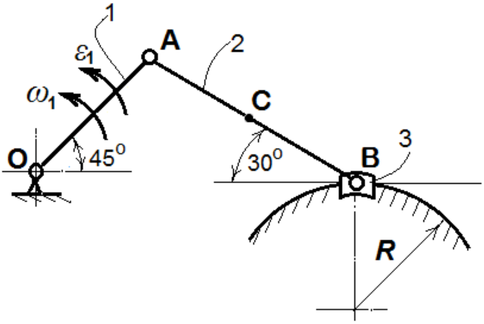


Рис. 47

***Определить*:** угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шатуна AB (звена 2), а также скорости и ускорения его точек A, B и C.

Изобразить на рисунке все найденные скорости и ускорения.

***Решение*:**

1. Определение скоростей точек

Точка A — точка кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси. В таком случае величина скорости точки A может быть найдена:

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости точки A направлен перпендикулярно стержню OA в сторону вращения ω_1, как показано на рис. 48.

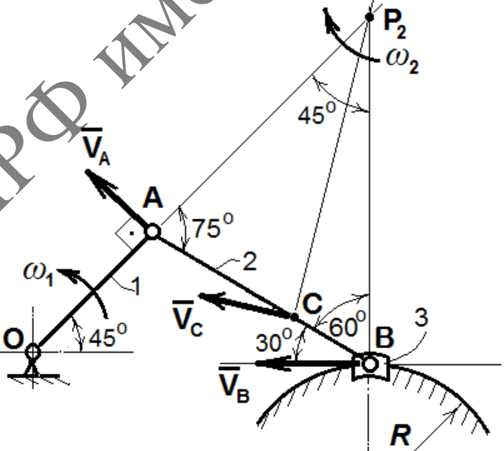


Рис 48

Точка B как точка ползуна 3 движется по окружности радиуса R. Вектор скорости точки B направлен по касательной к её траектории, т. е. вдоль горизонтальной прямой, проходящей через точку B.

Точки A и B принадлежат и шатуну AB, совершающему плоское движение. Определить величину и направление скоростей точек тела при его плоском движении проще с помощью метода мгновенного центра скоростей (м.ц.с.). М.ц.с. — точка, неизменно связанная с телом, скорость которой в данный момент равна нулю. Метод м.ц.с. позволяет рассматривать в каждый момент плоское движение как вращение вокруг м.ц.с. Направление и величину скорости точки при такой замене плоского движения вращательным определяют так же, как в случае вращения тела вокруг неподвижной оси. Определим положение м.ц.с. шатуна AB (точка P_2 — м.ц.с. шатуна) в указанном на рис. 48 положении механической системы. Так как векторы скоростей точек A $(\vec{V}_A)$ и B $(\vec{V}_B)$ не параллельны, мгновенный центр скоростей звена AB (точка P_2 на рис. 48) определим как точку пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A и B к векторам их скоростей.

Скорость любой точки шатуна AB может быть найдена как скорость точки треугольника $\Delta(ABP_2)$, вращающегося в плоскости рис. 48 вокруг точки P_2.

Например, скорость точки A равна

$$V_A = \omega_2 \cdot (AP_2).$$

Тогда угловая скорость шатуна AB

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2}.$$

Величины скоростей точек B и C соответственно равны

$$V_B = \omega_2 \cdot (BP_2);$$

$$V_C = \omega_2 \cdot (CP_2).$$

Размеры AP_2, P_2B и P_2C определим, рассматривая треугольники AP_2B и AP_2C (см. рис. 48): $AP_2 = 73{,}5$ см, $P_2B = 81{,}9$ см и $P_2C = 75{,}6$ см.

Учитывая найденные величины отрезков, получим: $\omega_2 = 1{,}09$ рад/с; $V_B = 89{,}3$ см/с; $V_C = 82{,}4$ см/с.

Найденные скорости изображены на рис. 48.

2. Определение ускорений точек

Точка A принадлежит кривошипу (звену 1), совершающему вращательное движение. Следовательно, её ускорение равно:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n};$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA = 3 \cdot 40 = 120 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 40 = 160 \text{ см/с}^2.$$

Векторы $\vec{a}_A^\tau$ и $\vec{a}_A^n$ показаны на рис. 49. Модуль полного ускорения точки A можно не вычислять, так как проецировать на оси координат его составляющие $\vec{a}_A^\tau$ и $\vec{a}_A^n$ проще.

В положении механической системы, показанном на рис. 48 – 50, движение шатуна AB плоскопараллельное. Определить ускорение точки тела при его плоском движении рационально с помощью теоремы о сложении ускорений точек тела при плоском движении. Примем точку A за полюс. Тогда, ускорение точки B шатуна AB равно векторной сумме ускорения полюса (точки A) $\vec{a}_A$ и ускорения точки B во вращении вокруг полюса A $\vec{a}_{BA}$ (рис. 49)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

или, более подробно,

$$\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \qquad (1)$$

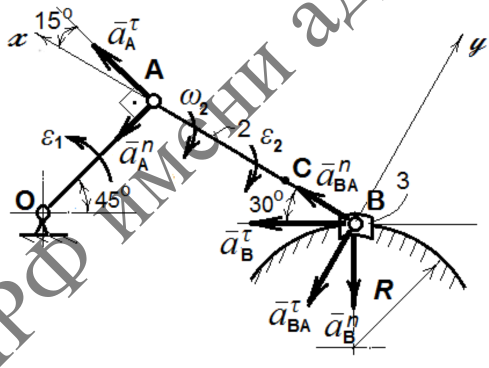


Рис. 49

(**Рекомендация:** самостоятельно убедиться в том, что если сначала попытаться определить ускорение точки C, то векторное равенство, выражающее теорему о сложении ускорений точки тела, совершающего плоское движение

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA},$$

решено быть не может, так как оно содержит три неизвестных величины. Иначе говоря, нужно сначала определить ускорение той точки звена, траектория которой известна. В таком случае известны направления касательного и нормального ускорения точки. В данном случае это точка B.)

Ускорения $\vec{a}_A^{\tau}$ и $\vec{a}_A^{n}$ определены ранее. Величина ускорения a_B^n определяется по формуле

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{\rho} = \frac{V_B^2}{R} = \frac{89{,}3^2}{20} = 398{,}7 \ \text{см/с}^2,$$

а ускорение a_{BA}^n — формулой

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 1{,}09^2 \cdot 60 = 71{,}3 \ \text{см/с}^2.$$

Ускорения $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{n}$ — касательное и нормальное ускорения точки *B* во вращении вокруг полюса *A*. Ускорение $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ направлено перпендикулярно *BA* в сторону вращения ε_2. Ускорение $\vec{a}_{BA}^{n}$ направлено из точки *B* к полюсу *A* (см. рис. 49).

Направления ускорений $\vec{a}_B^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ показаны на рис. 49 в предположении ускоренного движения. Векторное уравнение (1) содержит две неизвестные величины a_B^{τ} и a_{BA}^{τ}, следовательно, может быть решено. Для этого выберем систему координат *Bxy* (см. рис. 49) и спроецируем уравнение (1) на оси *x* и *y*:

на *Bx*: $a_B^{\tau}\cos 30° - a_B^n \sin 30° = a_A^{\tau}\cos 15° - a_A^n \sin 15° + a_{BA}^n;$

на *By*: $-a_B^{\tau}\sin 30° - a_B^n \cos 30° = a_A^{\tau}\sin 15° - a_A^n \cos 15° + a_{BA}^{\tau}.$

Решая эти уравнения, получим: $a_B^{\tau} = 493{,}1$ см/с², $a_{BA}^{\tau} = 468{,}3$ см/с².

Ускорения a_B^{τ} и a_{BA}^{τ} получились в результате вычислений положительными. Следовательно, направления ускорений $\vec{a}_B^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ были выбраны правильно.

В результате вычислений некоторые ускорения могут оказаться отрицательными. Физический смысл знака минус – направление таких ускорений, показанные на расчетной схеме противоположны действительному.

Зная ускорение $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ можно определить величину углового ускорения ε_2 шатуна *AB* по формуле

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}}{AB} = \frac{468{,}3}{60} = 7{,}8 \ \text{рад/с}^2.$$

Направлено ε_2 по часовой стрелке (см. рис. 49).

Определив ε_2, можно найти ускорение любой точки шатуна *AB*, в том числе точки *C*.

Приняв точку *A* за полюс, запишем теорему о сложении ускорений

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{CA}^{\tau} + \vec{a}_{CA}^{n}, \tag{2}$$

где $\vec{a}_A^{\tau}$ и $\vec{a}_A^{n}$ определены ранее (см. с. 79).

Ускорения точки *C* во вращении вокруг полюса *A* (касательное a_{CA}^{τ} и нормальное a_{CA}^{n}) равны:

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot AC = 7{,}8 \cdot 45 = 351 \quad \text{см/с}^2;$$

$$a_{CA}^{n} = \omega_2^2 \cdot AC = 1{,}09^2 \cdot 45 = 53{,}5 \quad \text{см/с}^2.$$

Векторы ускорений, находящиеся в правой части равенства (2), изображены на рис. 50.

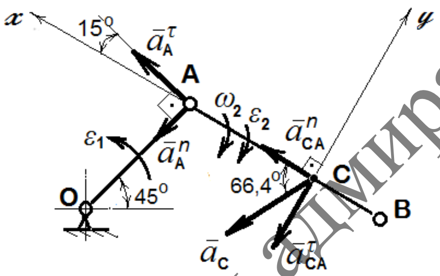


Рис. 50

Спроецируем уравнение (2) на оси координат *Cx* и *Cy* (рис. 50)

– на *Cx*: $a_{Cx} = a_A^{\tau}\cos 15° + a_A^{n}\sin 15° + a_{CA}^{n} = 209{,}8 \quad \text{см/с}^2$;

– на *Cy*: $a_{Cy} = a_A^{\tau}\sin 15° - a_A^{n}\cos 15° - a_{CA}^{\tau} = -474{,}6 \quad \text{см/с}^2$.

Величина ускорения точки *C*

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{209{,}8^2 + 474{,}6^2} = 518{,}9 \quad \text{см/с}^2,$$

направление вектора $\vec{a}_C$ — под углом 66,4° к оси *Cx* $\left(\cos(\vec{a}_C; Cx) = \dfrac{a_{Cx}}{a_C} \right)$ — см. рис. 50.

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы.

1. Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным (плоским)?

2. Какими уравнениями задают плоскопараллельное движение твердого тела?

3. Зависима ли поступательная часть перемещения плоской фигуры от выбора полюса?

4. Как, используя уравнения движения плоской фигуры, определить скорость полюса и угловую скорость вращения этой фигуры?

5. Как связаны между собой скорость произвольной точки плоской фигуры и скорость ее точки, принятой за полюс?

6. Какую точку называют мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) плоской фигуры?

7. Каково положение м.ц.с. в характерных ситуациях?

8. Какая из точек колеса, катящегося без скольжения по неподвижному прямолинейному рельсу, имеет наибольшую скорость?

9. Будет ли направлена скорость некоторой точки на ободе катящегося по неподвижной поверхности колеса по касательной к окружности этого колеса? Почему?

10. Скорости точек твердого тела векторно равны в данный момент времени. Может ли быть движение этого тела: 1) поступательным? 2) вращательным? 3) плоским?

11. Как определить угловую скорость вращения плоской фигуры, если известна скорость одной из ее точек и положение мгновенного центра скоростей плоской фигуры?

12. Ускорение какой точки плоской фигуры можно найти, используя уравнения ее движения?

13. Как, используя уравнения движения плоской фигуры, найти угловое ускорение ее вращения?

14. Какое векторное равенство связывает ускорение произвольной точки плоской фигуры с ускорением полюса?

15. Чему равны и как направлены составляющие ускорения $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{n}$ в равенстве $\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$?

6. Сложное движение точки

6.1. Задание.

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка *M* движется относительно тела *D*. По заданным уравнениям относительного движения точки *M* и движения тела *D* определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*.

Схемы механизмов показаны на рис. 51 – 53, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 7 в соответствии со своим вариантом.

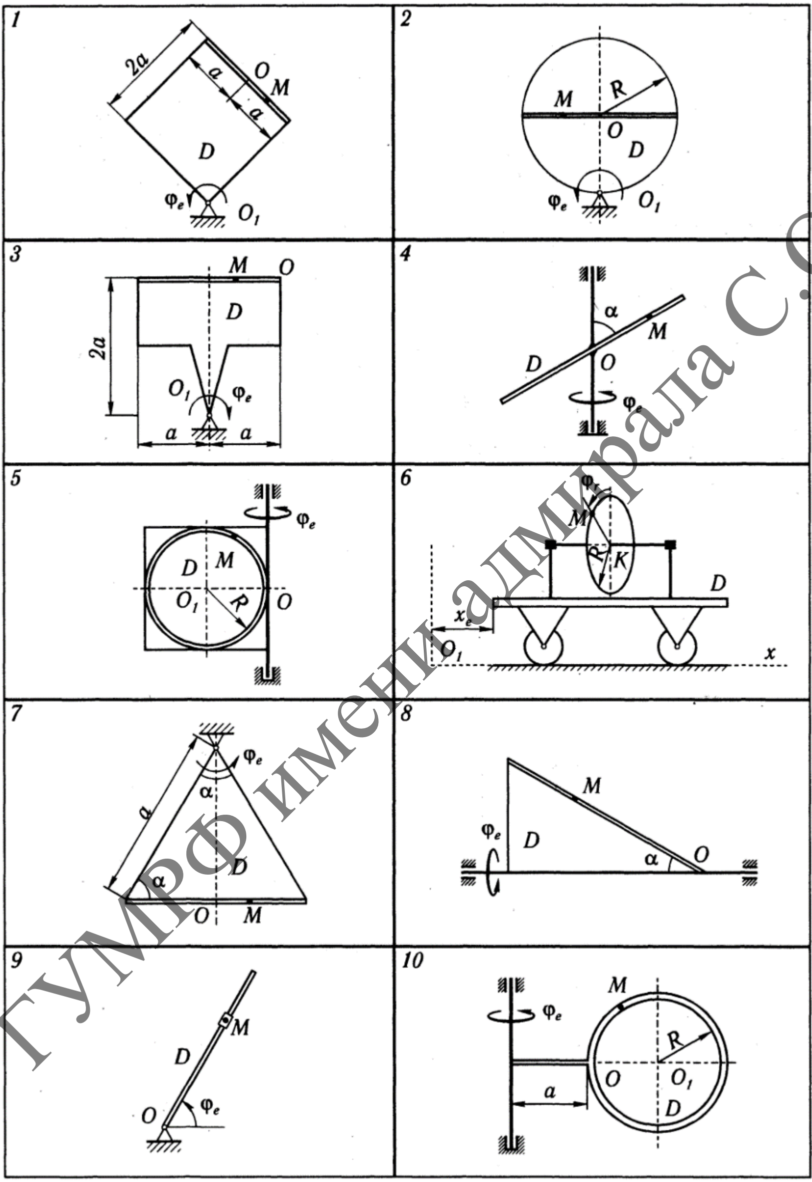

1
2a
a
a
O
M
D
φe
O1
2
M
R
O
D
φe
O1
3
M
O
D
2a
O1
φe
a
a
4
α
M
D
O
φe
5
φe
D
M
O1
R
O
6
φr
M
R
K
D
xe
O1
x
7
φe
α
a
D
α
O
M
8
M
φe
D
α
O
9
M
D
O
φe
10
M
φe
R
O
O1
a
D

Рис. 51

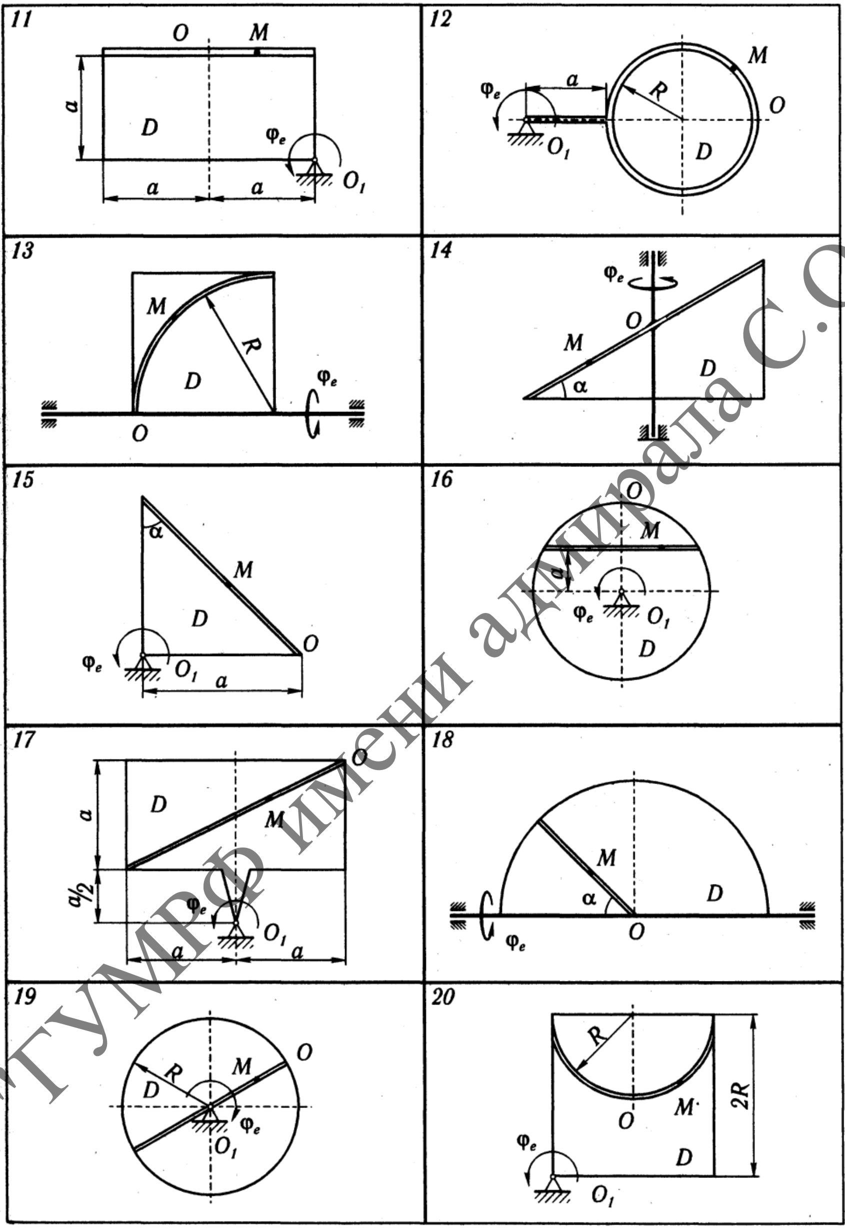

11
O
M
a
D
φ_e
O_1
a
a
12
M
a
φ_e
R
O
O_1
D
13
M
R
D
φ_e
O
14
φ_e
O
M
D
α
15
α
M
D
O
φ_e
O_1
a
16
O
M
α
φ_e
O_1
D
17
O
D
a
M
a/2
φ_e
O_1
a
a
18
M
α
D
O
φ_e
19
O
M
R
D
φ_e
O_1
20
R
2R
O
M
φ_e
D
O_1

Рис. 52

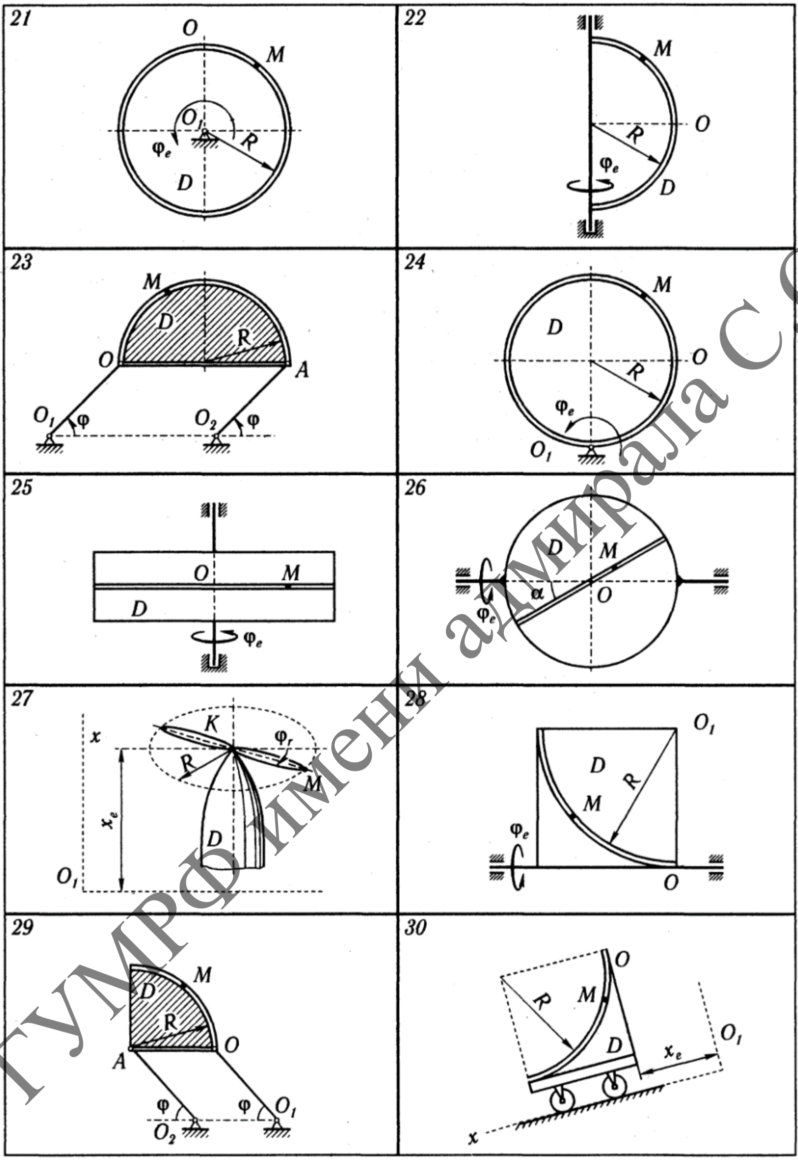


Рис. 53

Перед выполнением задания необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Таблица 7

Номер варианта (рис. 51-53)	Уравнение относительного движения точки M $OM = s_r = s_r(t)$, см	Уравнение движения тела $\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	Уравнение движения тела $x_e = x_e(t)$, см	t_1, с	R, см	a, см	α, град	Дополнительные данные
1	$18\sin(\pi t/4)$	$2t^3 - t^2$	–	2/3	–	25	–	
2	$20\sin \pi t$	$0{,}4t^2 + t$	–	5/3	20	–	–	
3	$6t^3$	$2t + 0{,}5t^2$	–	2	–	30	–	
4	$10\sin(\pi t/6)$	$0{,}6t^2$	–	1	–	–	60	
5	$40\pi\cos(\pi t/6)$	$3t - 0{,}5t^3$	–	2	30	–	–	
6	–	–	$3t + 0{,}27t^3$	10/3	15	–	–	$\varphi_r = 0{,}15\pi t^3$
7	$20\cos 2\pi t$	$0{,}5t^2$	–	3/8	–	40	60	
8	$6(t+0{,}5t^2)$	$t^3 - 5t$	–	2	–	–	30	
9	$10(1 + \sin 2\pi t)$	$4t + 1{,}6t^2$	–	1/8	–	–	–	
10	$20\pi\cos(\pi t/4)$	$1{,}2t - t^2$	–	4/3	20	20	–	
11	$25\sin(\pi t/3)$	$2t^2 - 0{,}5t$	–	4	–	25	–	
12	$15\pi t^3/8$	$5t - 4t^2$	–	2	30	30	–	
13	$120\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	–	1/3	40	–	–	
14	$3 + 14\sin \pi t$	$4t - 2t^2$	–	2/3	–	–	30	
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0{,}2t^3 + t$	–	2	–	60	45	
16	$20\sin \pi t$	$t - 0{,}5t^2$	–	1/3	–	20	–	
17	$8t^3 + 2t$	$0{,}5t^2$	–	1	–	$4\sqrt{5}$	–	
18	$10t + t^3$	$8t - t^2$	–	2	–	–	60	
19	$6t + 4t^3$	$t + 3t^2$	–	2	40	–	–	
20	$30\pi\cos(\pi t/6)$	$6t + t^2$	–	3	60	–	–	
21	$25\pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	–	1/2	25	–	–	
22	$10\pi\sin(\pi t/4)$	$4t - 0{,}2t^2$	–	2/3	30	–	–	
23	$6\pi t^2$	–	–	1	18	–	–	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A = 20$ см
24	$75\pi(0{,}1t + 0{,}3t^3)$	$2t - 0{,}3t^2$	–	1	30	–	–	
25	$15\sin(\pi t/3)$	$10t - 0{,}1t^2$	–	5	–	–	–	
26	$8\cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	–	3/2	–	–	45	
27	–	–	$50t^2$	2	75	–	–	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
28	$2{,}5\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	–	2	40	–	–	
29	$5\pi t^3/4$	–	–	2	30	–	–	$\varphi = \pi t^3/8$; $O_1O = O_2A = 40$ см
30	$4\pi t^2$	–	$t^3 + 4t$	2	48	–	–	

Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению S_r; в вариантах 5, 10, 12, 13, 20 – 24, 28 – 30, $OM = s_r$ — дуга окружности; на схемах 5, 10, 12, 21, 24 OM — дуга, соответствующая меньшему центральному углу. Относительное движение точки M в вариантах 6 и 27 и движение тела D в вариантах 23 и 29 определяются уравнениями, приведенными в последнем столбце табл. 7.

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи следует начинать с условия: записать, что дано и что требуется найти. Решение должно содержать рисунок с изображениями угловых скоростей и ускорений тел, скоростей и ускорений точек, указанных в условии задания. Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю. Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру. Образец титульного листа приведен в прил. 1.

Задача определения абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки может быть решена в указанной последовательности.

1. Определить абсолютное, относительное и переносное движение точки, траектории движений, законы, описывающие эти движения.

2. Мысленно остановив переносное движение, рассмотреть только относительное движение точки, определить ее относительную скорость и ускорение.

3. Мысленно остановив относительное движение точки, рассмотреть только переносное, определить переносную скорость и ускорение.

4. Рассмотреть оба движения совместно и определить ускорение Кориолиса.

5. Записать теорему о сложении скоростей при сложном движении и вычислить абсолютную скорость точки.

6. Записать теорему о сложении ускорений при сложном движении и вычислить абсолютное ускорение точки.

7. Проанализировать полученные результаты.

Пример выполнения задания

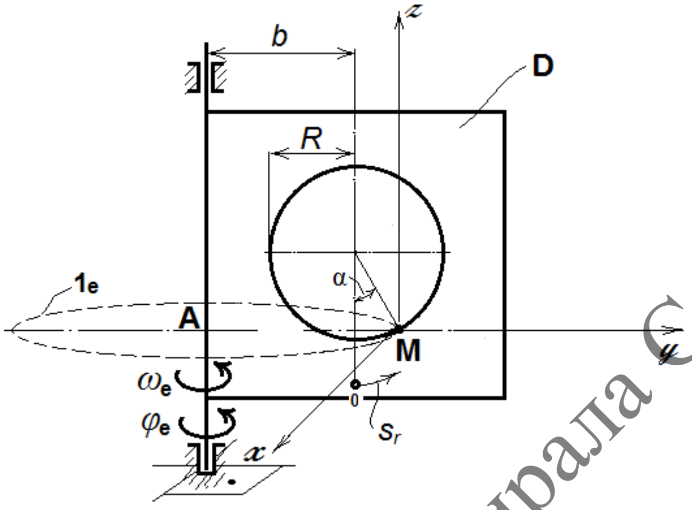
Дано: Прямоугольная рамка (тело D) вращается вокруг неподвижной вертикальной оси по закону $\varphi_e = \varphi_e(t) = 2 + 3t - t^2$ рад (рис. 54). По окружности радиуса $R = 0{,}2$ м, расположенной в плоскости рамки, движется точка по закону $OM = S_{Mr} = S_{Mr}(t) = 0{,}1\pi/3 - 2 + t + t^2$ м. Положительное направление отсчёта относительной дуговой координаты S_{Mr} указано на рис. 54 кривой стрелкой. Центр окружности отстоит от оси вращения рамки на расстоянии $b = 0{,}3$ м.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Абсолютная скорость точки *M*. Теорема о сложении скоростей

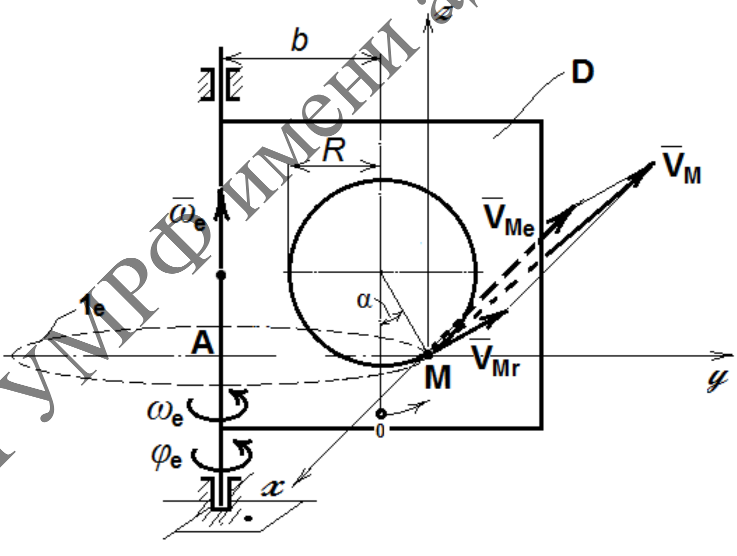
В соответствии с теоремой о сложении скоростей при сложном движении точки её абсолютная скорость $\vec{V}_M$ равна векторной сумме переносной $\vec{V}_{Me}$ и относительной $\vec{V}_{Mr}$ скоростей (рис. 55).

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{Me} + \vec{V}_{Mr}. \qquad (1)$$



1е - траектория переносного движения точки М

Рис. 54



1е - траектория переносного движения точки М

Рис. 55

Относительная скорость точки *M*

Относительные скорость (ускорение, траектория) точки — это скорость (ускорение, траектория) точки относительно подвижной системы координат (или иначе это скорость точки относительно движущегося тела).

Перечисленные кинематические характеристики относительного движения определяют при мысленно остановленном переносном движении, т. е. считая, что тело *D* неподвижно. В таком случае относительные скорость и ускорение точки можно найти, используя методы и формулы из раздела «Кинематика точки».

Сначала определим положение точки *M* на траектории её относительного движения. (Траектория относительного движения точки *M* — окружность радиуса *R*.) Подставим заданное значение времени $t_1 = 1$(с) в уравнение относительного движения точки. Получим

$$S_{Mr} = 0{,}1\pi/3 - 2 + t + t^2 = 0{,}1\pi/3 - 2 + 1 + 1^2 = 0{,}1\pi/3 \text{ см.} \qquad (2)$$

Этому значению дуговой координаты, отсчитываемой вдоль окружности радиуса *R* от положения «0», соответствует угол $\alpha = S_{Mr}/R = (0{,}1\pi/3)/0{,}2 =$ $= \pi/6$ (рад) = 30°.

Как следует из условия задачи, относительное движение точки задано естественным способом. В таком случае относительная скорость точки *M* равна

$$V_{Mr} = \frac{dS_{Mr}}{dt} = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \text{ м/с.} \qquad (3)$$

Вектор относительной скорости $\vec{V}_{Mr}$ направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону возрастания дуговой координаты, лежит в плоскости рамки *D* (*Myz*) и изображён на рис. 55.

Переносная скорость точки *M*

Под переносной скоростью (ускорением, траекторией) точки понимают скорость (ускорение, траекторию) той точки подвижной системы координат (или иначе точки движущегося тела, к которому прикреплена указанная система координат), с которой в данный момент совпадает движущаяся точка *M*. Другими словами для определения переносной скорости (ускорения, траектории) точки нужно остановить точку в её относительном движении в указанный момент t_1. Для этого необходимо знать её положение на траектории относительного движения в момент t_1 — S_{Mr}.

Переносное движение в нашем примере — вращение рамки вокруг неподвижной оси. Переносная угловая скорость тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 3 - 2t \text{ рад/с.}$$

При t_1 = 1 с значение угловой скорости переносного движения

$$\omega_{1e} = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \quad \text{рад/с.}$$

Направление вращения ω_e и вектор $\vec{\omega}_e$ изображены на рис. 55.

Траектория переносного движения точки M — окружность радиуса AM с центром в точке A. Радиус этой окружности

$$R_{Me} = AM = b + R \sin \alpha = 0{,}3 + 0{,}2 \sin 30° = 0{,}4 \text{ м.}$$

Переносная скорость точки вычисляется по формуле (переносное движение — вращение вокруг неподвижной вертикальной оси): $V_{Me} = \omega_e R_{Me} = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$ м/с.

Вектор $\vec{V}_{Me}$ направлен по касательной к траектории переносного движения в сторону вращения ω_e, т. е. вдоль оси Mx противоположно ее положительному направлению. Вектор $\vec{V}_{Me}$ направлен перпендикулярно плоскости рамки D от нас (см. рис. 55).

Определение величины и направления абсолютной скорости точки *M*
(см. уравнение (1) на с. 87)

Так как векторы $\vec{V}_{Me}$ и $\vec{V}_{Mr}$ взаимно перпендикулярны, величина абсолютной скорости определена с помощью теоремы Пифагора

$$V_M = \sqrt{V_{Mr}^2 + V_{Me}^2} = \sqrt{3{,}0^2 + 0{,}4^2} = 3{,}03 \quad \text{см/с.}$$

Вектор абсолютной скорости точки $\vec{V}_M$ изображен как диагональ прямоугольника, сторонами которого являются векторы $\vec{V}_{Me}$ и $\vec{V}_{Mr}$ (см. рис. 55).

Аналитически направление вектора абсолютной скорости определяют направляющие косинусы координатных осей. Это косинусы углов β_x, β_y, β_z, образованных вектором $\vec{V}_M$ и координатными осями x, y, z.

Спроецируем уравнение (1) на оси x, y, z:

$$V_{M1x} = -V_{M1e} = -0{,}4 \quad \text{м/с;}$$

$$V_{M1y} = V_{M1r} \cos \alpha = 3 \cdot \cos 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}6 \ \text{м/с;}$$

$$V_{M1z} = V_{M1r} \sin \alpha = 3 \cdot \cos 30° = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5 \ \text{м/с;}$$

$$\cos \beta_x = \frac{V_{Mx}}{V_M} = -\frac{0{,}4}{3{,}03} = -0{,}3;$$

$$\cos \beta_y = \frac{V_{My}}{V_M} = \frac{2{,}6}{3{,}03} = 0{,}86;$$

$$\cos\beta_z = \frac{V_{Mz}}{V_M} = \frac{1{,}5}{3{,}03} = 0{,}495\,.$$

Абсолютное ускорение точки *M*.
Теорема Кориолиса о сложении ускорений

В соответствии с теоремой Кориолиса о сложении ускорений точки при её сложном движении: вектор абсолютного ускорения точки равен векторной сумме относительного, переносного и кориоли́сова ускорений этой точки

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{Me} + \vec{a}_{Mr} + \vec{a}_{M\text{кор}}; \qquad (4)$$

где $\vec{a}_{Mr}$ — относительное ускорение точки M (определяем по методике и формулам раздела «Кинематика точки»); $\vec{a}_{Me}$ — переносное ускорение точки M (определяем по методике и формулам раздела «Кинематика твёрдого тела»); $\vec{a}_{M\text{кор}}$ — кориоли́сово ускорение точки M (определяется формулой $\vec{a}_{M\text{кор}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_{Mr}$).

Относительное ускорение точки *M*

Методика определения относительного ускорения точки изложена в п. «Относительная скорость точки *M*» (см. с. 89).

Найдем относительное ускорение точки M, используя методы раздела «Ускорение точки. Естественный способ задания движения»

$$\vec{a}_{Mr} = \vec{a}^{\,\tau}_{Mr} + \vec{a}^{\,n}_{Mr}, \qquad (5)$$

где $a^{\tau}_{Mr} = \dot{V}_{Mr} = 2$ м/с², $a^{n}_{Mr} = \dfrac{V_{Mr}}{R} = \dfrac{3^2}{0{,}2} = 45$ м/с².

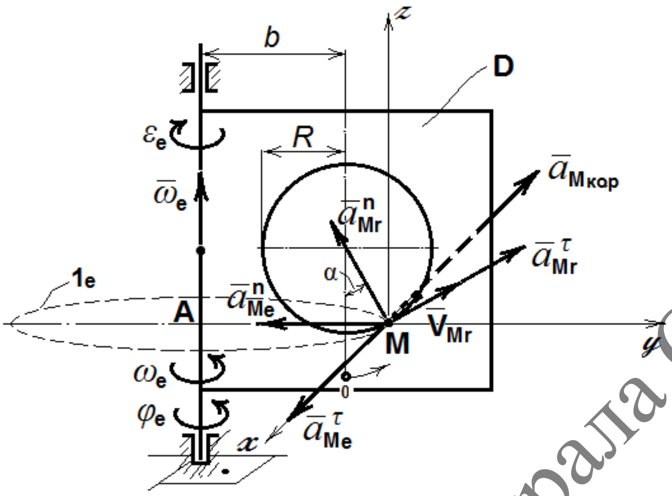
Векторы $\vec{a}^{\,\tau}_{Mr}$ — касательное относительное ускорение точки и $\vec{a}^{\,n}_{Mr}$ — нормальное относительное ускорение точки, изображены на рис. 56.

Переносное ускорение точки *M* — это ускорение точки рамки, вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси,

$$\vec{a}_{Me} = \vec{a}^{\,\tau}_{Me} + \vec{a}^{\,n}_{Me},$$

где $a^{\tau}_{Me} = |\varepsilon_e| \cdot R_{Me} = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ м/с² (здесь угловое ускорение переносного движения ε_e определено по формуле $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = -2$ рад/с²). Направление ε_e показано на рис. 56. Положение точки на рамке D найдено равенством (2):

$$a^{n}_{Me} = \omega_e^2 \cdot R_{Me} = 1^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \text{ м/с}^2.$$



1е - траектория переносного движения точки М

Рис. 56

Векторы $\vec{a}^{\tau}_{Me}$ и $\vec{a}^{n}_{Me}$ также изображены на рис. 56. (Подробнее см. раздел «Кинематика вращательного движения твердого тела»).

Ускорение Кориолиса точки *M*

Кориоли́сово ускорение точки *M* равно

$$\vec{a}_{M\text{кор}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_{Mr} \,. \tag{6}$$

Направление вектора кориоли́сова ускорения точки *M* ($\vec{a}_{M\text{кор}}$) определено правилом векторного произведения (векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}^{\tau}_{Mr}$) и может быть найдено двумя способами.

1-й способ. Перенести вектор $\vec{\omega}_e$ в точку М; определить плоскость, в которой лежат векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_{Mr}$. Провести через точку М перпендикуляр к этой плоскости. Вектор ускорения Кориолиса точки М $\vec{a}_{M\text{кор}}$ направить по этому перпендикуляру в ту сторону, откуда поворот вектора $\vec{\omega}_e$ до совмещения с вектором $\vec{V}_{Mr}$ по наименьшему углу виден происходящим против хода часовой стрелки.

2-й способ — правило Жуковского. Спроецировать вектор $\vec{V}_{Mr}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$. Повернуть в этой плоскости, полученную проекцию на 90° в сторону вращения ω_e — получим направление вектора $\vec{a}_{M\text{кор}}$.

Величину кориоли́сова ускорения точки M определяет формула

$$a_{M\text{кор}} = 2|\omega_e| \cdot |V_{Mr}| \cdot \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_{Mr}). \qquad (7)$$

Из выражения (7) следует, что кориоли́сово ускорение $a_{M\text{кор}}$ равно нулю, если:

1) $\omega_e = 0$, т. е. когда переносное движение — поступательное, либо в заданный момент времени t_1 величина ω_e обращается в нуль;

2) вектор $\vec{\omega}_e$ параллелен вектору $\vec{V}_{Mr}$, тогда $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_{Mr}) = 0$;

3) $V_{Mr} = 0$ в заданный момент движения t_1.

Подсчитаем величину кориоли́сова ускорения точки M по формуле (7)

$$a_{M\text{кор}} = 2|\omega_e| \cdot |V_{Mr}| \cdot \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_{Mr}) = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin 60° = 5{,}2 \quad \text{м/с}^2.$$

Направление вектора $\vec{a}_{M\text{кор}}$ ($\vec{a}_{M\text{кор}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_{Mr}$) показано на рис. 56.

Величина и направление абсолютного ускорения точки *M*

Принимая во внимание, что в приведенном решении переносное и относительное ускорения точки определены как суммы касательного и нормального ускорений абсолютное ускорение точки M равно векторной сумме пяти ускорений

$$\vec{a}_M = \vec{a}^{\tau}_{Mr} + \vec{a}^{n}_{Mr} + \vec{a}^{\tau}_{Me} + \vec{a}^{n}_{Me} + \vec{a}_{M\text{кор}}. \qquad (8)$$

Найдем величину абсолютного ускорения точки M методом проекций. Спроецируем векторное равенство (8) на оси координат x, y, z

$$a_{Mx} = a^{\tau}_{Me} - a_{M\text{кор}} = 0{,}8 - 5{,}2 = -4{,}4 \quad \text{м/с}^2;$$

$$a_{My} = a^{\tau}_{Mr}\cos 30° - a^{n}_{Mr}\sin 30° - a^{n}_{Me} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 45 \cdot \frac{1}{2} - 0{,}4 = 21{,}2 \quad \text{м/с}^2;$$

$$a_{Mz} = a^{\tau}_{Mr}\sin 30° + a^{n}_{Mr}\cos 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} + 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40{,}0 \quad \text{м/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки M вычисляем по теореме Пифагора

$$a_M = \sqrt{a^2_{Mx} + a^2_{My} + a^2_{Mz}} = \sqrt{4{,}4^2 + 21{,}2^2 + 40{,}0^2} = 45{,}5 \quad \text{м/с}^2.$$

Аналитически направление вектора абсолютного ускорения определяют направляющие косинусы координатных осей. Это косинусы углов γ_x, γ_y, γ_z, образованных вектором $\vec{V}_M$, и координатными осями x, y, z:

$$\cos\gamma_x = \frac{a_{Mx}}{a_M} = -\frac{4{,}4}{45{,}5} = -0{,}96\,;$$

$$\cos\gamma_y = \frac{a_{My}}{a_M} = -\frac{21{,}2}{45{,}5} = 0{,}47\,;$$

$$\cos\gamma_z = \frac{a_{Mz}}{a_M} = -\frac{40{,}0}{45{,}5} = 0{,}88\,.$$

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Какое движение точки называется сложным?
2. Что называют абсолютным, относительным и переносным движениями точки?
3. Укажите в своем задании траекторию или элемент траектории абсолютного, относительного и переносного движений.
4. Какая связь существует между абсолютной, относительной и переносной скоростями точки?
5. Как определяется абсолютное ускорение точки при ее сложном движении?
6. Как представить ускорение Кориолиса в виде векторного произведения?
7. Как направлено ускорение Кориолиса?
8. Чему равен модуль ускорения Кориолиса?
9. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
10. Как формулируется теорема о сложении ускорений точки при поступательном переносном движении?
11. Что характеризует относительное ускорение точки?
12. Что характеризует переносное ускорение точки?
13. Что характеризует ускорение Кориолиса?

ДИНАМИКА

7. Задание.

Исследование колебательного движения материальной точки

Варианты 1 – 5 (рис. 57). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 2 и 4) или системы грузов D и E массами m_D *и* m_E (варианты 1, 3, 5), отнеся их движение к оси x; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Стержень, соединяющий грузы, считать невесомым и недеформируемым.

Вариант 1. Груз D (m_D = 2кг) прикреплен к бруску AB, подвешенному к двум одинаковым параллельным пружинам, коэффициент жесткости каждой из которых c = 3 Н/см. Точка прикрепления груза D находится на равных расстояниях от осей пружин. В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E (m_E = 1 кг). Сопротивление движению системы двух грузов пропорционально скорости: $R = 12\,v$ (Н), где v — скорость (м/с). Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, прикрепленного к бруску, пренебречь.

Вариант 2. В момент, когда стержень, соединяющий грузы D (m_D = =1 кг) и E (m_E = 2 кг), перерезают, точка B (верхний конец последовательно соединенных пружин) начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}5\sin 18t$ (см) — ось ξ направлена вертикально вниз). Коэффициенты жесткости пружин c_1 = 12 Н/см, c_2 = 36 Н/см.

Вариант 3. Груз D (m_D = 0,8 кг) висит на пружине, имеющей коэффициент жесткости c_1 = 10 Н/см. Пружина прикреплена к точке F бруска AB. Брусок подвешен к двум параллельным пружинам, коэффициенты жесткости которых c_2 = 4 Н/см, c_3 = 6 Н/см; точка F находится на расстояниях a и b от осей этих пружин: $a/b = c_3/c_2$. В некоторый момент к грузу D подвешивают груз E (m_E = 1,2 кг). В тот же момент системе грузов сообщают скорость v_0 = = 0,2 м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 4. Статическая деформация двух одинаковых параллельных пружин под действием грузов D (m_D = 0,5 кг) и E (m_E = 1,5 кг), $f_{ст}$= 4 см. Грузы подвешены к пружинам с помощью абсолютно жесткого бруска AB. В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают. Сопротивление движению груза D пропорционально скорости: $R = 6v$, где v — скорость. Массой бруска и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

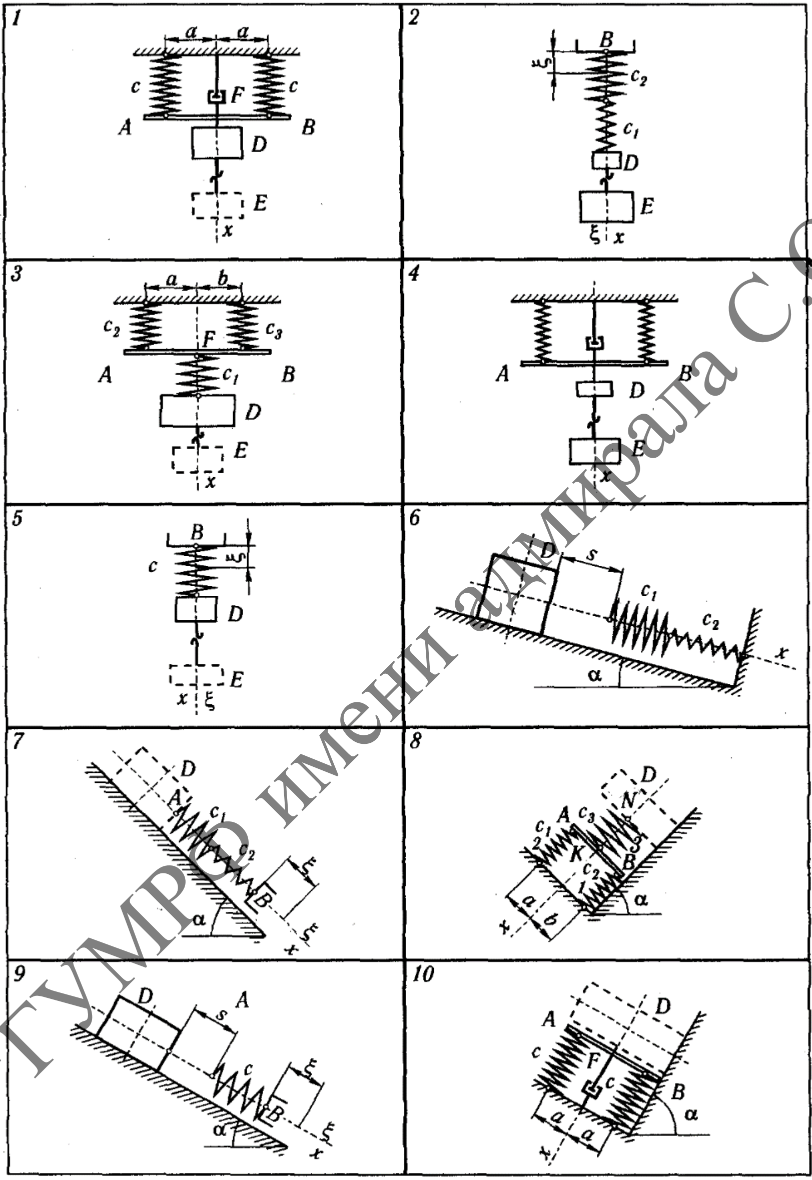

1
a
c
F
A
B
D
E
x
2
B
ξ
c₂
c₁
D
E
ξ
x
3
b
c₂
c₃
F
A
B
c₁
D
E
x
4
A
B
D
E
x
5
B
ξ
c
D
E
x
ξ
6
D
s
c₁
c₂
x
α
7
D
A
c₁
c₂
ξ
B
α
ξ
x
8
D
N
A
c₃
c₁
K
B
c₂
a
b
x
α
9
D
s
A
c
ξ
B
α
ξ
x
10
A
D
c
F
B
a
α
x

Рис. 57

Вариант 5. Одновременно с подвешиванием к грузу D (m_D = 1,6 кг), висящему на пружине, коэффициент жесткости которой c = 4 Н/см, груза E (m_E = 2,4 кг) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 2\sin 5t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B (ξ = 0).

Варианты 6 – 10 (см. рис. 57). Найти уравнение движения груза D массой m_D по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, с момента соприкосновения груза с пружиной или с системой пружин, предполагая, что при дальнейшем движении груз от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 6. Пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости (α = 30°) расстояние s = 0,1 м, груз D (m_D = 4 кг), ударяется о недеформированные, последовательно соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости c_1 = 48 Н/см, c_2 = 24 Н/см.

Вариант 7. В некоторый момент времени груз D (m_D = 2 кг) присоединяют без начальной скорости к концу A недеформированных, последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 = 12 Н/см, c_2 = 6 Н/см. В этот же момент времени (t = 0) другой конец пружин B начинает совершать движение вдоль наклонной плоскости (α = 45°) по закону $\xi = 0{,}02\sin 20t$ (м) — ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B (ξ = 0).

Вариант 8.Две параллельные пружины 1 и 2, имеющие коэффициенты жесткости c_1 = 4 Н/см, c_2 = 6 Н/см соединены абсолютно жестким бруском AB, к точке К которого прикреплена пружина 3 с коэффициентом жесткости c_3 = 15 Н/см. Точка K находится на расстояниях a и b от осей пружин 1 и 2: a/b = = c_2/c_1.Пружины 1 ,2 и 3 не деформированы. Груз D массой 1,5 кг присоединяют концу N пружины 3; в тот же момент грузу D сообщают скорость v_0 = = 0,5 м/с, направленную вниз, параллельно наклонной плоскости (α = 45°). Массой бруска AB пренебречь.

Вариант 9. Груз D (m_D = 1,2 кг), пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости (α = 30°) расстояние s = 0,2 м, ударяется о недеформированную, пружину, коэффициент жесткости которой c = 4,8 Н/см. В этот же момент (t = 0) точка B (нижний конец пружины) начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0{,}03\sin 12t$ (м) — ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз) (см. примеч. к варианту 7).

Вариант 10. Груз D (m_D = 1 кг) прикрепляют к середине абсолютно жесткого бруска AB, соединяющего концы двух одинаковых параллельных пружин, не сообщая начальной скорости; пружины не деформированы. Коэффициенты жесткости пружин c = 1,5 Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 8v$, где v — скорость, $\alpha = 60°$. Массой бруска AB и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

Варианты 11 – 15 (рис. 58). Груз D массой m_D укреплен на конце невесомого стержня, который может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси E. Груз соединен с пружиной или с системой пружин; положение покоя стержня, показанное на чертеже, соответствует недеформированным пружинам. Считая, что груз D, принимаемый за материальную точку, движется по прямой, определить уравнение движения этого груза (трением скольжения груза по плоскости пренебречь).

Движение отнести к оси x, за начало отсчета принять точку, соответствующую положению покоя груза.

Вариант 11. Груз D (m_D = 2,4 кг), соединен с точкой F бруска AB, связывающего концы двух параллельных пружин, коэффициенты жесткости которых c_1 = 1 Н/см и c_2 = 1,4 Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$. Груз D отклоняют на величину λ = 2 см влево от положения, показанного на чертеже, и отпускают без начальной скорости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 6v$, где v — скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой демпфера пренебречь.

Вариант 12. В некоторый момент времени груз D (m_D = 3 кг), удерживаемый в положении, при котором пружина сжата на величину λ = 2 см, отпускают без начальной скорости. Коэффициент жесткости c = 9 Н/см. Одновременно (t = 0) точка B (правый конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}2\sin 8t$ (см) — ось ξ направлена влево.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B (ξ = 0).

Вариант 13. Груз D (m_D = 1 кг) прикреплен к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости c_1 = 12 Н/см и соединенной другим концом с точкой F бруска AB. Брусок AB связывает концы двух параллельных пружин, коэффициент жесткости каждой из которых c = 3 Н/см. Точка F находится на равных расстояниях от осей параллельных пружин. Грузу в положении стержня, показанном на чертеже, сообщают скорость v_0 = 0,5 м/с, направленную вправо. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: R = = 12 V (Н), где V — скорость (м/с). Шток демпфера пропущен через отверстие в невесомом бруске AB и соединен с грузом D.

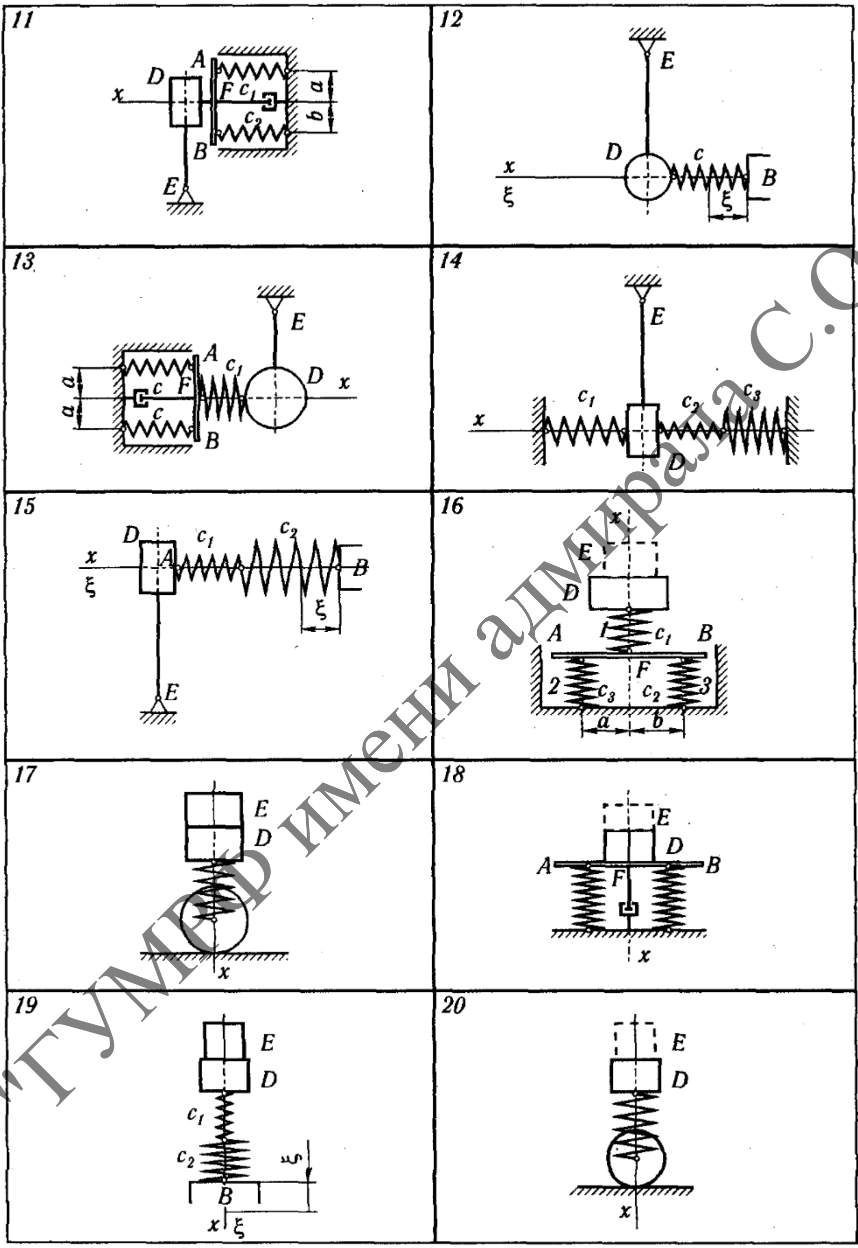

11
D
A
F
B
E
x
12
E
D
c
B
x
ξ
13
A
c
F
B
E
D
x
a
14
E
x
D
15
D
A
B
E
x
ξ
16
x
E
D
A
B
F
1
2
3
a
b
17
E
D
x
18
E
D
A
B
F
x
19
E
D
B
x
ξ
20
E
D
x

Рис. 58

Вариант 14. Груз D (m_D = 1,5 кг) прикреплен одной стороной к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости c_1 = 4,4 Н/см, а другой стороной — к концу двух параллельно соединенных пружин, коэффициенты жесткости которых c_2= 2 Н/см, c_3 = 8 Н/см. Груз отклоняют на величину λ = 2,5 см влево от его положения, показанного на чертеже, и отпускают, одновременно сообщая грузу начальную скорость v_0 = 0,4 м/с, направленную вправо.

Вариант 15. Груз D (m_D = 1 кг) прикреплен к концу A последовательно соединенных пружин. Другой конец пружин B движется по закону $\xi = 1{,}8 \times \sin 12t$ (см) — ось ξ направлена влево). Коэффициенты жесткости пружин c_1 = 4 Н/см, c_2 = 12 Н/см. При t = 0 груз находится в положении покоя, соответствующем недеформированным пружинам (см. примеч. к варианту 12).

Варианты 16 – 20 (см. рис. 58). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 17 и 19) или системы грузов D и E массами m_D *и* m_E (варианты 16, 18, 20), отнеся движение к оси x; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Предполагается, что грузы D и E при совместном движении не отделяются.

Вариант 16. Пружина *1*, на которой покоится груз D (m_D = 10 кг), опирается в точке F на брусок AB, соединяющий концы двух параллельных пружин 2 и 3. Коэффициенты жесткости (Н/см) пружин 1, 2 и 3: c_1 = 200, c_2 = = 160, c_3 = 140. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин 2 и 3: $a/b = c_3/c_2$. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E (m_E = 20 кг); одновременно системе грузов сообщают скорость v_0 = 0,4 м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 17. В некоторый момент времени груз E снимают с груза D (оба груза находятся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины). Угловая частота собственных колебаний системы грузов D и E на пружине ω_c = 20 рад/с, отношение масс m_D / m_E = 2/3.

Вариант 18. Статическая деформация каждой из двух одинаковых параллельных пружин под действием груза D (m_D = 20 кг) равна f_{cmD}=2 см. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E (m_E = 10 кг). Сопротивление движению грузов пропорционально скорости: $R = 60\sqrt{3}v$, где v —скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, связанной с ним, пренебречь.

Вариант 19. Два груза D (m_D = 15 кг) и E (m_E = 25 кг), покоятся на последовательно соединенных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости c_1= 250 Н/см, и c_2 = 375 Н/см. В момент, когда снимают груз E, точка B опирания пружин начинает совершать движение по закону $\xi = 0{,}5\sin 30t$ (см) — ось ξ направлена вертикально вниз.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B (ξ = 0).

Вариант 20. На груз D, находящийся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины, в некоторый момент времени устанавливают груз E. В этот же момент времени системе двух грузов сообщают скорость v_0 = 0,3 м/с, направленную вниз. Угловая частота собственных колебаний груза D на пружине ω_D = 24 рад/с, отношение масс m_E / m_D = 3.

Варианты 21 – 25 (рис. 59). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, отнеся движение к оси x, за начало отсчета принять положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 21. В некоторый момент времени груз D (m_D = 2 кг) прикрепляют к концам недеформированных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 = 7 Н/см, c_2 = 3 Н/см; одновременно грузу сообщают скорость v_0 = = 0,4 м/с, направленную вдоль наклонной плоскости (α = 45°) вниз.

Вариант 22. Груз D находится на наклонной плоскости (α = 30°) в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины $f_{ст}$= = 2 см. В некоторый момент времени (t = 0) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 0{,}01\sin 10t$ (м) — ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B (ξ = 0).

Вариант 23. Груз D (m_D = 3 кг) прикрепляют к точке F бруска AB, соединяющего концы двух недеформированных параллельных пружин, и отпускают без начальной скорости. Коэффициенты жесткости пружин c_1 = = 2 Н/см и c_2 = 4 Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$; α = 60°. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v — скорость. Массой бруска AB и массой демпфера пренебречь.

Вариант 24. В некоторый момент времени груз D (m_D = 1 кг) присоединяют к концу A недеформированных, последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 = 12 Н/см, c_2 = 4 Н/см, и отпускают без начальной скорости. Одновременно (t = 0) другой конец пружин B начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}5\sin 10t$ (см). Ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз (α = 30°) — см. примеч. к варианту 22).

Вариант 25. Концы двух одинаковых параллельных пружин соединены бруском AB. Статическая деформация каждой из пружин под действием груза D (m_D = 1,5 кг), находящегося на наклонной плоскости (α = 30°), $f_{ст}$= 4,9 см. В некоторый момент грузу D сообщают скорость v_0 = = 0,3 м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: R = 6v, где v — скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, связанной с бруском, пренебречь.

Варианты 26 – 30 (рис. 59). Пренебрегая массой плиты и считая её абсолютно жесткой, найти уравнение движения груза D массой m с момента соприкасания его с плитой, предполагая, что при дальнейшем движении груз от плиты не отделяется.

Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя этого груза (при статической деформации пружин).

Вариант 26. Плита лежит на двух параллельных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости c_1= 600 Н/см и c_2 = 400 Н/см. Груз D (m_D = 50 кг) падает без начальной скорости с высоты h = 0,1 м в точку F плиты, находящуюся на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$.

Вариант 27. Коэффициент жесткости каждой из двух параллельных пружин, на которых лежит плита, c = 130 Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: R = 400v, где v — скорость. Массой плиты и демпфера пренебречь.

Вариант 28. груз D падает на плиту с высоты h = 5 см. Статический прогиб пружины под действием этого груза $f_{ст}$= 1 см.

Вариант 29. Плита лежит на двух одинаковых параллельных пружинах 1 и 2, коэффициенты, жесткости которых c_1= c_2 = c = 400 Н/см. В некоторый момент груз D (m_D = 200 кг) устанавливают на середину плиты и одновременно прикрепляют к недеформированной пружине 3, имеющей коэффициент жесткости c_3 = 200 Н/см. В тот же момент времени (при недеформированных пружинах) грузу сообщают скорость v_0 = 0,6 м/с, направленную вниз.

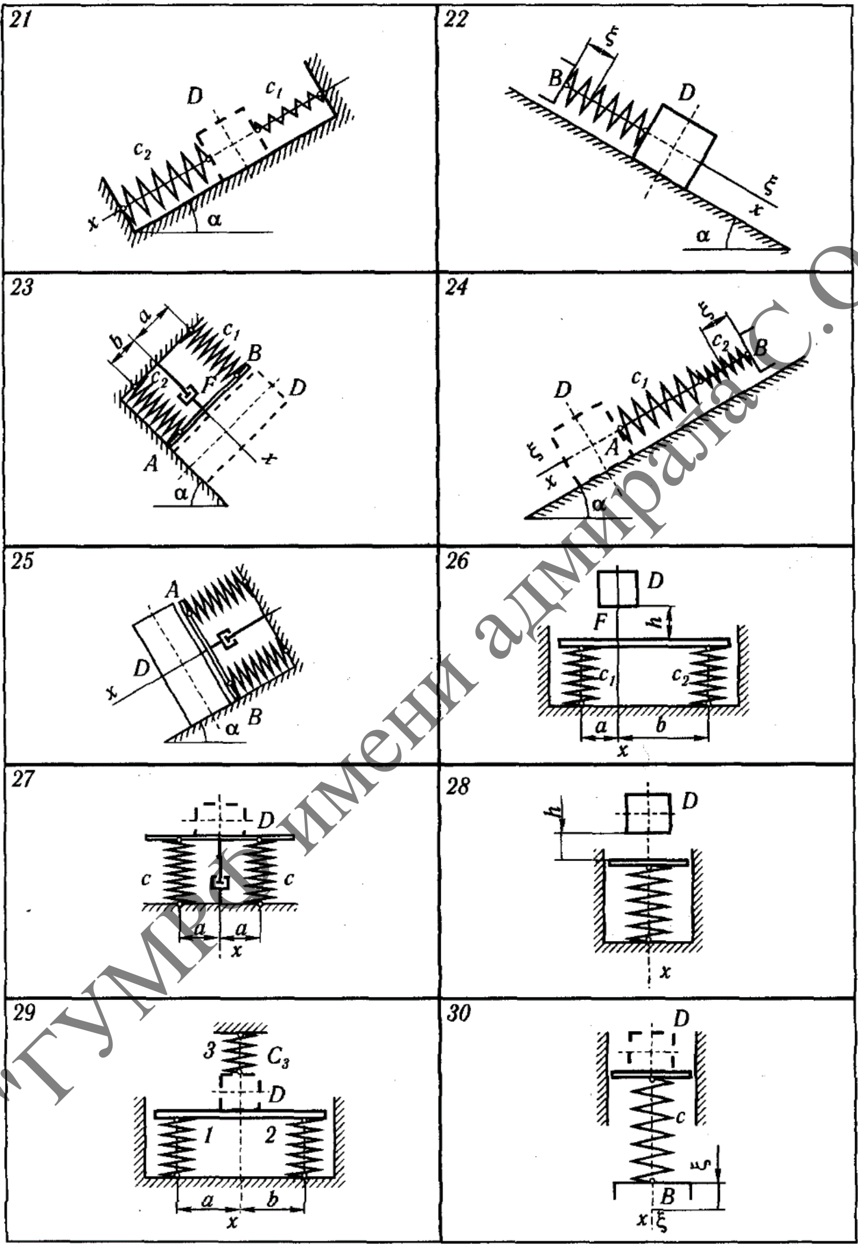

21
D
c_1
c_2
x
α
22
ξ
B
D
ξ
x
α
23
a
b
c_1
c_2
B
F
D
A
x
α
24
ξ
c_2
B
c_1
D
A
ξ
x
α
25
A
D
x
α
B
26
D
F
h
c_1
c_2
a
b
x
27
D
c
c
a
a
x
28
h
D
x
29
3
C_3
D
1
2
a
b
x
30
D
c
ξ
B
x
ξ

Рис. 59

В а р и а н т 30. В некоторый момент времени груз D (m_D = 100 кг) устанавливают на плиту и отпускают (при недеформированной пружине) без начальной скорости. В тот же момент времени точка B (нижний конец пружины) начинает совершать движение по вертикали согласно закону $\xi = 0{,}5\sin 20t$ (см) — ось ξ направлена вниз). Коэффициент жесткости пружины, c = 2000 Н/см.

Примечание. Начало отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B (ось ξ =0).

Пример выполнения задания
«Малые вынужденные колебания
без учета сопротивления движению»

Груз массой m = 40 кг прикреплен к нижнему концу пружины, находится в положении устойчивого равновесия (ПУР). В момент начала движения t_0 = 0 грузу сообщают начальную скорость направленную вниз v_0 = = 1,45 м/с. Одновременно верхний конец пружины, точка K (рис. 60), начинает движение вдоль вертикальной оси y, так что

$$y_k = a\sin(\omega t)\ (\text{м}); \tag{1}$$

где a — амплитуда колебаний точки K (a= 442 см = 0,442 м); ω — угловая частота колебаний точки K (ω =0,99 c^{-1}).

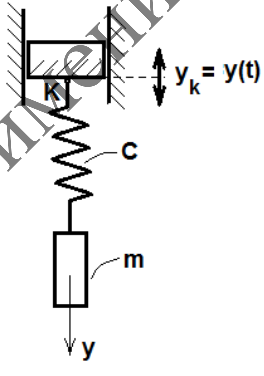


Рис. 60

Пружина удлиняется на Δ = 1 см = 0,01 м при приложении к пружине силы F = 39 Н.

Найти уравнения движения груза массой m, построить развертку свободных и вынужденных колебаний во времени.

Решение. Статика. Рассмотрим равновесие груза, прикрепленного к пружине при неподвижной точке K. На груз действуют сила тяжести груза

$m\vec{g}$ и восстанавливающая статическая сила упругости пружины $\vec{F}^{\text{ст}}_{\text{упр}}$ (рис. 61).

Упругая характеристика пружины (зависимость восстанавливающей упругой силы от деформации пружины Δ) линейная: $|F_{\text{упр}}| = c \cdot \Delta$;

$$c = \frac{F_{\text{упр}}}{\Delta} = \frac{39}{0{,}01} = 3900 \quad \text{Н/м},$$

где c — коэффициент жесткости пружины.

Линейная зависимость восстанавливающей силы от деформации имеет место при деформациях в пределах зоны упругости — закон Гука. Будем считать, что колебания малы в этом смысле.

Составим уравнение равновесия груза в положении устойчивого равновесия — 0 (см. рис. 61).

$$\begin{aligned} &\sum F^{e}_{iy} = mg - |F^{\text{ст}}_{\text{упр}}| = 0; \\ &mg - |c \cdot y_{\text{ст}}| = 0; \\ &F^{\text{ст}}_{\text{упр}} = -c \cdot y_{\text{ст}}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Знак минус указывает, что сила $\vec{F}^{\text{ст}}_{\text{упр}}$ противоположна направлению деформации пружины $y_{\text{ст}}$, и этот знак может быть учтен один раз — в рассматриваемом примере учтен на расчетной схеме (см. рис. 61).

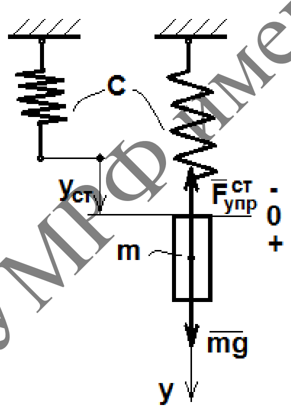


Рис. 61

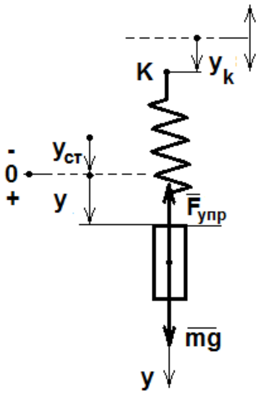


Рис. 62

Динамика. Покажем произвольное положение груза и точки K в процессе колебаний (рис. 62). Движение груза происходит под действием силы тяжести груза $m\vec{g}$ и силы упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

$$F_{\text{упр}} = -c \cdot y^* = -c \cdot (y_{\text{ст}} + y - y_k),$$

где $y^* = (y_{\text{ст}} + y - y_k)$ — суммарная деформация пружины.

Составим уравнение движения груза в проекции на ось *y*, используя основной закон динамики

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy}^e;$$

$$m\ddot{y} = mg - F_{\text{упр}};$$

$$m\ddot{y} = mg - c \cdot (y_{\text{ст}} + y - y_k);$$

$$m\ddot{y} = mg - c \cdot y_{\text{ст}} - c \cdot y + c \cdot y_k).$$

С учетом равенств (2) и (1)

$$m\ddot{y} + c \cdot y = c \cdot a \sin(\omega t). \qquad (3)$$

Обозначим $F_a = c \cdot a = 3900 \cdot 0{,}442 = 1724{,}8$ Н — амплитуда эквивалентной вынуждающей силы. Подставим ее в выражение (3):

$$m\ddot{y} + c \cdot y = F_a \sin(\omega t); \qquad (4)$$

$$40\ddot{y} + 3900y = 1724{,}8\sin(0{,}99t). \qquad (5)$$

Уравнения (4), (5) — линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка. Это дифференциальные уравнения вынужденных колебаний без учета сопротивления движению. Перепишем уравнение (4), разделив его на *m*,

$$\ddot{y} + \omega_{\text{с}}^2 y = h_{\text{а}} \sin(\omega t), \qquad (6)$$

где

$$\omega_{\text{с}}^2 = \frac{c}{m} = \frac{3900}{40} = 97{,}4\ \text{с}^{-2};$$

$\omega_{\text{с}} = \sqrt{97{,}4} = 9{,}87\ \text{с}^{-1}$ — собственная частота консервативной системы;

$h_{\text{а}} = \dfrac{F_{\text{а}}}{m} = \dfrac{1724{,}8}{40} = 43{,}12\ \text{м/с}^2$ — относительная амплитуда вынуждающей силы;

$\omega = 0{,}99\ \text{с}^{-1}$ — угловая частота возбуждения (вынуждающей силы).

$$\ddot{y} + 97{,}4y = 43{,}12\sin(0{,}99t). \qquad (7)$$

Общее решение уравнений (4) – (7) — сумма общего решения соответствующего однородного уравнения, представляющего свободные колебания и какого-либо частного решения, соответствующего правой части, определяющего вынужденные колебания

$$y(t) = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}} = y_{\text{св}} + y_{\text{в}} = C_1 \cos\omega_c t + C_2 \sin\omega_{\text{с}} t + A_{\text{в}} \sin(\omega t - \varepsilon). \qquad (8)$$

Определим вынужденные колебания (в силу возбуждения по закону простых гармоник) в виде:

$$y_{\text{в}} = A_{\text{в}} \sin(\omega t - \varepsilon), \tag{9}$$

где ω — частота вынужденных колебаний (равна частоте возбуждения в случае колебаний по закону простых гармоник) $\omega = 0{,}99$ с$^{-1}$,

$$A_{\text{в}} = \frac{h_{\text{а}}}{|\omega_c^2 - \omega^2|} = \frac{43{,}12}{|9{,}87^2 - 0{,}99^2|} = 0{,}447 \text{ м}$$

где $A_{\text{в}}$ — амплитуда вынужденных колебаний; ε — разность фаз: отставание фазы вынужденных колебаний от фазы возбуждения (фаза гармонических колебаний — аргумент синуса или косинуса, пропорционально которому изменяется значение колеблющейся величины $y_{\text{св}}$ или $y_{\text{в}}$ или величины возбуждения).

Так как $\omega = 0{,}99$ с$^{-1}$ $< \omega_{\text{c}} = 9{,}87$ с$^{-1}$ $\varepsilon = 0$ (если $\omega > \omega_{\text{c}}$, значение разности фаз $\varepsilon = \pi$).

Конкретное решение вынужденных колебаний имеет вид

$$y_{\text{в}} = 0{,}447 \sin(0{,}99t - \pi). \tag{10}$$

Свободные колебания определены уравнением

$$y_{\text{св}} = C_1 \cos \omega_{\text{c}} t + C_2 \sin \omega_{\text{c}} t. \tag{11}$$

Определим конкретные начальные условия движения, соответствующие условию задачи.

По условию задачи, в момент начала движения $t_0 = 0$ грузу, находящемуся в положении устойчивого равновесия (ПУР), сообщают начальную скорость, направленную вниз $v_0 = 1{,}45$ м/с. Так как движение груза происходит вдоль оси y, следует $v_0 = v_{0y} = \dot{y}_0 = 1{,}45$ м/с.

Положение груза определяют, отсчитывая его координаты от положения устойчивого равновесия, обозначенного «0». Тогда в соответствии с условием, начальная координата (начальное положение) груза $y_0 = 0$ (рис. 63).

Итак, начальные условия движения

$t_0 = 0$: $y_0 = 0$ м, $\dot{y}_0 = 1{,}45$ м/с.

Величину $y_{\text{ст}}$ находим из уравнения (2): $y_{\text{ст}} = \dfrac{mg}{c} = \dfrac{40 \cdot 9{,}81}{3900} = 0{,}1$ м.

Постоянные интегрирования C_1, C_2 могут быть найдены с помощью начальных условий движения из решения (8) и его 1-й производной по времени

$$C_1 = y_0 = 0 \text{ м};$$

$$C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} - \frac{\omega h_a}{\omega_c\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)} = \frac{0{,}145}{9{,}87} - \frac{0{,}99 \cdot 43{,}12}{9{,}9\left(9{,}87^2 - 0{,}99^2\right)} = 0{,}102 \text{ м.}$$

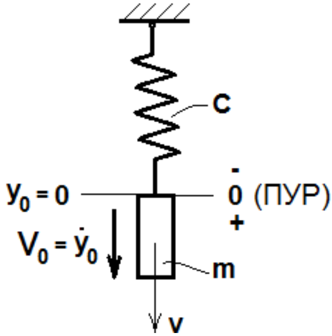


Рис. 63

Конкретное уравнение свободных колебаний имеет вид

$$y_{св} = -0{,}1\cos 9{,}9t - 0{,}028\sin 9{,}9t. \qquad (11')$$

Решение (11) может быть записано в амплитудной форме

$$y_{св} = A_c \sin(\omega_c t + \varphi_0), \qquad (12)$$

где $A_c = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0{,}102^2} = 0{,}102$ м — амплитуда свободных колебаний;

$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{C_1}{C_2} = \operatorname{arctg}\dfrac{0}{0{,}102} = 0$ — начальная фаза свободных колебаний.

Окончательно уравнение движения груза имеет вид (рис. 64):

$$y = y(t) = y_{св} + y_{в} = A_c \sin(\omega_c t + \varphi_0) + A_в \sin(\omega t - \varepsilon);$$

$$y = 0{,}102\sin(9{,}87t + 0) + 0{,}447\sin(0{,}99t - 0).$$

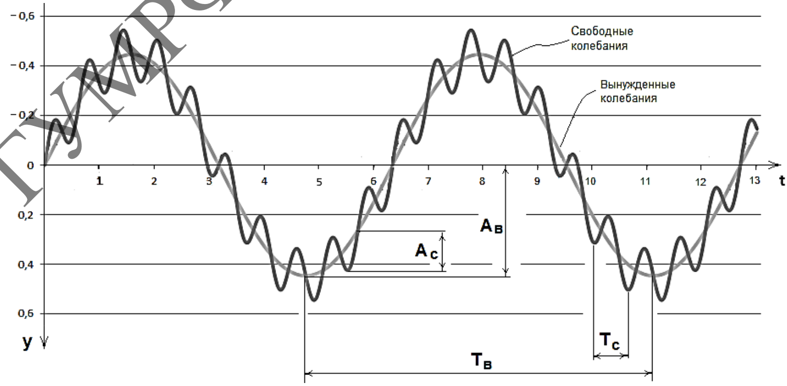


Рис. 64

$$T_{с} = \frac{2\pi}{\omega_{с}} = \frac{2\pi}{9,87} = 0,64 \text{ с};$$

$$T_{в} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,99} = 6,34 \text{ с},$$

где $T_{с}$, $T_{в}$ — периоды свободных и вынужденных колебаний, соответственно.

Графики свободных и вынужденных колебаний (развертки колебаний во времени) показаны на рис. 64.

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Какой процесс можно назвать колебательным?
2. Что такое механические колебания?
3. Что называют механической колебательной системой (МКС)?
4. Какие бывают положения равновесия?
5. Какое положение равновесия называется устойчивым? Неустойчивым? Безразличным?
6. Что можно сказать о потенциальной энергии МКС в положении устойчивого равновесия (ПУР)? Неустойчивого? Безразличного?
7. Какие колебания МКС называются свободными?
8. Чем определяется «малость» колебаний?
9. Как изменяется сила упругости при малых отклонениях от ПУР?
10. Что называют статической деформацией упругой связи?
11. Что называют обобщенной массой (обобщенным моментом инерции) МКС?
12. Что называют обобщенной жесткостью МКС?
13. Как определяется обобщенная жесткость при параллельном соединении упругих связей? При последовательном? При комбинированном?
14. Какая МКС является консервативной?
15. Какой вид имеет дифференциальное уравнение движения (ДУД) консервативной МКС при условии малости колебаний?
16. Какой вид имеет уравнение свободных колебаний консервативной МКС?
17. Что называют амплитудой A_0 колебаний?
18. От чего зависит амплитуда A_0 колебаний МКС?
19. Что называют начальной фазой φ_0 колебаний?
20. От чего зависит начальная фаза φ_0 колебаний?

21. От чего зависят угловая частота ω_c и период $\boldsymbol{T_c}$ свободных колебаний консервативной МКС?

22. Какое свойство МКС называется свойством изохронности?

23. Какая МКС называется диссипативной?

24. Что такое диссипативная сила (диссипативный момент)?

25. Какой вид имеет дифференциальное уравнение движения (ДУД) диссипативной МКС при условии малости колебаний?

26. Какой вид имеет уравнение свободных колебаний диссипативной МКС?

27. При выполнении, какого условия в диссипативной колебательной системе возможно возникновение свободных колебаний?

28. Каким будет движение МКС при выведении ее из ПУР в случае малого сопротивления? Большого сопротивления? Критического сопротивления?

29. Как влияют силы сопротивления на частоту и период свободных колебаний диссипативной МКС?

30. Как изменяется амплитуда свободных колебаний диссипативной системы с течением времени?

31. Изменяются ли частота и период свободных колебаний диссипативной системы с течением времени?

32. Что называют декрементом колебаний?

33. Что характеризует декремент колебаний?

34. Что называют логарифмическим декрементом колебаний?

35. Какие колебания называются вынужденными?

36. Какие способы существуют для возбуждения вынужденных колебаний?

37. Какой вид имеет ДУД МКС при силовом способе возбуждения колебаний без учета сопротивления движению?

38. Какие два колебания идут одновременно в этом случае?

39. Как выглядит решение ДУД при силовом способе возбуждения колебаний без учета сопротивления движению?

40. Как определяется амплитуда вынужденных колебаний ($A_в$) в этом случае?

41. Чему равна частота вынужденных колебаний?

42. Что называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)?

43. Какой вид имеет АЧХ в случае вынужденных колебаний без учета сопротивления движению?

44. В чем заключается динамическая реакция системы на возбуждение?

45. Что называют резонансными вынужденными колебаниями?

46. При какой частоте возбуждения наступает явление резонанса?

47. Какие вынужденные колебания называются дорезонансными, какие зарезонансными?

48. Что называют фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)?

49. Какие вынужденные колебания являются синфазными, какие противофазными?

50. Каким уравнением описываются резонансные вынужденные колебания?

51. Какой вид имеет ДУД МКС при силовом способе возбуждения колебаний с учетом сопротивления движению?

52.Как выглядит решение ДУД при силовом способе возбуждения колебаний с учетом сопротивления движению?

53. Как определяется амплитуда вынужденных колебаний ($A_в$) с учетом сопротивления движению?

54. Как определяется разность фаз ε между фазой возбуждения и фазой вынужденных колебаний с учетом сопротивления движению?

55. Какие колебания называют переходными или неустановившимися колебаниями?

56. Какие колебания называют установившимися?

57. Почему, несмотря на наличие диссипации, вынужденные колебания не затухают?

58. Какой вид имеет АЧХ в случае наличия сопротивления движению?

59. При какой частоте возбуждения наступает явление резонанса в этом случае?

60. Как влияют силы сопротивления на резонансную частоту?

61. Как влияют силы сопротивления на резонансную амплитуду вынужденных колебаний?

62. Какой вид имеет ФЧХ в случае наличия сопротивления движению?

63. Как изменяется ФЧХ с изменением сопротивления?

8. Задание.
Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 65 – 67. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1 – 3, 5, 6, 8 – 12, 17 – 23, 28 – 30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6 – 9, 11, 13 – 15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить количество степеней свободы механической системы, получить выражения обобщенной массы $m_{об}$ и обобщенной силы $F_{об}$ и определить скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет «s».

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; ρ_{2Cz}, ρ_{3Cz} — радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры масс; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; f — коэффициент трения скольжения; f_k — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 8. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Перед выполнением задания «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы» необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Теорема об изменении кинетической энергии (к. э.) механической системы — метод решения задач динамики. Универсальность метода связана с использованием энергетических характеристик механической системы (к. э., работа, мощность).

Практическую значимость теоремы определяют:

I. Энергетические характеристики — инструмент решения задач динамики, в том числе практических. Например, с помощью понятия мощность момента получено известное соотношение мощности роторной установки (например, электродвигателя) (N, кВт), крутящего момента на валу (M, Нм) и частоты вращения (n, об/мин)

$$N = \frac{M \cdot n}{9{,}55} \cdot 10^{-3}.$$

Это уравнение востребовано и «практическими механиками», и в теоретических расчетах.

II. Результаты применения теоремы (записанной в интегральной форме) определяют зависимость скоростей точек тела от их перемещений (или наоборот). Это нашло отражение в документах, регламентирующих безопасное дорожное движение, в которых отмечено, что тормозной путь зависит от квадрата скорости.

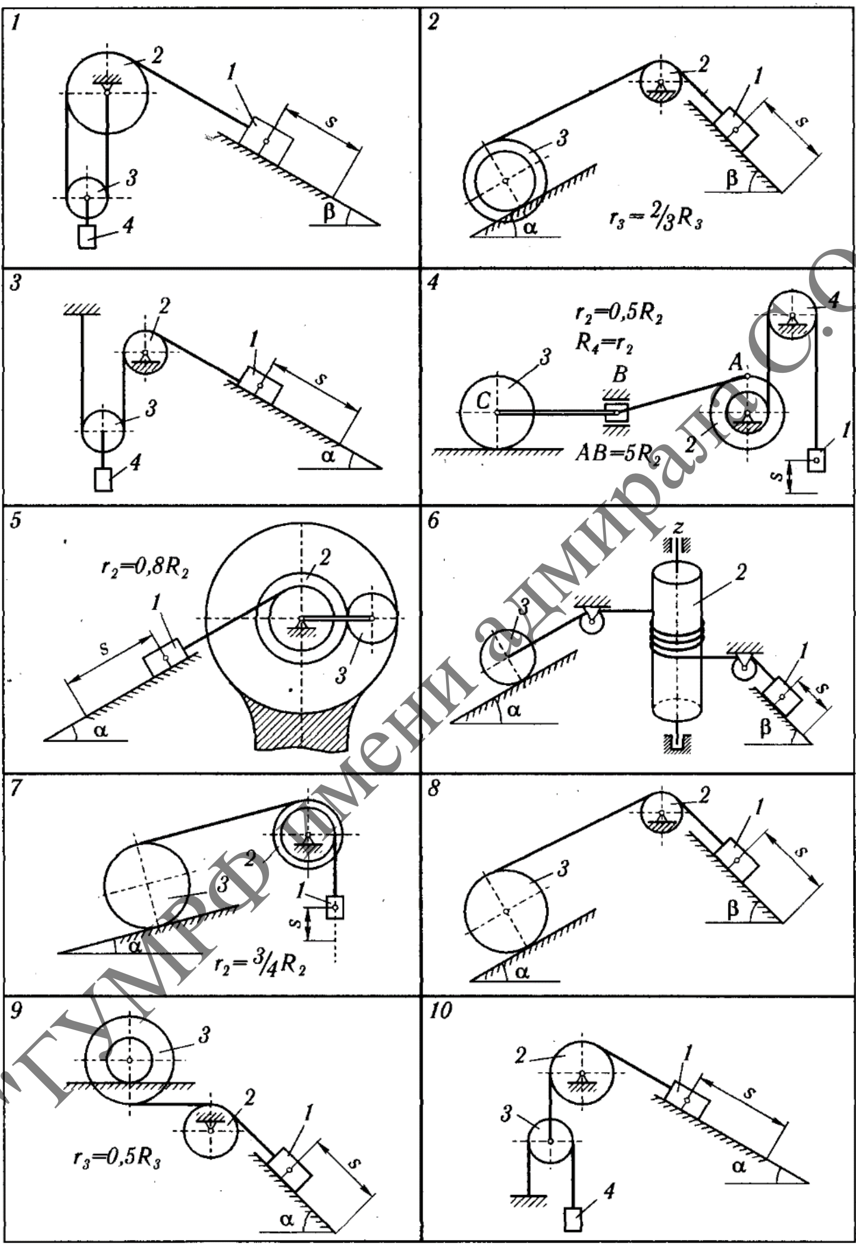
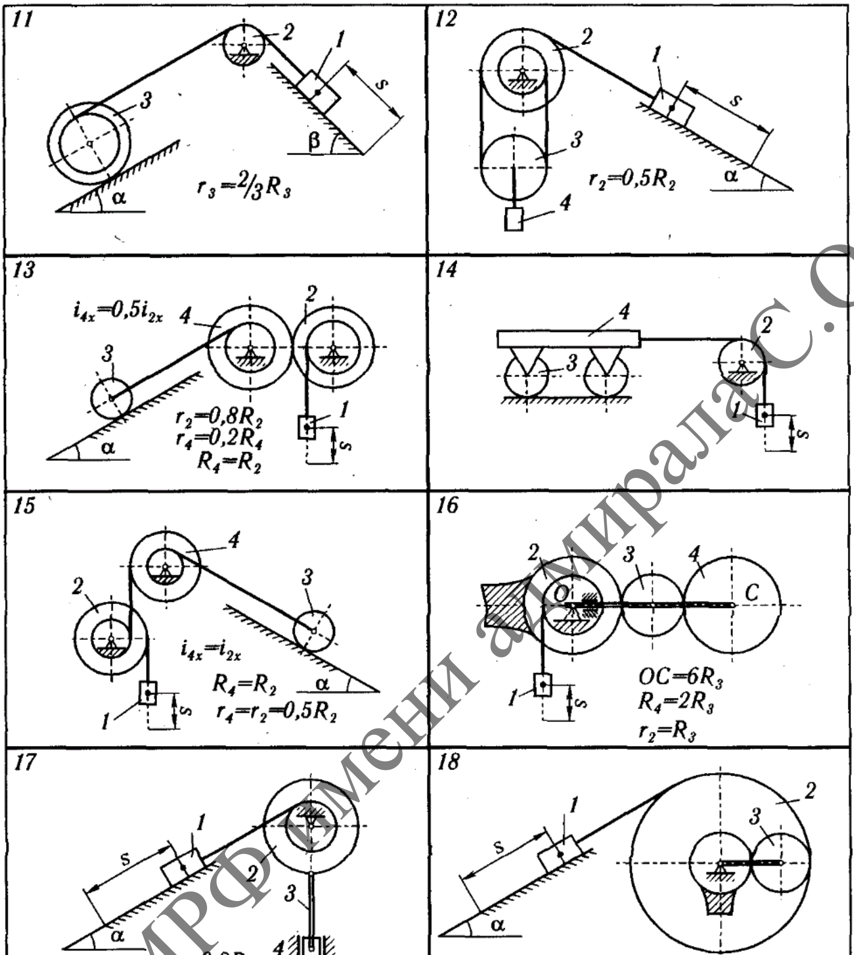

1
2
1
s
3
4
β
2
2
1
s
3
β
α
$r_3 = 2/3 R_3$
3
2
1
s
3
4
α
4
$r_2 = 0,5R_2$
$R_4 = r_2$
4
3
B
A
C
2
1
$AB = 5R_2$
s
5
$r_2 = 0,8R_2$
2
1
s
3
α
6
z
2
3
1
s
α
β
7
2
3
1
s
α
$r_2 = 3/4 R_2$
8
2
1
s
3
β
α
9
3
2
1
$r_3 = 0,5R_3$
s
α
10
2
1
s
3
4
α

Рис. 65



11
$r_3 = 2/3 R_3$
12
$r_2 = 0{,}5R_2$
13
$i_{4x} = 0{,}5 i_{2x}$
$r_2 = 0{,}8R_2$
$r_4 = 0{,}2R_4$
$R_4 = R_2$
14
15
$i_{4x} = i_{2x}$
$R_4 = R_2$
$r_4 = r_2 = 0{,}5R_2$
16
$OC = 6R_3$
$R_4 = 2R_3$
$r_2 = R_3$
17
$r_2 = 0{,}8R_2$
18
19
$r_2 = 0{,}8R_2$
20
$AB = 6r_2$
$r_2 = 0{,}5R_2$

Рис. 66

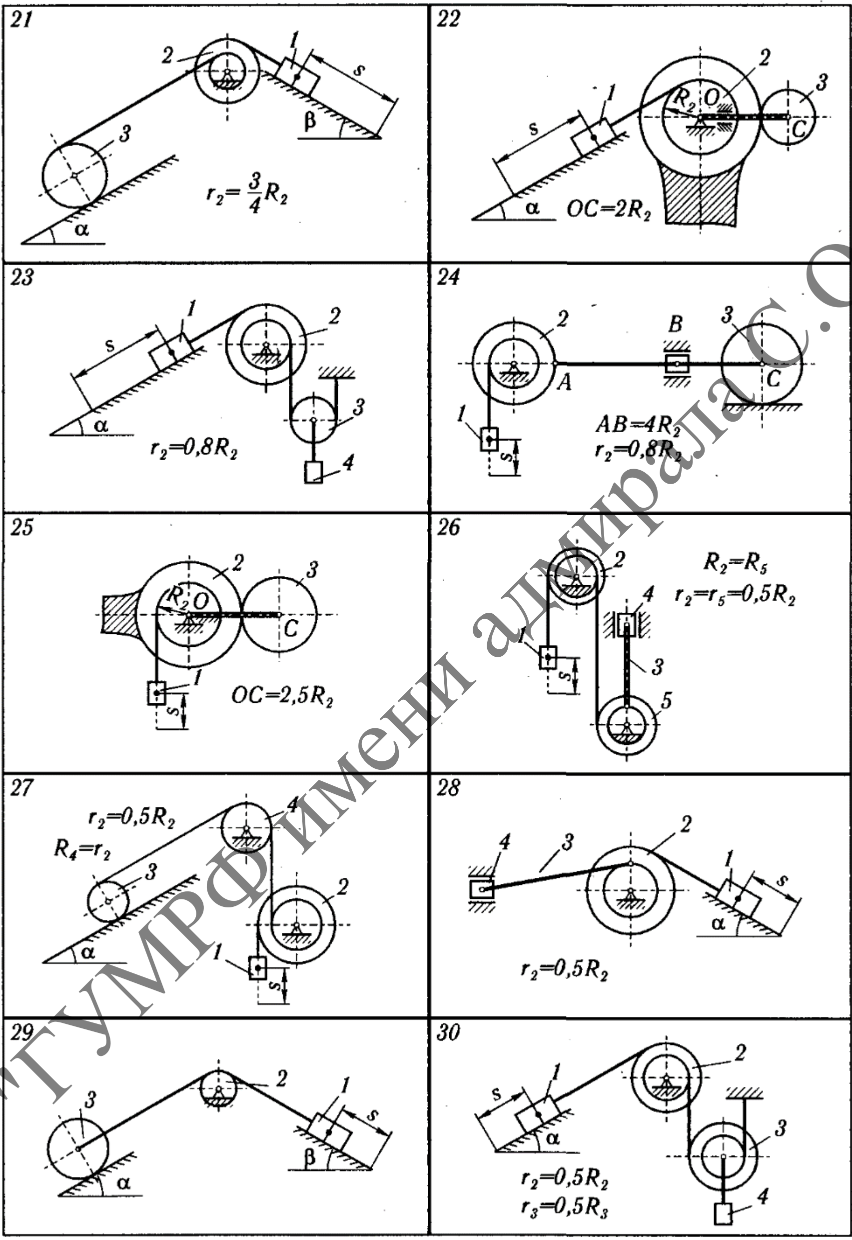

21
$r_2 = \frac{3}{4} R_2$
22
$OC = 2R_2$
23
$r_2 = 0{,}8R_2$
24
$AB = 4R_2$
$r_2 = 0{,}8R_2$
25
$OC = 2{,}5R_2$
26
$R_2 = R_5$
$r_2 = r_5 = 0{,}5R_2$
27
$r_2 = 0{,}5R_2$
$R_4 = r_2$
28
$r_2 = 0{,}5R_2$
29
30
$r_2 = 0{,}5R_2$
$r_3 = 0{,}5R_3$

Рис. 67

Таблица 8

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ, см	s, м	Примечание
(рис. 65-67)	кг				см		см		град					
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	–	–	–	–	–	60	0,10	–	2	
2	m	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	20	30	45	0,22	0,20	2	
3	m	m	$1/10m$	m	–	–	–	–	45	–	0,10	–	2	
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	–	–	–	–	0,30	$0{,}1\pi$	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
5	m	$2m$	m	–	20	15	18	–	60	–	0,12	–	$0{,}28\pi$	Массой водила пренебречь
6	m	$3m$	m	–	–	28	–	–	30	45	0,10	0,28	1,5	
7	m	$2m$	$2m$	–	16	25	14	–	30	–	–	0,20	2	
8	m	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	–	30	45	0,15	0,20	1,75	
9	m	$2m$	$9m$	–	–	30	–	20	30	–	0,12	0,25	1,5	
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	–	–	–	–	60	–	0,10	–	3	
11	m	$1/2m$	$1/4m$	–	–	30	–	25	30	45	0,17	0,20	2,5	
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	–	20	–	30	–	0,20	–	2,5	
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	–	30	–	–	0,24	2	
14	m	$1/2m$	$5m$	$4m$	–	25	–	–	–	–	–	0,20	2	Массы каждого из четырех колес одинаковы
15	m	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	–	60	–	–	0,25	1,5	
16	m	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	–	–	–	–	–	–	$0{,}05\pi$	Массой водила пренебречь
17	m	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	–	15	–	60	–	0,10	–	$0{,}16\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень

Продолжение табл. 8

Номер варианта (рис. 65-67)	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ, см	s, м	Примечание
	кг				см		см		град					
18	m	$3m$	m	–	35	15	32	–	60	–	0,15	–	$0,2\pi$	Массой водила пренебречь
19	m	$1/3m$	$1/10m$	m	24	–	20	–	60	–	0,15	–	1,5	
20	m	$2m$	$20m$	–	20	15	16	–	30	–	0,10	0,20	$0,2\pi$	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
21	m	m	$2m$	–	20	20	16	–	30	45	0,20	0,32	1,2	
22	m	$1/2m$	$1/4m$	–	20	10	–	–	60	–	0,17	–	$0,1\pi$	Массой водила пренебречь
23	m	m	$1/10m$	$4/5m$	20	–	18	–	30	–	0,10	–	1	
24	m	$3m$	$20m$	–	20	30	18	–	–	–	–	0,60	$0,08\pi$	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
25	m	$1/3m$	$1/4m$	–	16	20	–	–	–	–	–	–	$0,04\pi$	Массой водила пренебречь
26	m	$1/2m$	m	$1/3m$	30	–	20	–	–	–	–	–	$0,6\pi$	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
27	m	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	–	30	–	–	0,20	2	
28	m	$2m$	$3m$	–	20	–	14	–	60	–	0,10	–	$0,1\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
29	m	$1/4m$	$1/8m$	–	–	35	–	–	15	30	0,20	0,20	2,4	
30	m	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	–	0,12	–	2	

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы выведена из основного закона динамики. Другими словами, это преобразованный II закон Ньютона. Теоретическая база теоремы определяет ее достоинства:

– условия, в которых происходит движение конкретной механической системы, учитывают естественным образом;
– во внимание принимают только внешние факторы: активные силы и моменты, способствующие движению, а также реактивные силы и моменты;
– внутренние силы в теореме не учитывают, что существенно упрощает ее применение в качестве метода решения задач динамики;
– две формы записи теоремы расширяют ее возможности и позволяют найти ответы на значительную часть вопросов при изучении (исследовании) движения конкретных механических систем.

III. С помощью теоремы, записанной в форме производных, можно определить ускорение.

8.1. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме

> Изменение кинетической энергии механической системы (T–T_0) при ее перемещении из начального положения (T_0 — кинетическая энергия системы в начальном положени) в конечное (заданное) (T — кинетическая энергия системы в конечном положени) равно сумме работ внешних ($\sum A_i^e$) и внутренних сил ($\sum A_i^j$), приложенных к системе на том же перемещении системы из начального положения в конечное.

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j \ . \tag{1}$$

Кинетическую энергию движущегося тела в зависимости от вида его движения подсчитывают с помощью выражений:

– поступательное движение тела (рис. 68)

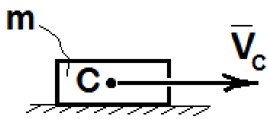


Рис. 68

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m V_C^2 \ , \tag{2}$$

где T, кг·м²/с² = Н·м = Дж; m, кг — масса тела; V_C, м/с — скорость центра масс тела, точки C;

– вращение твердого тела вокруг неподвижной оси C (рис. 69)

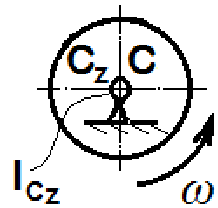


Рис. 69

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2; \tag{3}$$

где C_z — центральная ось, перпендикулярная плоскости рисунка; I_{Cz}, кг·м^2 — момент инерции тела относительно оси C_z; ω, с$^{-1}$ — угловая скорость тела;

– плоское движение тела (рис. 70)

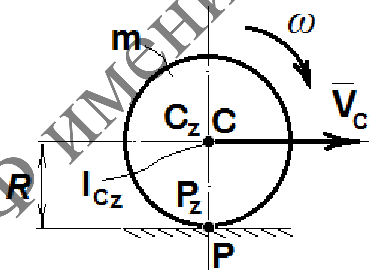


Рис. 70

$$T_{\text{пл}} = \frac{1}{2} m V_C^2 + I_{Cz} \omega^2, \tag{4}$$

или,

$$T_{\text{пл}} = I_{Pz} \omega^2, \tag{5}$$

$$I_{Pz} = I_{Cz} + mR^2,$$

где $P_z || C_z$ — оси, перпендикулярные плоскости рисунка;

Осевые моменты инерции некоторых твердых тел

Сплошной однородный цилиндр (диск) (рис. 71)

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Масса цилиндра (диска) распределена равномерно по ободу (рис. 72)

$$I_{Cz} = mR^2 .$$

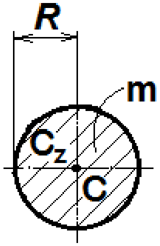


Рис. 71

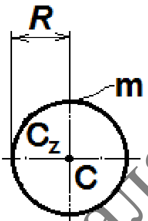


Рис. 72

Тонкий однородный стержень (рис. 73)
($O_z || C_z$ — оси, перпендикулярные стержню)

$$I_{Cz} = \frac{1}{12} mL^2 ;$$

$$I_{Oz} = \frac{1}{3} mL^2 .$$

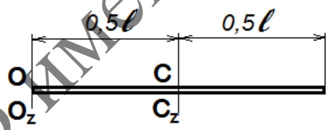


Рис. 73

В том случае, когда задан радиус инерции тела ρ_{Cz} (м) относительно оси C_z, момент инерции этого тела относительно оси C_z, независимо от формы тела (рис. 74), определяют равенством

$$I_{Cz} = m\rho_{Cz}^2 .$$

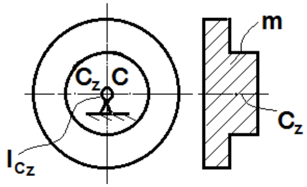


Рис. 74

Работа силы $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ на перемещении $\vec{s}$ равна (рис. 75)

$$A(F) = \vec{F} \circ \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha \text{, (Н·м = Дж).} \tag{6}$$

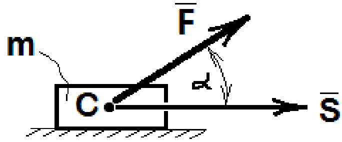


Рис. 75

Работа момента (M = const, M_1 = const) — рис. 76:

$$A(M) = M \cdot \varphi \text{ (Н·м = Дж);} \tag{7}$$

$$A(M_1) = -M_1 \cdot \varphi \text{ (Н·м = Дж),} \tag{8}$$

где φ, рад — угол поворота тела; M, M_1, Н·м — моменты.

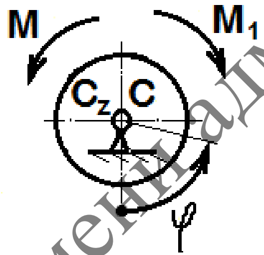


Рис. 76

Работа момента положительная, если направление отсчета угла поворота φ и направление момента (M) совпадают, и отрицательная, если противоположны (φ, M_1).

Кинетическая энергия движущегося тела пропорциональна квадрату скорости центра масс (квадрату угловой скорости тела), а работа силы (момента) пропорциональна перемещению s (углу поворота φ). Применяя теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме как метод решения задачи, ответ получим в виде функции. Это будет зависимость квадрата скорости точки тела от перемещения этой точки или зависимость квадрата угловой скорости тела от угла поворота этого тела. Другими словами, могут быть получены ответы на вопросы: чему равна скорость в зависимости от перемещения ($V = V(s)$) или чему равна угловая скорость в зависимости от угла поворота ($\omega = \omega(\varphi)$). Кроме того, можно определить перемещение в зависимости от скорости ($s = s(V)$)

или угол поворота в зависимости от угловой скорости ($\varphi = \varphi(\omega)$). Применяя теорему об изменении кинетической энергии, исследуют движение всей механической системы целиком, не разделяя её на части.

8.2. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в форме производных

Производная кинетической энергии механической системы по времени $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ равна сумме мощностей внешних $\left(\sum N_i^e\right)$ и внутренних сил $\left(\sum N_i^j\right)$, приложенных к системе:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_i^e + \sum N_i^j .$$

Мощность (N) характеризует работу (A), совершенную за единицу времени. Мощность равна

$$N = \frac{dA}{dt}, \text{ (Н·м/с = Дж/с = Вт).}$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы в форме производных можно найти ответы на вопрос: чему равно ускорение точки тела (a) или угловое ускорение тела (ε). Ответ будет получен сразу в виде числа.

Методика решения задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме

Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру.

Первый лист титульный. Образец титульного листа приведен в прил. 2.

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи и её оформление следует начинать с условия: рисунка — схемы механической системы, заданной по условию задания; а также записать, что дано и что требуется найти.

Решение должно содержать:

1. Рисунки, включающие расчетные схемы с указанием заданных размеров механической системы. Кроме того, на расчетных схемах указывают:

– активные силы и моменты (задаваемые в условии задания);

– реакции внешних связей;

– перемещения и скорости точек тел;

– направления угловых скоростей и углов поворота тел.

2. Метод — указание, каким образом составлены уравнения, используемые в решении задачи.

3. Уравнения в общем (буквенном) виде.

4. Уравнения с численными значениями.

5. Решение составленных уравнений — ответы на поставленные в задании вопросы с указанием единиц измерения вычисленных значений найденных кинематических характеристик.

Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю.

Теорему об изменении кинетической энергии механической системы представляет одно уравнение. В левой части уравнения — кинетическая энергия системы в конечном положении минус кинетическая энергия системы в начальном положении. В правой части — сумма работ внешних сил (активных и реакций связей), приложенных к точкам системы. Одно уравнение позволяет найти одну неизвестную. В связи с этим на этапах, предваряющих непосредственное применение теоремы, следует установить кинематические зависимости, выразив через заданное перемещение перемещения точек тел и углы поворотов тел. Необходимо также установить зависимость скоростей точек тел и угловых скоростей тел от скорости, которую по условию требуется найти. Такой прием гарантирует, что в уравнении, выражающем теорему об изменении кинетической энергии механической системы, будет содержаться одна неизвестная скорость и одно заданное перемещение. Такое уравнение может быть решено.

Последовательность действий и анализ результатов приведены в примере решения задания.

Пример решения задания

Дано: Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рис. 77. Учитывая трение скольжения тела 1 и сопротивление качению тела 3, которое катится без скольжения, определить скорость тела 1 в тот момент движения, когда пройденный им путь равен *s*. Силы трения в подшипниках и другие силы сопротивления не учитывать. Весом нитей пренебречь. Нити считать нерастяжимыми, наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям. Масса блока 2 равномерно распределена по ободу.

Массы тел: $m_1 = m$ кг; $m_2 = 2m$ кг; $m_3 = 9m$ кг. Радиусы цилиндров (дисков): $R_2 = r_3 = 20$ см $= 0{,}2$ м; $R_3 = 2r_3$. Радиус инерции ступенчатого цилиндра 3 относительно оси, проходящей горизонтально через его центр масс, $\rho_{3Cz} =$ $= 30$ см $= 0{,}3$ м. Угол наклона поверхности к горизонту $\alpha = 30°$. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}1$. Коэффициент трения качения $f_k = 0{,}25$ см $=$ $= 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ м. Путь, пройденный телом 1: $s = 1$ м.

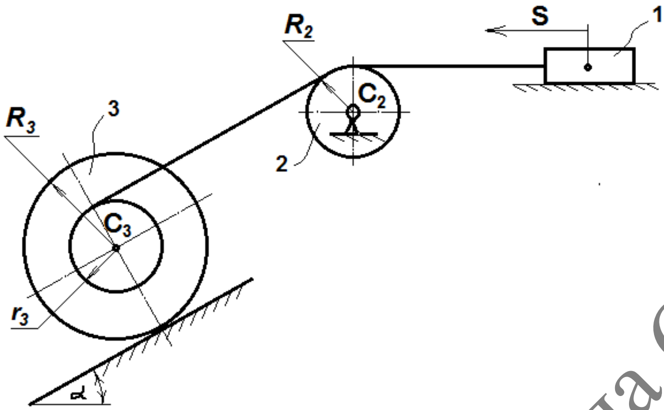


Рис. 77

Определить: скорость груза 1 в тот момент, когда его перемещение будет равно s = 1 м.

Решение

Определить скорости точек тел (угловые скорости тел) в зависимости от перемещений этих точек (углов поворота тел) можно с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме.

I. Метод

Уравнение, выражающее теорему, имеет вид (1)

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j .$$

Смысл буквенных обозначений приведен в пояснениях к равенству (1).

По условию, механическая система приходит в движение из состояния покоя. Следовательно, кинетическая энергия механической системы в начальном положении $T_0 = 0$.

По свойству внутренних сил в твердом теле и в механической системе твердых тел, соединенных идеальными связями, сумма работ внутренних сил на любом перемещении равна нулю $(\sum A_i^j = 0)$. Основано на аксиоме равенства действия и противодействия.

В связи с этим уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^e . \tag{9}$$

II. Кинематика (под заявленный метод)

Кинетическая энергия тела зависит от квадрата скорости (или (и) квадрата угловой скорости) — уравнения (2) – (5). Работа силы (момента) зависит от перемещений точки приложения силы (угла поворота тела, к которому приложен момент) — уравнения (6) – (8). Итак, компоненты уравнения (9) содержат скорости точек и угловые скорости тел в левой части, перемещения точек и углы поворота тел — в правой. Для того чтобы уравнение (9) можно было решить и найти ответ на поставленный в задании вопрос, сделаем следующее. Выразим скорости точек тел и угловые скорости тел, используемые в формулах кинетической энергии тел, через скорость груза 1 — V_1. А также установим зависимость перемещений точек тел, углы поворота тел, находящиеся в формулах работ активных сил, и реакций внешних связей, от перемещения груза 1 — s_1 (рис. 78). Это приведет к тому, что в уравнении (9) будет только одна неизвестная скорость V_1

$$V_D = V_B = V_A = V_1;$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{V_1}{R_2}; \tag{10}$$

$$\omega_3 = \frac{V_D}{DP} = \frac{V_1}{(R_3 + r_3)}; \tag{11}$$

(точка P — мгновенный центр скоростей цилиндра 3: $V_P = 0 \rightarrow S_P = 0$; V_P, S_P — скорость и перемещение точки P).

$$V_{C3} = \omega(C_3P) = V_1 \frac{R_3}{(R_3 + r_3)}. \tag{12}$$

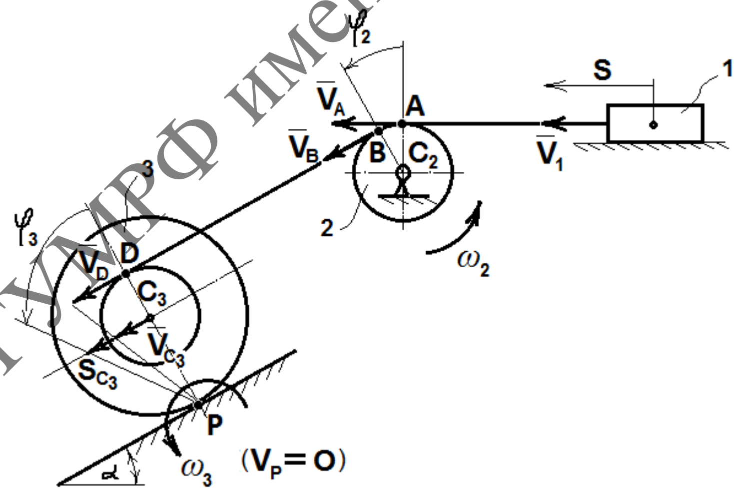


Рис. 78

Принимая во внимание, что $V = \dot{s}$ и ω = φ (точкой обозначена первая производная по времени), и производя интегрирование кинематических соотношений (10) – (12), получим уравнения, определяющие углы поворота и перемещения, выраженные через перемещение s_1:

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{R_2}; \tag{13}$$

$$\varphi_3 = \frac{s_1}{(R_3 + r_3)}; \tag{14}$$

$$s_{C3} = s_1 \frac{R_3}{(R_3 + r_3)}. \tag{15}$$

III. Решение (динамика)

Изобразим механическую систему в «конечном» положении, соответствующем заданному перемещению *s* груза. Приложим к системе активные силы, определенные в условии задания, и реакции внешних связей (рис. 79).

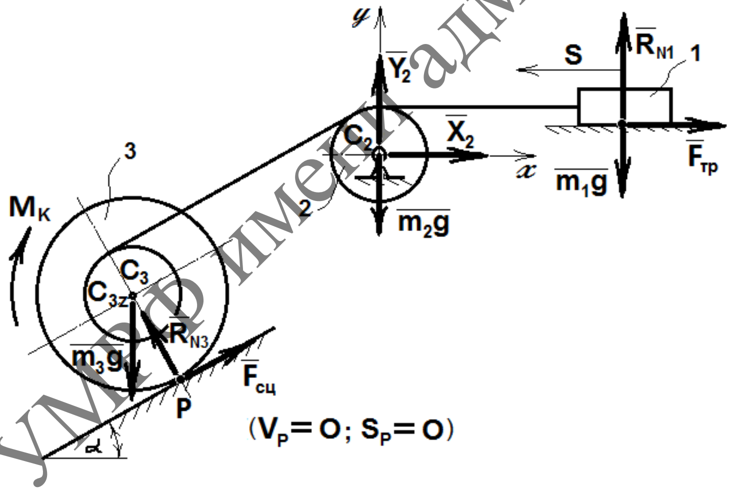


Рис. 79

Кинетическая энергия механической системы, находящейся в движении, равна сумме кинетических энергий тел, образующих систему (в рассматриваемом примере механическая система трех тел: 1, 2, 3).

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{16}$$

Определим кинетические энергии T_1, T_2, T_3 тел 1, 2, 3 в зависимости от вида движения тела, используя равенства (2) – (5) и рис. 78.

Тело 1 движется поступательно

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 .$$

Шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси C_2z

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{2Cz} \omega_2^2 ,$$

где $I_{2Cz} = m_2 R_2^2$ кг·м^2 — момент инерции блока относительно оси вращения; масса блока равномерно распределена по ободу. Учитывая соотношение (10), запишем выражение T_2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \left(\frac{V_1}{R_2} \right)^2 .$$

Цилиндр 3 движется плоскопараллельно, и его кинетическая энергия

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + I_{3Cz} \omega_3^2 .$$

Задан радиус инерции тела ρ_{3Cz} = 30 см = 0,3 м. Тогда момент инерции ступенчатого цилиндра относительно оси C_3z определяем по формуле $I_{3Cz} = m_3 \rho_{3Cz}^2$ кг·м^2.

С учетом равенств (11), (12), перепишем уравнение, определяющее T_3:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{R_3}{R_3 + r_3} \right)^2 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_{3Cz}^2 \frac{V_1^2}{(R_3 + r_3)^2} .$$

Кинетическую энергию системы в конечном положении определим, подставив в уравнение (16) полученные выражения T_1, T_2, T_3.

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \left(\frac{V_1}{R_2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{R_3}{R_3 + r_3} \right)^2 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_{3Cz}^2 \frac{V_1^2}{(R_3 + r_3)^2} .$$

Преобразуем это равенство: вынесем за скобки из каждого слагаемого общий множитель $\frac{1}{2} V_1^2$ и перепишем уравнение еще раз

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + m_3 \left(\frac{R_3}{R_3 + r_3} \right)^2 + m_3 \rho_{3Cz}^2 \frac{1}{(R_3 + r_3)^2} \right) \cdot V_1^2 .$$

Выражение в скобках $\left(m_1 + m_2 + m_3 \left(\frac{R_3}{R_3 + r_3} \right)^2 + m_3 \rho_{3Cz}^2 \frac{1}{(R_3 + r_3)^2} \right)$ имеет размерность массы — обозначим его $m_{об}$, где $m_{об}$ — обобщенная масса, кг.

Подсчитаем обобщенную массу механической системы

$$m_{\text{об}} = m_1 + m_2 + m_3\left(\frac{R_3}{R_3 + r_3}\right)^2 + m_3\rho_{3Cz}^2\frac{1}{\left(R_3 + r_3\right)^2} = m + 2m + 9m\left(\frac{2r_3}{2r_3 + r_3}\right)^2 +$$

$$+9m\rho_{3Cz}^2\frac{1}{\left(2r_3 + r_3\right)^2} = m\left(1 + 2 + 9\frac{4r_3^2}{9r_3^2} + 9\frac{0,3^2}{9\cdot 0,2^2}\right) = 9,25m.$$

Подставив полученное значение обобщенной массы в выражение кинетической энергии, получим левую часть уравнения (9)

$$T = \frac{1}{2}m_{\text{об}}V_1^2 = \frac{1}{2}9,25mV_1^2\,. \tag{17}$$

В правой части уравнения (9) сумма работ внешних сил, приложенных к механической системе (см. рис. 79) на перемещении системы из начального положения в конечное (см. рис. 78). Перечислим работы внешних сил, приложенных к рассматриваемой системе

$$\sum A_i^e = A(m_1g) + A(m_2g) + A(m_3g) + A(R_{N1}) + A(F_{\text{тр}}) +$$
$$+A(X_2) + A(Y_2) + A(R_{N3}) + A(F_{\text{сц}}) + A(M_k).$$

Работы сил, приложенных к неподвижной точке C_2 (см. рис. 79), равны нулю (точка C_2 находится на неподвижной оси вращения блока 2)

$$A(X_2) + A(Y_2) + A(m_2g) = 0\,.$$

Сила сцепления $F_{\text{сц}}$ должна быть достаточной, чтобы обеспечить чистое качение (без проскальзывания) цилиндра 3. В таком случае точка P соприкосновения цилиндра с неподвижной шероховатой поверхностью будет мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) цилиндра 3 (см. рис. 78, 79). Скорость м.ц.с., а, следовательно, и перемещение точки P равны нулю. Следовательно, работы сил R_{N3}, $F_{\text{сц}}$, приложенных в точке P, равны нулю.

$$A(R_{N3}) = A(F_{\text{сц}}) = 0\,.$$

Работа силы, направление которой перпендикулярно перемещению точки приложения силы, равна нулю. Это касается работы сил

$$A(R_{N1}) = A(m_1g) = 0\,.$$

В таких условиях необходимо вычислить работы силы тяжести тела 3 — m_3g, силы трения скольжения — $F_{\text{тр}}$, момента сопротивления качению — M_k.

Работа силы тяжести тела 3

$$A(m_3g) = m_3\cdot s_{C3}\cdot\cos\left(\overrightarrow{m_3g};\ \overrightarrow{s_{C3}}\right) = 9m_1g\cdot s_1\frac{R_3}{R_3 + r_3}\cdot\cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$= 9m_1gs_1\frac{2r_3}{2r_3 + r_3}\cdot\sin\alpha = 9m_1gs_1\frac{2}{3}\cdot\sin 30^\circ = 3m_1gs_1.$$

Вычислим работу силы трения скольжения $F_{\text{тр}}$:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot R_{N1} = f \cdot m_1 g\,;$$

$$A\left(F_{\text{тр}}\right) = F_{\text{тр}} \cdot s_1 \cdot \cos\left(\overrightarrow{F_{\text{тр}}};\ \vec{s_1}\right) = f \cdot m_1 g \cdot s_1 \cdot \cos\left(180°\right) =$$
$$= - f \cdot m_1 g \cdot s_1 = -0{,}1 \cdot m_1 g \cdot s_1.$$

Подсчитаем работу $A(M_k)$ момента сопротивления качению M_k

$$M_k = f_k \cdot R_{N3} = f_k \cdot m_3 g \cdot \cos\alpha = f_k \cdot m_3 g \cdot \cos 30° = f_k \cdot m_3 g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 0{,}0025 \cdot 9 m_1 g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}0195 m_1 g,$$

где R_{N3} — нормальная реакция шероховатой поверхности, $R_{N3} = m_3 g \cos\alpha$.

$$A\left(M_k\right) = -M_k \cdot \varphi_3 = -0{,}0195 m_1 g \frac{s_1}{R_3 + r_3} = -0{,}0195 m_1 g \frac{s_1}{2r_3 + r_3} =$$
$$= -0{,}0195 m_1 g \frac{1}{3r_3} s_1 = -0{,}0325 m_1 g \cdot s_1.$$

Найдем сумму работ сил и момента:

$$\sum A_i^e = A\left(m_3 g\right) + A\left(F_{mp}\right) + A\left(M_k\right);$$

$$\sum A_i^e = 3 m_1 g s_1 - 0{,}1 \cdot m_1 g \cdot s_1 - 0{,}0325 m_1 g \cdot s_1 =$$
$$= \left(3 m_1 g - 0{,}1 \cdot m_1 g - 0{,}0325 m_1 g\right) \cdot s_1 .$$

Выражение в скобках $(3 m_1 g - 0{,}1\, m_1 g - 0{,}0325\, m_1 g)$ имеет размерность силы (Н) и называется обобщенной силой $F_{\text{об}}$:

$$F_{\text{об}} = \left(3 m_1 g - 0{,}1 \cdot m_1 g - 0{,}0325 m_1 g\right) =$$
$$= \left(3 \cdot 9{,}81 - 0{,}1 \cdot 9{,}81 - 0{,}0325 \cdot 9{,}81\right) m = 28{,}13 m;$$

$$\sum A_i^e = F_{\text{об}} s_1 = 28{,}13 m \cdot s_1 . \qquad (18)$$

Подставим выражения (17) и (18) в уравнение (9), приравняв кинетическую энергию (T) механической системы в конечном положении сумме работ внешних сил, приложенных к системе ($\sum A_i^e$) на перемещении $\boldsymbol{s}$ из начального положения в конечное

$$\tfrac{1}{2} m_{\text{об}} V_1^2 = F_{\text{об}} \cdot s_1\,;$$

или,

$$\tfrac{1}{2} 9{,}25 m \cdot V_1^2 = 28{,}13 m \cdot s_1 . \qquad (19)$$

Анализ уравнения показывает, что переменными в уравнении могут быть скорость груза V_1 и перемещение груза s_1. По условию задано перемещение груза s_1 = 1 м — решаем уравнение (19), определяя скорость груза V_1:

$$V_1 = \sqrt{\frac{28{,}13m}{0{,}5 \cdot 9{,}25m} \cdot s_1} = \sqrt{6{,}082 \cdot s_1}\,. \qquad (20)$$

Как следует из формулы (20), скорость груза 1 V_1 зависит от перемещения груза 1 s_1, т. е. скорость — функция перемещения.

Подставив в выражение (20) заданное перемещение s_1 = 1 м, получим значение скорости V_1 в указанном положении механической системы (как значение функции при указанном аргументе)

$$V_1\big|_{[s_{1=1m}]} = \sqrt{6{,}082 \cdot s_1} = \sqrt{6{,}082 \cdot 1} = 2{,}466 \text{ м/с.}$$

Возможная ситуация: найденное значение скорости оказалось отрицательным. В этом случае следует изменить направление движения тел механической системы на противоположное. Подсчитать заново сумму работ активных сил и моментов, работ реакций внешних связей. Величины работ останутся прежними. Знаки работ изменятся на противоположные, кроме знака работы силы трения скольжения и работы момента сопротивления качению, если такие реакции имеют место по условию задания (знаки последних останутся отрицательными). Затем еще раз решить вновь полученное уравнение (19).

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Что называют системой материальных точек (механической системой)?

2. Каким образом можно классифицировать силы, действующие на систему материальных точек?

3. Какого рода механические связи называют идеальными?

4. Чему равна масса системы материальных точек?

5. Что выступает мерой инертности твердого тела при его поступательном движении?

6. Что называют центром масс механической системы?

7. Что называют моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси?

8. Что выступает мерой инертности твердого тела при его вращательном движении?

9. Как определяются моменты инерции твердого тела относительно координатных осей *Oxyz*, если известны координаты точек тела?

10. Что называют радиусом инерции твердого тела (относительно некоторой оси)?

11. Как формулируется теорема Штейнера–Гюйгенса (о моментах инерции тела относительно параллельных осей)?

12. Чему равен момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его оси симметрии?

13. Момент инерции относительно какой оси (из семейства параллельных) будет наименьшим?

14. Как рассчитать работу постоянной силы на прямолинейном участке пути? В каком случае работа окажется положительной? В каком отрицательной? Когда работа равна нулю?

15. Применяя какую формулу можно определить работу силы тяжести?

16. Зависит ли работа силы тяжести от вида траектории, по которой перемещается точка ее приложения (начальная и конечная точки траектории фиксированы)?

17. Чему равна работа сил, приложенных в мгновенном центре скоростей?

18. Чему равна работа силы трения скольжения?

19. Что называют моментом сопротивления качению?

20. Чему равна работа момента сопротивления качению?

21. При каком движении твердого тела по шероховатой поверхности силы трения (сцепления с поверхностью) не совершают работы?

22. Чему равна кинетическая энергия материальной точки?

23. Две точки одинаковой массы движутся с одинаковыми по модулю скоростями, но одна прямолинейно, а другая по криволинейной траектории. Равны ли их кинетические энергии?

24. Величина какой скорости (абсолютной, относительной, переносной) определяет кинетическую энергию материальной точки?

25. Как определить кинетическую энергию системы материальных точек?

26. Чему равна кинетическая энергия твердого тела при различных видах его движения?

27. Массы и угловые скорости вращения двух однородных дисков одинаковы, но у одного вращательное движение вокруг центральной оси, а у другого идеальное качение по неподвижной поверхности. Равны ли их кинетические энергии?

28. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек в интегральной форме (на конечном перемещении)?

29. Что такое обобщенная масса механической системы с одной степенью свободы?

9 Задание. Применение метода кинетостатики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Варианты механических систем показаны на рис. 80 – 82, а необходимые для решения данные приведены в табл. 9.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Метод кинетостатики — эффективный метод решения задач динамики, когда требуется найти ускорения точек тел (или угловые ускорения тел) и динамические реакции внешних связей. Уравнения метода кинетостатики сравнительно просты (очевидное преимущество метода) — напоминают уравнения равновесия (уравнения проекций сил и уравнения моментов). Методика решения задач динамики методом кинетостатики является расширенным и дополненным алгоритмом, изложенным в задании «Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)». В уравнениях метода кинетостатики учитывают активные силы, реакции внешних связей (как и в уравнениях равновесия статики), а также силы инерции. Способы введения сил инерции в уравнения метода кинетостатики рассмотрены в примере решения задания.

В значительном числе случаев применение метода приводит к необходимости делить механическую систему на части. При этом уравнения метода кинетостатики составляют для каждой части механической системы. Причина деления – число неизвестных (динамические реакции и ускорения) больше количества уравнений (количество уравнений определяется видом системы сил). Эта ситуация — наследие метода статики. В результате получаем значительное число алгебраических уравнений. Решение оказывается громоздким, и это несомненный минус.

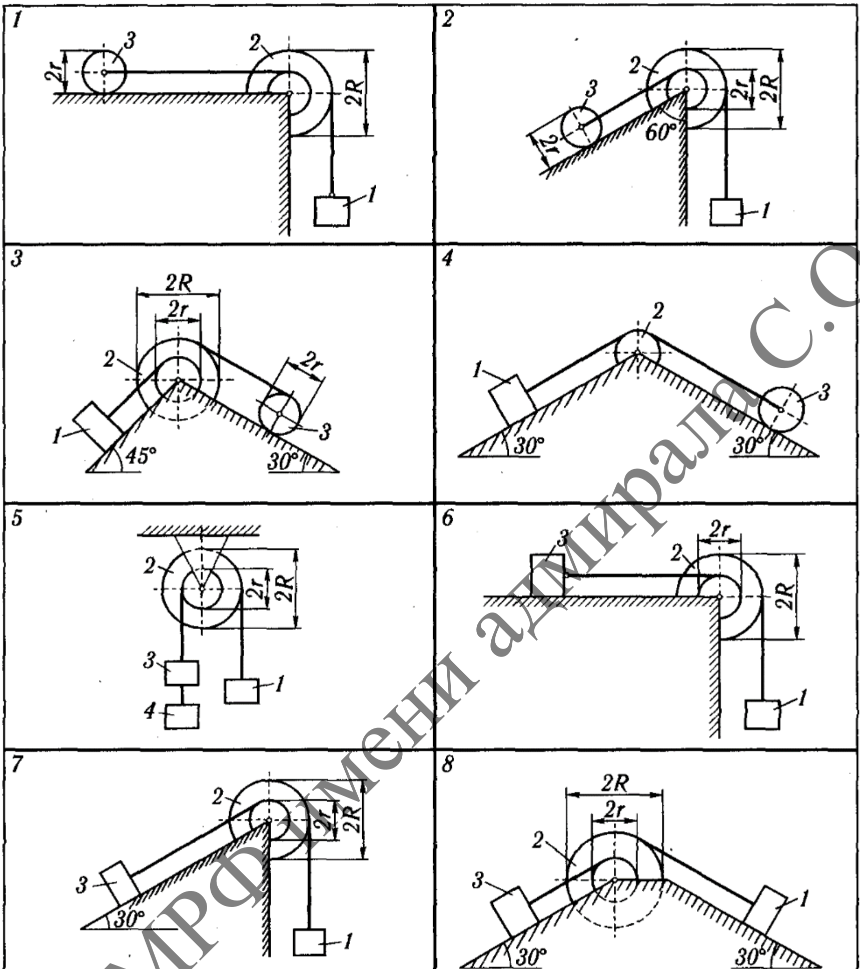

1
3
2r
2
2R
1
2
2
3
2r
2r
2R
60°
1
3
2R
2r
2
2r
1
3
45°
30°
4
2
1
3
30°
30°
5
2
2r
2R
3
1
4
6
2r
3
2
2R
1
7
2
2r
2R
3
30°
1
8
2R
2r
2
3
1
30°
30°
9
P
2l
l
3
2
2r
2R
1
10
P
2l
l
2R
2r
3
2
1

Рис. 80

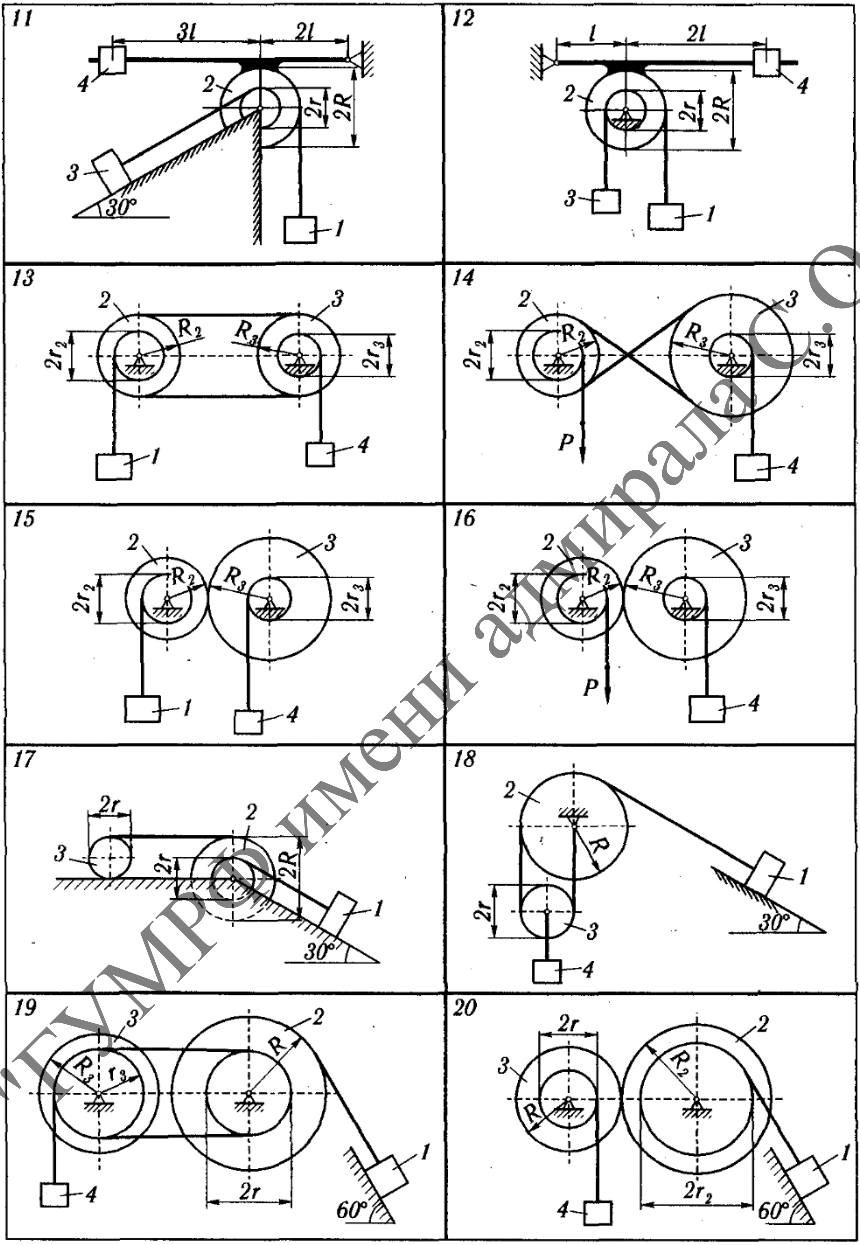

11
3l
2l
4
2
2r
2R
3
30°
1
12
l
2l
2
2r
2R
4
3
1
13
2
3
R_2
R_3
$2r_2$
$2r_3$
1
4
14
2
3
R_2
R_3
$2r_2$
$2r_3$
P
4
15
2
3
R_2
R_3
$2r_2$
$2r_3$
1
4
16
2
3
R_2
R_3
$2r_2$
$2r_3$
P
4
17
2r
3
2
2r
2R
1
30°
18
2
R
1
30°
2r
3
4
19
3
2
R_3
r_3
R
2r
4
1
60°
20
2r
3
2
R_2
R
$2r_2$
4
1
60°

Рис. 81

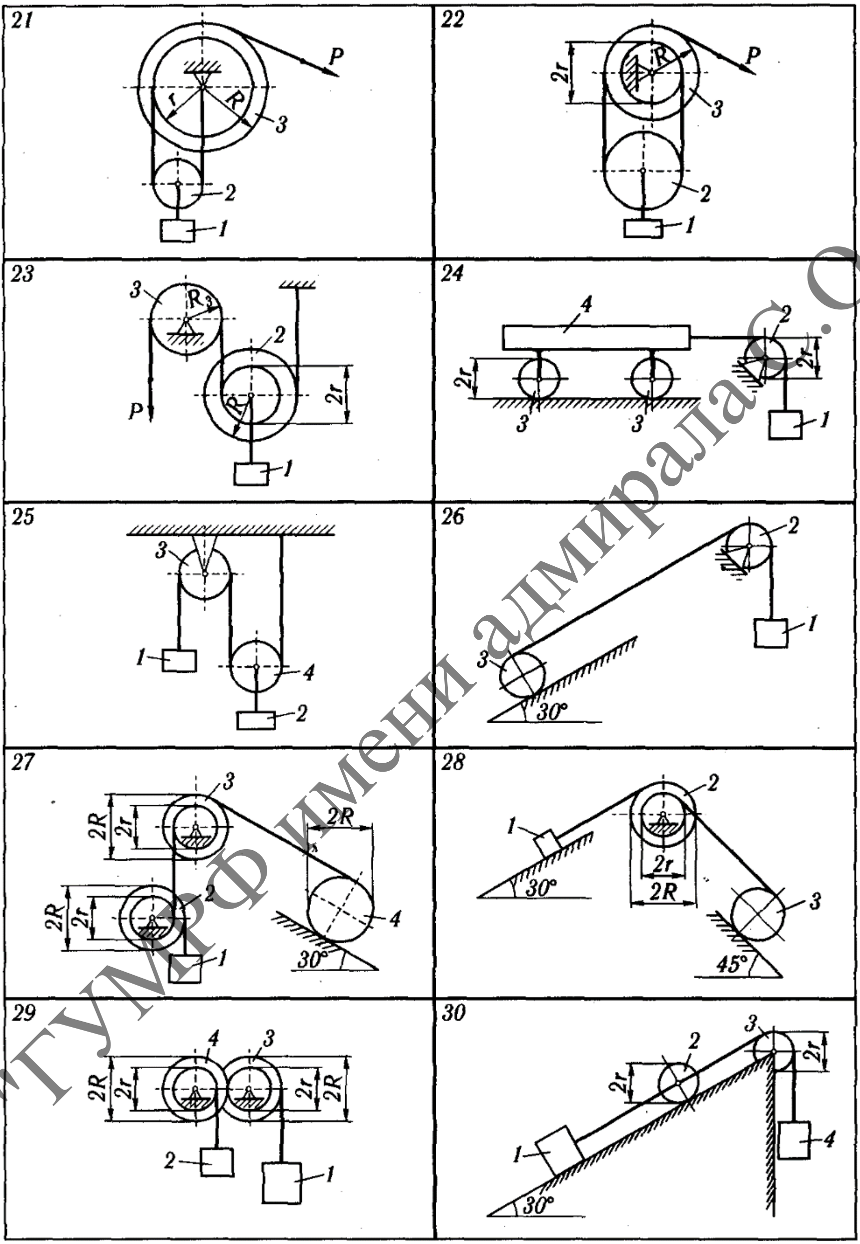

21
P
r
R
3
2
1
22
2r
R
P
3
2
1
23
3
R3
P
2
2r
R
1
24
4
2
2r
2r
3
3
1
25
3
1
4
2
26
2
1
3
30°
27
3
2R
2r
2R
2
2R
2r
1
4
30°
28
2
1
30°
2r
2R
3
45°
29
4
3
2R
2r
2r
2R
2
1
30
3
2
2r
2r
1
4
30°

Рис. 82

Таблица 9

Номер варианта (рис. 80 - 82)	Силы тяжести				R/r	Радиусы инерции		P	Коэффициент трения скольжения f	Дополнительные данные
	G_1	G_2	G_3	G_4		ρ_{2Cz}	ρ_{3Cz}			
1	G	G	$3G$	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	—	
2	G	G	G	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	—	
3	$3G$	G	G	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	0,1	
4	G	G	$2G$	—	—	—	—	—	0,2	$r_2=r_3$
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	—	—	—	
6	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	
7	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	
8	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	
9	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	$0{,}2G$	0,2	
10	$2G$	$2G$	G	—	4	—	$2r$	$G/3$	0,4	
11	$2G$	G	$2G$	$0{,}2G$	3	$2r$	—	—	0,2	
12	$2G$	G	$2G$	$0{,}2G$	3	$2r$	—	—	0,2	
13	$4G$	$2G$	G	$4G$	—	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	—	—	$r_2=2r_3;\ R_2=R_3$
14	—	$2G$	G	$4G$	—	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$8G$	—	$r_2=2r_3;\ R_3=1{,}5R_2$
15	$4G$	G	$2G$	$4G$	—	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	—	—	$r_2=2r_3;\ R_3=1{,}5R_2$
16	—	G	$2G$	$4G$	—	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$4G$	—	$r_2=2r_3;\ R_3=1{,}5R_2$
17	$2G$	G	G	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	0,1	
18	$3G$	$0{,}2G$	$0{,}1G$	$0{,}5G$	2	—	—	—	0,4	
19	$4G$	$0{,}3G$	$0{,}2G$	$3G$	3	$2r$	$1{,}2r$	—	0,1	$r_3=1{,}2r;\ R_3=1{,}2r_3$
20	$4G$	$0{,}2G$	$0{,}1G$	$3G$	2	$1{,}6r$	$r\sqrt{2}$	—	0,2	$r_2=1{,}5r;\ R_2=1{,}2r_2$
21	$5G$	$0{,}1G$	$0{,}2G$	—	3	—	$r\sqrt{2}$	G	—	
22	G	$0{,}2G$	$0{,}3G$	—	2	—	$r\sqrt{2}$	G	—	
23	G	$0{,}2G$	$0{,}1G$	—	1,5	$1{,}2r$	—	$2G$	—	$R_3=1{,}2r$
24	$2G$	G	G	$8G$	—	—	—	—	—	Массы четырех колес одинаковы
25	$6G$	$2G$	$2G$	G	—	—	—	—	—	$r_3=r_4$
26	$6G$	G	$2G$	—	—	—	—	—	—	$r_3=r_2$
27	G	G	G	$4G$	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	—	—	
28	$3G$	G	G	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	0,1	
29	$6G$	$3G$	G	G	2	—	$r\sqrt{2}$	—	—	$\rho_{3Cz}=\rho_{4Cz}$
30	$8G$	G	G	$2G$	—	—	—	—	0,1	

Примечания: 1. Радиусы инерции даны относительно центральный осей, перпендикулярных плоскости чертежа (рис. 80 – 82).

2. Коэффициент трения принимать одинаковым как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9 – 12).

Метод кинетостатики — единственный способ найти некоторые реакции, например, силу сцепления при трении качения. В этом его уникальность.

Методика решения задач методом кинетостатики

Перед выполнением задания на тему «Метод кинетостатики» необходимо изучить соответствующий материал по учебнику, конспекту лекций и записям, сделанным на практических занятиях, а также выяснить на консультации вопросы, вызывающие затруднения.

Задание следует выполнять на листах, скрепленных в брошюру.

Первый лист — титульный. Образец титульного листа приведен в прил. 1.

Содержание работы, предъявляемой к проверке. Решение задачи и её **оформление следует начинать с условия**: рисунка — схемы механической системы, заданной по условию задания; а также записать, что дано и что требуется найти.

Решение должно содержать

1. Рисунки, включающие расчетные схемы с указанием заданных размеров механической системы. Кроме того, на расчетной схеме указывают векторы:

– активных сил (задаваемых в условии задания);

– сил инерции (силы инерции материальных точек тела учитывают с помощью равенств (2), (3) в зависимости от вида движения тела и изображают, как показано на рис. 84 – 86, см. п. I примера решения задания);

– реакций внешних связей;

– ускорения точек тел и угловые ускорения тел.

2. Метод — указание, каким образом составлены уравнения, используемые в решении задачи.

3. Уравнения в общем (буквенном) виде.

4. Уравнения с численными значениями.

5. Решение составленных уравнений — ответы на поставленные в задании вопросы с указанием единиц измерения вычисленных значений реакций и ускорений.

Решение может содержать краткие пояснения. Выполненное задание следует сдать на проверку преподавателю.

Метод кинетостатики имеет в основе уравнения равновесия, дополненные силами инерции. Алгоритм решения аналогичен алгоритму, рассмотренному в задании СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ (Система тел) и представляет последовательность действий:

1. Выделить объект (тело или систему тел, движение которых будем рассматривать) и изобразить объект как свободное тело (используем аксиому освобождения от связей).

2. Приложить к объекту активную нагрузку (силы, пары сил) в соответствии с условием задачи.

3. Взамен отброшенных связей приложить к телу реакции этих связей, которые обычно определяют в п. 1, и которые будут неизвестными в уравнениях метода кинетостатики.

4. Ввести силы инерции в соответствии с частными случаями приведения сил инерции материальных точек твердого тела при его поступательном или вращательном, или плоском движениях (см. п. I примера решения задания). Эти силы, точнее ускорения, содержащиеся в выражениях (2, 3), также неизвестны.

5. Выполнить анализ полученной системы сил (активных, реакций внешних связей и сил инерции), ответив на вопросы:

– Получена система сил, лежащих в одной плоскости, или пространственная? (Убедиться, что плоская).

– Каково взаимное расположение линий действия сил, и, следовательно, сколько независимых уравнений метода кинетостатики может быть составлено? Сравнить число неизвестных и количество уравнений. Если система алгебраических уравнений квадратная (т. е. число неизвестных не превышает количество уравнений метода кинетостатики), перейти к п. 6.

6. Записать уравнения метода кинетостатики, учитывающие активные силы, реакции внешних связей и силы инерции. Это уравнения проекций сил на координатные оси, указанные на расчетных схемах, и уравнение моментов сил относительно выбранного полюса. Выполнить над уравнениями действия с целью определения неизвестных (реакций связей, ускорений).

7. Проанализировать полученные результаты.

Пример решения задания

***Дано*:** Механическая система (рис. 83) движется под действием сил тяжести. Веса тел: $G_1 = 4G$ (Н), $G_2 = 2G$ (Н), $G_3 = G$ (Н). Радиус инерции блока 2 $\rho_{2Cz} = r\sqrt{2}$ (м), $\dfrac{R}{r} = 2$. Цилиндр 3 — сплошной однородный, катится без скольжения по горизонтальной шероховатой поверхности. Массами нитей пренебречь. Силы сопротивления в подшипниках и при качении не учитывать.

***Определить*:** ускорение груза 1 и натяжение в ветви нити, несущей этот груз.

Решение

Ускорения точек тела, угловые ускорения тел (ускорение груза 1), динамические реакции связей (натяжение в ветви нити), могут быть определены методом кинетостатики.

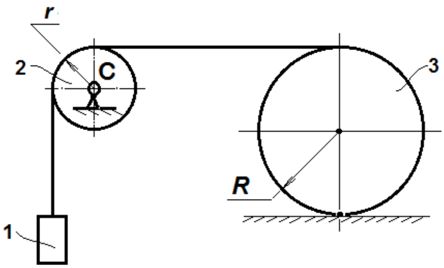


Рис. 83

I. Метод

В векторном виде метод кинетостатики определяют равенства:

$$\vec{F}^{E} + \vec{\Phi} = 0;$$
$$\vec{M}_O^{E} + \vec{M}_O^{\Phi} = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{F}^{E}$, $\vec{\Phi}$ — главные векторы внешних сил (активных и реакций связей) и сил инерции, соответственно, $\vec{M}_O^{E}$, $\vec{M}_O^{\Phi}$ — главные моменты внешних сил и сил инерции относительно произвольной точки O.

Как следует из равенств (1), уравнения метода кинетостатики — это уравнения равновесия (уравнения статики), дополненные главными векторами и главными моментами сил инерции.

Каким образом ввести в уравнения метода кинетостатики силы инерции материальных точек твердого тела (привести силы инерции материальных точек тела к заданному центру), зависит от вида движения тела.

Тело движется поступательно, имея массу m (кг), ускорение центра масс $\vec{a}_C$ (м/с^2) — точка C — центр масс (рис. 84). Силы инерции материальных точек тела в этом случае нужно учесть с помощью главного вектора сил инерции $\vec{\Phi}_1$. Он направлен противоположно ускорению $\vec{a}_C$ и равен

$$\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a}_{\mathrm{C}}. \qquad (2)$$

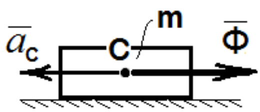


Рис. 84

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси (в вариантах данного задания ось вращения — центральная) силы инерции материальных точек тела могут быть введены в уравнения метода кинетостатики с помощью главного момента сил инерции M^{Φ} (рис. 85). Главный момент сил инерции направлен противоположно угловому ускорению тела ε ($1/с^2$) и равен

$$M^{\Phi} = -I_{Cz}\varepsilon\,; \qquad (3)$$

где C_z — неподвижная центральная ось вращения; I_{Cz} ($кг \cdot м^2$) — осевой центральный момент инерции тела. Моменты инерции некоторых тел приведены в примере решения задания «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы».

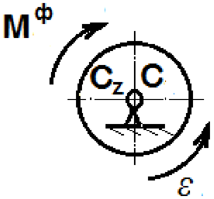


Рис. 85

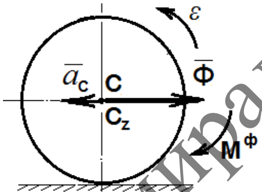


Рис. 86

Плоское движение тела может быть представлено как сумма двух движений — поступательного вместе с полюсом (с центром масс, точкой C) с ускорением $\vec{a}_C$, и вращения вокруг полюса с угловым ускорением ε. Объединяя результаты рассмотренных выше двух видов движения твердого тела, можно прийти к заключению: силы инерции материальных точек тела в случае его плоского движения нужно учитывать в уравнениях метода кинетостатики, вводя как главный вектор сил инерции $\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a}_C$, так и главный момент сил инерции $M^{\Phi} = -I_{Cz}\varepsilon$ (рис. 86).

II. Кинематика

Главный вектор сил инерции зависит от ускорения центра масс тела $\vec{a}_C$; главный момент сил инерции — от углового ускорения тела ε (равенства (2, 3)). Так как механическая система состоит из нескольких тел, совершающих различные виды движения, в разделе «кинематика» следует выразить ускорения точек тел и угловые ускорения тел через ускорение a_1 груза 1, которое требуется определить. Цель такой процедуры — иметь в уравнениях метода кинетостатики только одно неизвестное ускорение.

Под действием сил тяжести движение может быть только ускоренное. Поэтому направим ускорение $\vec{a}_1$ тела 1 вниз. Определим, как связаны ускорения (линейные и угловые) точек А, О и тел 2 и 3 с ускорением a_1 (рис. 87):

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}\,;\; a_A^{\tau} = a_1\,;\; a_O = 0{,}5\,a_A^{\tau} = 0{,}5\,a_1\,;\; \varepsilon_3 = \frac{a_A^{\tau}}{AP} = \frac{a_A^{\tau}}{2R} = \frac{a_1}{2R}\,. \qquad (4)$$

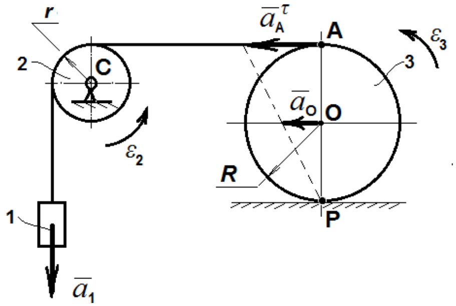


Рис. 87

III. Решение (динамика)

Силы, приложенные к механической системе:

– активные $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$ — задаваемые по условию задачи;

– реакции внешних связей $\vec{X}_C,\ \vec{Y}_C,\ \vec{R}_N,\ \vec{F}_{сц}$ — неизвестные в уравнениях;

– силы инерции, которые могут быть введены, в зависимости от вида движения тела, с помощью равенств (2, 3), содержащих неизвестное ускорение a_1, образуют плоскую произвольную систему сил (рис. 88). Для такой системы сил могут быть составлены три независимых уравнения метода кинетостатики.

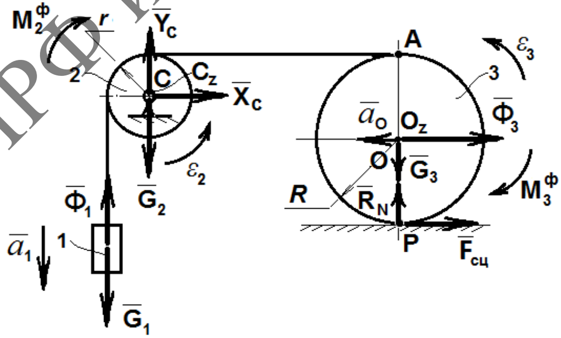


Рис. 88

Если составить уравнения метода кинетостатики для всей механической системы целиком, неизвестными в уравнениях будут: две составляющие полной реакции неподвижного шарнира С: $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$; нормальная реакция $\vec{R}_N$

опорной поверхности и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$, приложенные в точке P, а также ускорение $\vec{a}_1$, которое входит в выражения, главных векторов и главных моментов сил инерции. Неизвестных — 5. Определить 5 неизвестных с помощью трех алгебраических уравнений не получится. Известный в статике способ выйти из этой ситуации — разделить механическую систему на две, перерезав мысленно нить между телами 2 и 3 (рис. 89, 90).

Рассмотрим расчетные схемы и соответствующие уравнения метода кинетостатики, примененные к каждой части. Часть механической системы также называется механической системой.

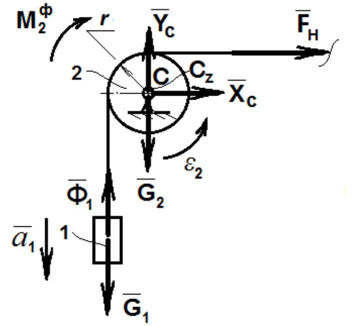


Рис. 89

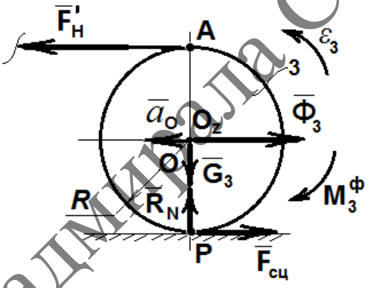


Рис. 90

Первая расчетная схема (см. рис. 89).

На механическую систему действуют:

– *активные силы* — силы тяжести $\vec{G}_1, \vec{G}_2$;

– *реакции внешних связей* — $\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{F}_H$;

– *силы инерции*: $\vec{\Phi}_1, \vec{M}_2^{\Phi}$ ***.Груз 1 движется поступательно — силы инерции материальных точек груза могут быть приведены к главному вектору сил инерции***

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1\vec{a}_1, \qquad (5)$$

где $m_1 = \dfrac{G_1}{g} = \dfrac{4G}{g}$ кг — масса груза 1; (g = 9,81 м/с^2 — ускорение свободного падения). $\vec{\Phi}_1$ — направлен противоположно вектору $\vec{a}_1$

$$\vec{\Phi}_1 = -\left(\frac{4G_1}{g}\right)\vec{a}_1. \qquad (5)^*$$

Блок 2 вращается вокруг неподвижной оси C_z, следовательно, силы инерции материальных точек блока могут быть введены с помощью главного момента сил инерции

$$M_2^{\Phi} = -I_{Cz}\varepsilon_2 . \qquad (6)$$

Так как задан радиус инерции тела 2 — ρ_{2Cz}, момент инерции равен

$$I_{Cz} = m_3\rho_{2Cz}^2 ;$$

$$m_2 = \frac{G_2}{g} = \frac{2G}{g} \text{ кг},$$

где I_{Cz} — момент инерции блока 2 относительно оси C_z ;m_2 — масса блока 2; ε_2 — угловое ускорение блока 2.

С учетом равенства (4) получим величину M_2^{Φ}:

$$M_2^{\Phi} = \frac{2G}{g}\rho_{2Cz}^2 \cdot \frac{a_1}{r} = \frac{2G}{g} r^2 2\frac{a_1}{r} = 4\frac{G}{g} a_1 r . \qquad (6)^*$$

Направлен главный момент сил инерции M_2^{Φ} противоположно угловому ускорению ε_2, на что указывает знак минус в равенстве (6).

Система сил, действующих на механическую систему (см. рис. 89) — плоская произвольная система сил. В этом случае можно составить 3 независимые уравнения метода кинетостатики. Например, два уравнения проекций сил: приравняем нулю алгебраические суммы проекций активных сил, реакций внешних связей и сил инерции на ось x, а затем — на y. Третье уравнение — уравнение моментов: равенство нулю алгебраической суммы моментов перечисленных выше сил относительно произвольной точки, например, C.

Запишем эти уравнения:

$$\sum F_{ix}^{e\Phi} = X_C + F_H = 0 ;$$

$$\sum F_{iy}^{e\Phi} = Y_C + G_2 + \Phi_1 - G_1 = 0 ;$$

$$\sum M_{iC}^{e\Phi} = G_1 r + \Phi_1 r + F_H r - M_2^{\Phi} = 0 .$$

После подстановок получим:

$$X_C + F_H = 0 ; \qquad (7)$$

$$Y_C - 2G + (4G/g)a_1 - 4G = 0 ; \qquad (8)$$

$$4Gr - (4G/g)a_1 r - F_H r - 4(G/g)a_1 r = 0 . \qquad (9)$$

Система трех уравнений (7) – (9) содержит четыре неизвестные (X_c, Y_c, F_H, a_1), и поэтому пока решена быть не может.

Рассмотрим вторую расчетную схему.

Механическая система (см. рис. 90) движется под действием:

– *активных сил*: $\vec{G}_3$,

– *реакций внешних связей*: $\vec{F}_H^{'}$, $\vec{R}_N$, $\vec{F}_{\text{сц}}$ (цилиндр 3 катится без скольжения, что обеспечивает достаточная сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$. Цилиндр 3 приводится в движение силой $\vec{F}_H'$ и, следовательно, это — «ведомое колесо». В таком случае сила сцепления направлена противоположно движению центра масс — точки *O*. Так как коэффициент сопротивления качению не задан (пренебрежимо мал), момент сопротивления качению не учитываем),

– *сил инерции*: движение цилиндра 3 — плоскопараллельное (плоское). Как следует из уравнений (2) – (3) к цилиндру 3 следует приложить главный вектор сил инерции $\vec{\Phi}_{31}$, направленный противоположно вектору ускорения $\vec{a}_O$ и главный момент сил инерции M_3^{Φ}, направленный противоположно угловому ускорению ε,

$$\vec{\Phi}_3 = -\vec{m}\,\vec{a}_1\,;$$

где $m_3 = \dfrac{G_3}{g} = \dfrac{G}{g}$ кг — масса цилиндра 3. Учитывая, что $a_0 = 0{,}5\,a_1$, можем записать:

$$\left|\vec{\Phi}_3\right| = \left(\frac{G}{g}\right)0{,}5\vec{a}_1\,;$$

$$M_3^{\Phi} = -I_{Oz}\varepsilon_3\,;$$

– *момент инерции* цилиндра относительно оси O_z

$$I_{Oz} = 0{,}5m_3R^2 = 0{,}5\left(\frac{G_3}{g}\right)R^2 = 0{,}5\left(\frac{G}{g}\right)R^2\,.$$

Учитывая, что $\varepsilon_3 = a_1 / 2R$ (4), получим

$$\left|M_3^{\Phi}\right| = 0{,}25\left(\frac{G}{g}\right)Ra_1\,.$$

Составим уравнения метода кинетостатики с помощью второй расчетной схемы (см. рис. 89) (уравнения проекций сил на оси *x*, *y* и уравнение моментов относительно точки *P*):

$$\sum F_{ix}^{e\Phi} = F_{\text{сц}} + \Phi_3 - F_H' = 0\,;$$

$$\sum F_{iy}^{e\Phi} = R_N - G_3 = 0\,;$$

$$\sum M_{iP}^{e\Phi} = F_H'\,(AP) - \Phi_3\left(OP\right) - M_3^{\Phi} = 0\,.$$

После подстановок получим

$$F_{\text{сц}} + 0{,}5(G / g\,)a_1 - F_H' = 0\,; \qquad (10)$$

$$R_N - G = 0\,; \qquad (11)$$

$$F'_H\, 2R - 0{,}5(G/g\,)a_1 R - 0{,}25(G/g\,)Ra_1 = 0\,. \qquad (12)$$

На основании аксиомы равенства действия и противодействия

$$F'_H = F_H\,. \qquad (13)$$

Решаем совместно уравнения (9) и (12) с учетом равенства (13) и соотношения $\dfrac{R}{r} = 2$. Неизвестными в этих двух уравнениях будут a_1 и F_H.

В результате решения уравнений найдем ускорение груза 1 $a_1 = 4{,}685\ (\text{м}/\text{с}^2)$, натяжение нити в сечении II $F'_H = 0{,}375(G/g)a_1$.

Определение натяжения нити в сечении I.

Для нахождения натяжения нити $\vec{F}_{H1}$ ветви, несущей груз, мысленно перережем нить, как показано на рис. 91. Груз 1 движется под действием сил: $\vec{G}_1$ — вес груза 1, $\vec{\Phi}_1$ — главный вектор сил инерции груза, $\vec{F}_{H1}$ — натяжение нити.

Составим уравнение метода кинетостатики — приравняем нулю алгебраическую сумму проекций перечисленных выше сил на ось y:

$$\sum F_{iy}^{e\Phi} = F_{H1} + \Phi_1 - G_1 = 0\,.$$

С учетом равенства (5)* и условия $G_1 = 4G$ получим $F_{H1} = 2{,}089G$.

Сила натяжения нити в сечении I $F_{H1} = 2{,}089G$ существенно меньше веса груза 1 $G_1 = 4G$ в связи с ускоренным движением груза вниз. В этом случае сила натяжения F_{H1} суммируется с главным вектором сил инерции Φ_1, направление которого противоположно ускорению груза 1. Эти две силы уравновешивают вес груза G_1, из-за чего на натяжение нити приходится только часть силы тяжести груза (рис. 91).

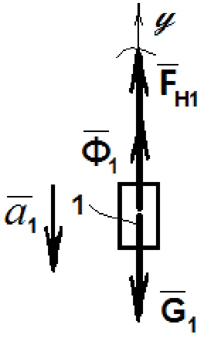


Рис. 91

Методические рекомендации к защите задания

Задание можно защищать после исправления ошибок, отмеченных преподавателем. Для успешной защиты необходимо знать и понимать решение задания. Также перед защитой задания в качестве подготовки к защите рекомендуется ответить на следующие вопросы:

1. Что называют системой материальных точек (механической системой)?
2. Каким образом можно классифицировать силы, действующие на систему материальных точек?
3. Какого рода механические связи называют идеальными?
4. Чему равна масса системы материальных точек?
5. Что выступает мерой инертности твердого тела при его поступательном движении?
6. Что называют центром масс механической системы?
7. Что называют моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси?
8. Что выступает мерой инертности твердого тела при его вращательном движении?
9. Как определяются моменты инерции твердого тела относительно координатных осей Oxyz, если известны координаты точек тела?
10. Что называют радиусом инерции твердого тела (относительно некоторой оси)?
11. Как формулируется теорема Штейнера–Гюйгенса (о моментах инерции тела относительно параллельных осей)?
12. Чему равен момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его оси симметрии?
13. Момент инерции относительно какой оси (из семейства параллельных) будет наименьшим?
14. Как формулируется Принцип Даламбера для случая движения материальной точки?
15. Чему равна и как направлена сила инерции материальной точки?
16. Чему равна и как направлена касательная составляющая силы инерции материальной точки?
17. Чему равна и как направлена центробежная составляющая силы инерции материальной точки?
18. Как формулируется принцип Даламбера для случая движения механической системы?

19. Можно ли силы инерции приводить к определенному центру (точке), как это делают применительно к реальным силам?

20. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела при его поступательном движении? При поступательном равномерном движении? При поступательном равномерном прямолинейном движении?

21. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела при его вращении вокруг неподвижной центральной оси?

22. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела при его вращении вокруг неподвижной нецентральной оси?

23. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела при его плоскопараллельном движении?

24. В чем состоит метод кинетостатики?

25. Что, помимо внешних сил, надо приложить к твердому телу, если его поступательное движение предполагается изучать методом кинетостатики?

26. Что, помимо внешних сил, надо приложить к твердому телу, если его вращательное движение предполагается изучать методом кинетостатики?

27. Что, помимо внешних сил, надо приложить к твердому телу, если его плоское движение предполагается изучать методом кинетостатики?

28. Какие кинематические характеристики механической системы позволяет получить метод кинетостатики?

29. При ускоренном подъёме груза, прикрепленного к вертикальному тросу, сила натяжения троса: 1. больше силы тяжести груза? 2. меньше силы тяжести груза? 3. равна силе тяжести груза?

30. Механическая система представляет собой твердое тело, равномерно вращающееся вокруг неподвижной центральной оси. Будут ли отличаться уравнения статики и кинетостатики для такой механической системы?

Библиографический список

1. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон: учеб. пособие. — СПб.: Лань, 2009. — 736 с.

2. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин: учебник. — СПб.: Лань, 2009. — 736 с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под редакцией А. А. Яблонского: учебное пособие – М.: КРОНУС, 2010. – 384 с.

4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 2008. — 416 с.

5. Яблонский А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова: учебник. — М.: КНОРУС, 2010. — 608 с.

Приложение 1

Образец титульного листа отдельных заданий курсовой работы

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство морского и речного транспорта
ФГБОУ ВО **«ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»**

КАФЕДРА ОСНОВ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Тема: ____
(Название темы задания)

Вариант ______________________
(номер варианта)

Выполнил студент группы _______
(номер группы)

____
(Ф. И. О.)

Принял преподаватель ___________________
(Ф. И. О.)
«____»________________ 20____ г.

Санкт-Петербург
20 ___ г.

Приложение 2

Образец титульного листа курсовой работы

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство морского и речного транспорта
ФГБОУ ВО **«ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»**

КАФЕДРА ОСНОВ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

КУРСОВАЯ РАБОТА на тему:
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Вариант ________________________
(номер варианта)

Выполнил студент группы _______
(номер группы)

____
(Ф.И.О.)

Принял преподаватель ____________________
(Ф.И.О.)
«____»________________ 20____ г.

Санкт–Петербург
20 ___ г.

Оглавление

СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебно-методическое пособие
Изд. 4-е, исп. и доп.

Составители:
Гукъямухов Петр Михайлович, канд, техн. наук, доц.,
Клочков Борис Федорович, канд, техн. наук, проф.,
Потехина Екатерина Вадимовна, доц.

Издательство
ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова

199106, Санкт-Петербург, 22 линия, 9
тел./факс 812 -322-33-42, 322-77-26
e-mail:izdat@gumrf.ru

Публикуется в авторской редакции

Ответственный за выпуск Сатикова Т. Ф.
Компьютерная верстка Тюленева Е. И.

Подписано в печать 27.12.2017
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman
Усл. печ. л. 9,5. Тираж 100 экз. Заказ № 648/17