КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Зададимся целью придать интерполяционной формуле более простой вид, подобный виду широко используемой в математическом анализе формулы Тейлора. Если в интерполяционном многочлене Лагранжа (8.6) все слагаемые однотипны и играют одинаковую роль в образовании результата, хотелось бы иметь такое представление интерполяционного многочлена, в котором, как и в многочлене Тейлора, слагаемые располагались бы в порядке убывания их значимости. Такая структура интерполяционного многочлена позволила бы более просто перестраивать его степень, добавляя или отбрасывая удаленные от начала его записи члены.

Поставленной цели будем добиваться сначала для несколько суженной постановки задачи интерполяции. А именно, будем считать, что интерполируемая функция $y = f(x)$ задана своими значениями $y_0, y_1, \ldots, y_n$ на системе ***равноотстоящих узлов*** $x_0, x_1, \ldots, x_n$, т.е. таких, что любой узел x_i этой ***сетки*** можно представить в виде

$$x_i = x_0 + ih,$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$, а $h > 0$ — некоторая постоянная величина, называемая ***шагом сетки*** (таблицы).

Прежде чем строить желаемые интерполяционные формулы, рассмотрим **элементы теории конечных разностей**.

Вычитая из каждого последующего члена конечной последовательности из $n+1$ чисел $y_0, y_1, \ldots, y_n$ предыдущий, образуем n ***конечных разностей первого порядка***

$$\Delta y_0 := y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 := y_2 - y_1, \quad \ldots \quad , \quad \Delta y_{n-1} := y_n - y_{n-1}$$

или, проще, n ***первых разностей*** данной табличной функции. Из них, в свою очередь, таким же образом можно получить $n-1$ ***конечных разностей второго порядка***, или ***вторых разностей***:

$$\Delta^2 y_0 := \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 := \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \ldots \quad ,$$
$$\Delta^2 y_{n-2} := \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

Этот процесс построения разностей может быть продолжен, и весь он, очевидно, описывается одной рекуррентной формулой, выражающей ***конечную разность*** k***-го порядка*** $\Delta^k y_i$ через разности $(k-1)$-го порядка:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \tag{8.19}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\Delta^0 y_i := y_i$.

В некоторых случаях требуется знать **выражения конечных разностей непосредственно через значения функции**,

лежащей в их основе. Для нескольких первых порядков разностей их можно получить прямой подстановкой:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) =$$

$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i, \qquad \text{и т.д.}$$

Подметив закономерность в коэффициентах рассмотренных представлений конечных разностей, записываем общую формулу

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j y_{k+i-j}, \tag{8.20}$$

которая может быть строго обоснована методом математической индукции и которая напоминает биномиальное разложение для $(y-1)^k$.

Привлекая определение производной, можно обнаружить прямую **связь между конечными разностями и производными**. А именно, если учесть, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = f'(x_i),$$

то можно сказать, что при малых h имеет место приближенное равенство

$$\Delta y_i \approx f'(x_i)h,$$

т.е. первые разности характеризуют первую производную функции $f(x)$, по значениям которой они составлены. Пользуясь этим, имеем для вторых разностей:

$$\frac{\Delta^2 y_i}{h^2} = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{h^2} = \frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}}{h} \approx$$

$$\approx \frac{f'(x_i + h) - f'(x_i)}{h} \approx f''(x_i),$$

т.е. $\Delta^2 y_i \approx f''(x_i)h^2$, и, вообще,

$$\Delta^k y_i \approx f^{(k)}(x_i)h^k. \tag{8.21}$$

Таким образом, на конечные разности можно смотреть как на некоторый аналог производных Отсюда справедливость многих их свойств, одинаковых со свойствами производных.

Отметим лишь **простейшие свойства конечных разностей**:

1) *конечные разности постоянной равны нулю* (очевидно);

2) *постоянный множитель у функции можно выносить за знак конечной разности.*

Действительно,

$$\Delta(Cy(x)) = Cy(x+h) - Cy(x) = C[y(x+h) - y(x)] = C\Delta y(x)$$

при любых фиксированных x и постоянной C;

3) *конечная разность от суммы двух функций равна сумме их конечных разностей в одной и той же точке.*

Свойство проверяется непосредственно: при любых x

$$\Delta(u(x)+v(x)) = u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x)) =$$
$$= u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x) = \Delta u(x)+\Delta v(x).$$

Свойства 2 и 3 характеризуют операцию взятия конечной разности как линейную операцию.

Учитывая роль, которую играют многочлены в теории интерполирования, посмотрим, что представляют собой **конечные разности многочлена**.

Поскольку многочлен в своей канонической форме есть линейная комбинация степенных функций, положим сначала $y = x^n$. Используя биномиальное разложение n-й степени двучлена, получим:

$$\Delta\left(x^n\right) = (x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \ldots + nh^{n-1}x + h^n,$$

т.е. первая конечная разность степенной функции $y = x^n$ есть многочлен степени $n-1$ со старшим членом nhx^{n-1}. Если взять теперь конечную разность от функции

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{8.22}$$

то, в силу линейных свойств Δy, можно записать

$$\Delta y(x) = a_0\,\Delta\left(x^n\right) + a_1\,\Delta\left(x^{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}\,\Delta x.$$

Первое слагаемое в этой сумме, как выяснено, есть многочлен $(n-1)$-й степени, второе, аналогично, — многочлен степени $n-2$, и т.д. Следовательно, первая конечная разность многочлена (8.22) в точке x с шагом h есть тоже многочлен со старшим членом a_0nhx^{n-1}, вторая конечная разность — многочлен со старшим членом $a_0n(n-1)h^2x^{n-2}$, ..., k-я разность — многочлен со старшим членом $a_0n(n-1)\ldots(n-k+1)h^kx^{n-k}$.

При $k = n$ получаем постоянную разность n-го порядка

$$\Delta^n y = a_0 n! h^n$$

для многочлена (8.22); конечные разности более высоких порядков, естественно, равны нулю.

Итак, главный вывод из предыдущих рассуждений: *n-е конечные разности многочлена n-й степени постоянны, а $(n+1)$-е и все последующие равны нулю.*

Более важным для понимания сути полиномиального интерполирования является утверждение, обратное сделанному выше выводу. А именно, доказано [58, 123], что *если конечные разности n-го порядка некоторой функции $y = y(x)$ постоянны в любой точке x при различных фиксированных шагах h, то эта функция $y(x)$ есть многочлен степени n.*

Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей своих значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_i = x_0 + ih$, конечные разности разных порядков удобно помещать в одну общую таблицу с узлами и значениями функции (последние можно интерпретировать как конечные разности нулевого порядка, см. (8.19)). Эту общую таблицу называют ***таблицей конечных разностей***. Заметим, что кроме принятого здесь так называемого диагонального расположения конечных разностей, когда числа в каждом столбце записываются со смещением на полстроки так, как это показано в табл.8.4, часто применяют горизонтальное расположение, где Δy_i, $\Delta^2 y_i$ и другие разности с индексом i помещают в одной строке с x_i, y_i.

Таблица 8.4

Диагональная таблица конечных разностей

x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\ldots$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\vdots$	
		Δy_4		$\vdots$		
x_5	y_5	$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$					

Таблица 8.5

Конечные разности функции $y = x\ln^2 x$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$	$\Delta^8 y_i$	$\Delta^9 y_i$	$\Delta^{10} y_i$
0.4	0.336										
		–0.179									
0.6	0.157		0.062								
		–0.117		0.015							
0.8	0.040		0.077		–0.012						
		–0.040		0.003		0.008					
1.0	0.000		0.080		–0.004		–0.007				
		0.040		–0.001		0.001		0.013			
1.2	0.040		0.079		–0.003		0.006		–0.035		
		0.119		–0.004		0.007		–0.022		0.090	
1.4	0.159		0.075		0.004		–0.016		0.055		–0.207
		0.194		0.000		–0.009		0.033		–0.117	
1.6	0.353		0.075		–0.005		0.017		–0.062		
		0.269		–0.005		0.008		–0.029			
1.8	0.622		0.070		0.003		–0.012				
		0.339		–0.002		–0.004					
2.0	0.961		0.068		–0.001						
		0.407		–0.003							
2.2	1.368		0.065								
		0.472									
2.4	1.840										

Пример 8.3. Составим таблицу конечных разностей для функции $y = x\ln^2 x$ по ее значениям, вычисленным с тремя знаками после запятой в точках $x_i = 0.4 + 0.2i$, где $i = 0, 1, \ldots, 10$. В соответствии с формой, задаваемой табл.8.4, заполняем табл.8.5 всеми возможными для этого случая конечными разностями. Проанализируем ее.

Учитывая связь между конечными разностями и производными соответствующих порядков (см. (8.21)), по смене знаков чисел в столбце Δy_i можно судить о наличии минимума функции в окрестности точки $x = 1$, а положительность всех чисел в столбце $\Delta^2 y_i$ говорит о выпуклости вниз графика данной функции на всем рассматриваемом промежутке $[0.4, 2.4]$.

Далее замечаем, что абсолютные величины конечных разностей сначала убывают с увеличением их порядка, а затем начинают увеличиваться. Это т и п и ч н о е поведение конечных разностей при ограниченной точности задания значений сеточной функции.

Природу наблюдаемого в примере 8.3 поведения модулей конечных разностей нетрудно понять. Если шаг достаточно мал, а данная табличная функция — достаточно гладкая, то сначала происходит естественное убывание $\left|\Delta^k y_i\right|$ с увеличением k, в силу упомянутой связи (8.21). Когда эти величины становятся достаточно малыми, бóльшую роль начинают играть продукты взаимодействия исходных ошибок округления (так называемый ***шум округлений***).

Что происходит с одной отдельно взятой ошибкой величины ε у значения y_i, можно проследить по табл.8.6. Как видим, с ростом порядка разностей она «расползается» по таблице и увеличивается по абсолютной величине.

Таблица 8.6

Продвижение ошибки по таблице конечных разностей

...	...	...	...	...	...	
x_{i-2}	y_{i-2}		$\Delta^2 y_{i-3}$		$\Delta^4 y_{i-4} + \varepsilon$	
		Δy_{i-2}		$\Delta^3 y_{i-3} + \varepsilon$		
x_{i-1}	y_{i-1}		$\Delta^2 y_{i-2} + \varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-3} - 4\varepsilon$	
		$\Delta y_{i-1} + \varepsilon$		$\Delta^3 y_{i-2} - 3\varepsilon$		...
x_i	$y_i + \varepsilon$		$\Delta^2 y_{i-1} - 2\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-2} + 6\varepsilon$	
		$\Delta y_i - \varepsilon$		$\Delta^3 y_{i-1} + 3\varepsilon$		
x_{i+1}	y_{i+1}		$\Delta^2 y_i + \varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-1} - 4\varepsilon$	...
		Δy_{i+1}		$\Delta^3 y_i - \varepsilon$		
x_{i+2}	y_{i+2}		$\Delta^2 y_{i+1}$		$\Delta^4 y_i + \varepsilon$	
...	...	...	...	...	...	

Погрешности, имеющиеся у каждого из данных значений функции, с ростом порядка разностей все больше взаимодействуют.

Из сделанных наблюдений напрашивается следующий вывод. Если какой-то столбец в таблице конечных разностей (в ее эксплуатируемой части) состоит из чисел, абсолютные величины которых составляют всего несколько единиц десятичного знака, являющегося последним в записи исходных значений функции, скажем, не превосходят величины 10ε, где ε — абсолютная погрешность исходных данных, то эти конечные разности и разности всех последующих порядков не несут практически никакой информации о функции, и их не следует использовать. Разности же предшествующего столбца называются ***практически постоянными***, и их порядок определяет степень многочлена, которую можно и должно использовать для идеальной в данных условиях полиномиальной интерполяции.

Вспоминая о том, что многочлен k-й степени имеет k-е разности постоянными, а все последующие — нулевыми, приходим к заключению, что *если k-е разности таблицы конечных разностей некоторой функции практически постоянны, то эта функция ведет себя в рассматриваемой области, как многочлен k-й степени*; эту степень и следует применять для интерполирования с наибольшей для данных реалий точностью.

Обратимся к числовой табл.8.5 нашего примера. Видим, что если исключить из рассмотрения верхнюю диагональную строку, то для всей остальной части таблицы третьи разности удовлетворят условию $\left|\Delta^3 y_i\right| \le 10 \cdot 0.0005$ (где 0.0005 — предельная абсолютная погрешность значений y_i). В такой ситуации разности более высоких порядков не следовало вообще вычислять, а разности второго порядка можно считать практически постоянными, т.е. для подсчета любых промежуточных значений данной функции, за исключением, быть может, тех, которые находятся вблизи узла $x_0 = 0.4$, нужно применять квадратичную интерполяцию.

КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть функция $y = f(x)$ задана на сетке равноотстоящих узлов $x_i = x_0 + ih$, где $i = 0, 1, \ldots, n$, и для нее построена таблица конечных разностей 8.4.

В соответствии с тем, что было сказано о направлении модификации интерполяционной формулы Лагранжа в начале предыдущего параграфа, будем строить интерполяционный много-

член $P_n(x)$ в форме

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (8.23)$$

Его $n+1$ коэффициент $a_0, a_1, \ldots, a_n$ будем находить последовательно из $n+1$ интерполяционных равенств

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

А именно, полагая $i = 0$, т.е. $x = x_0$, в (8.23) имеем $P_n(x_0) = a_0$, а по условию интерполяции $P_n(x_0) = y_0$; следовательно, $a_0 = y_0$.

Далее, при $i = 1$ аналогично получаем равенство

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1,$$

в которое подставляем уже найденное значение $a_0 = y_0$. Разрешая это равенство относительно a_1 и используя обозначение конечной разности, получаем

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Следующий шаг, при $i = 2$, дает:

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + a_2 \cdot 2h \cdot h = y_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} \qquad \text{(см. (8.20) при } k = 2\text{)}.$$

Полной индукцией можно показать справедливость выражения

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k} \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (8.24)$$

Подставляя найденные коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в (8.23), получаем многочлен

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \quad (8.25)$$

который называют ***первым интерполяционным многочленом Ньютона***.

Учитывая, что каждое слагаемое многочлена (8.25), начиная со второго, содержит множитель $x - x_0$, естественно предположить, что этот многочлен наиболее приспособлен для интерполирования в окрестности узла x_0 (при x, близких к x_0, $f(x) \approx y_0$). Будем называть узел x_0 ***базовым*** для многочлена (8.25), и упростим (8.25) введением новой переменной q равенством $q = \dfrac{x - x_0}{h}$, или (что то же) равенством $x = x_0 + qh$. Так как при любых $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$x - x_i = x_0 + qh - x_0 - ih = h(q - i),$$

то в результате подстановки этих разностей в (8.25) приходим к ***первой интерполяционной формуле Ньютона*** в виде

$$f(x) \approx P_n(x_0 + qh) := y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (8.26)$$

где обозначение $P_n(x_0 + qh)$ указывает не только на n-ю степень многочлена, но и на базовый узел x_0 и связь переменных x и q.

Первая формула Ньютона (8.26) обычно применяется при значениях $|q| < 1$, а именно, *для интерполирования вперед*, (при $x \in (x_0, x_1)$, т.е. при $q \in (0, 1)$) *и экстраполирования назад* (при $x < x_0$, т.е. при $q < 0$).

Так как реально степени интерполяционных многочленов бывают не так велики, в то время как таблицы значений функций достаточно обширны, и так как в реальной числовой таблице никаких индексов — номеров узлов нет (см., например, приведенную выше табл.8.5), то за базовый для формулы (8.26) узел x_0 можно принимать узел, ближайший к заданной фиксированной точке x, если за ним имеется достаточное число узлов для построения необходимых для (8.26) разностей. Поскольку в первой формуле Ньютона используются нисходящие диагонали таблицы конечных разностей (см. табл.8.4), то такое смещение узла, принимаемого за базовый, в конце таблицы будет неприемлемо.

Учет этого обстоятельства приводит к потребности в симметричной, в определенном смысле, для (8.26) формулы, которая была бы пригодной для интерполирования в конце таблицы. Для этого, в отличие от (8.23), форма интерполяционного многочлена $P_n(x)$ берется такой, которая предусматривает поочередное подключение узлов в обратном порядке: сначала последний, потом

предпоследний и т.д., т.е.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ этого многочлена находятся аналогично тому, как они находились для многочлена (8.23), только здесь подстановка узловых точек вместо x и рассмотрение интерполяционных равенств производится тоже в обратном порядке. Полагая $x = x_n$, $x = x_{n-1}, \ldots$, имеем:

$$P_n(x_n) = a_0 = y_n,$$

$$P_n(x_{n-1}) = y_n + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h},$$

$$P_n(x_{n-2}) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{y_{n-2} - y_n + 2\Delta y_{n-1}}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{-2h(-h)} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}$$

и т.д. В общем случае

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k} \qquad \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Таким образом получаем ***второй интерполяционный многочлен Ньютона***

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1), \qquad (8.27)$$

в котором базовым является узел x_n и коэффициенты которого определяются конечными разностями, расположенными на восходящей от y_n диагонали.

Положим в (8.27) $x = x_n + qh$, иначе, введем новую переменную $q = \dfrac{x - x_n}{h}$ и преобразуем к ней входящие в (8.27) разности:

$$x - x_i = x_n + qh - x_0 - ih = x_0 + nh + qh - x_0 - ih = h(q + n - i).$$

В результате приходим ко ***второй интерполяционной формуле Ньютона*** вида

$$f(x) \approx P_n(x_n + qh) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (8.28)$$

Ее также целесообразно использовать при значениях $|q| < 1$, т.е. в окрестности узла x_n *для интерполирования назад* (при $q \in (-1, 0)$) *и экстраполирования вперед* (при $q > 0$).

Наряду с выведенными специально для начала и конца таблицы первой и второй интерполяционными формулами Ньютона, имеется еще несколько формул, рассчитанных на их применение в центральной части таблицы и потому называемых ***центральными интерполяционными формулами***. Прежде, чем определять эти формулы, введем понятие центральных разностей.

Будем считать, что узел x_0 расположен в середине таблицы, и нумерация остальных узлов производится, начинаясь с x_0, с использованием как положительных, так и отрицательных индексов, т.е. считаем $x_i = x_0 + ih$, где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда центральная часть таблицы конечных разностей будет проиндексирована так, как это показано в табл.8.7. Все подчеркнутые в ней конечные разности (находящиеся с x_0, y_0 в одной строке и на полстроки выше и ниже) называются ***центральными разностями***.

Интерполяционный многочлен ищем в форме

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots, \quad (8.29)$$

предполагающей постепенное подключение узлов x_i: сначала при $i = 0$, затем при $i = 1$, потом при $i = -1$ и т.д., т.е. с двух сторон от x_0. При этом здесь и далее не будем фиксировать степени многочленов и не будем стремиться выписывать общие и, тем более, последние члены таких многочленов. Как и в предыдущих случаях, коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ находим один за другим последовательной подстановкой в $P(x)$ и в интерполяционные равенства $P(x_i) = y_i$ значений $x = x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \ldots$:

$$a_0 = y_0; \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}; \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}; \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}; \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}$$

и т.д. Введя новую переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и выразив через нее

разности $x - x_i = h(q - i)$ для всех $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в результате подстановки этих разностей и выражений коэффициентов в шаблон (8.29), приходим к ***первой интерполяционной формуле Гаусса***:

$$f(x) \approx \overline{P}(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots. \quad (8.30)$$

Записанные слагаемые легко дополнить следующими, если знать, что в этой формуле используются нижние центральные разности все возрастающих порядков, т.е. те, которые подчеркнуты в табл.8.7 сплошной чертой.

Таблица 8.7

Таблица центральных разностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$						
x_{-3}	y_{-3}		$\ldots$					
		Δy_{-3}		$\ldots$				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\ldots$			
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\ldots$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\ldots$	
		$\underline{\Delta y_{-1}}$		$\underline{\Delta^3 y_{-2}}$		$\underline{\Delta^5 y_{-3}}$		
x_0	y_0		$\underline{\Delta^2 y_{-1}}$		$\underline{\Delta^4 y_{-2}}$		$\underline{\Delta^6 y_{-3}}$	$\ldots$
		$\underline{\Delta y_0}$		$\underline{\Delta^3 y_{-1}}$		$\underline{\Delta^5 y_{-2}}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\ldots$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\ldots$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\ldots$			
		Δy_2		$\ldots$				
x_3	y_3		$\ldots$					
		$\ldots$						
$\ldots$	$\ldots$							

Совершенно аналогично, подключая узлы в другом порядке (после x_0 сначала предшествующий, затем последующий и т.д.,

т.е. $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, \ldots$), можно построить ***вторую интерполяционную формулу Гаусса***

$$f(x) \approx \widetilde{P}(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots, \qquad (8.31)$$

использующую верхние центральные разности (подчеркнутые в табл.8.7 пунктирной линией).

Интерполяционные формулы Гаусса служат полуфабрикатами для получения более симметричных, использующих все центральные разности интерполяционных формул.

Так, полусумма первого и второго интерполяционных многочленов Гаусса после преобразований приводит к формуле

$$f(x) \approx P_S(x_0 + qh) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{q\left(q^2-1\right)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2\left(q^2-1\right)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots, \qquad (8.32)$$

называемой ***интерполяционной формулой Стирлинга***

Если же взять полусумму второго интерполяционного многочлена Гаусса и такого же многочлена, но с нижними индексами, увеличенными на единицу (т.е. с базовой точкой x_1 вместо x_0), то придем к ***интерполяционной формуле Бесселя***

$$f(x) \approx P_B(x_0 + qh) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right)\Delta y_0 +$$

$$+ \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+ \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots. \qquad (8.33)$$

В последней формуле обращает на себя внимание тот факт, что она сильно упростится, если в нее подставить значение $q = \frac{1}{2}$, соответствующее значению аргумента $\hat{x} = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$.

Этот частный случай формулы Бесселя называют ***формулой интерполирования на середину***:

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\approx\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$

$$+\frac{3}{128}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}-\ldots. \quad (8.34)$$

Итак, *если точка* x, *в которой нужно найти приближенное значение таблично заданной функции* $f(x)$, *находится в начале или в конце таблицы, применяется соответственно первая* (8.26) *или вторая* (8.28) *формулы Ньютона с таким выбором базовой точки, чтобы значение* $|q|$ *было как можно меньше. Если точка* x *находится в середине таблицы, то всегда можно зафиксировать точку* x_0 *в таблице центральных разностей так, чтобы* $q=\dfrac{x-x_0}{h}$ *либо было по модулю меньше* 0.25 *и тогда применять интерполяционную формулу Стирлинга* (8.32), *либо чтобы* $q\in[0.25,\ 0.75]$ *и использовать формулу Бесселя* (8.33).

Пример 8.4. Пусть требуется для функции $y=f(x)$, заданной в примере 8.3 таблицей нескольких своих значений с тремя знаками после запятой, найти приближенные значения: а) $f(0.5)$; б) $f(1.22)$; в) $f(1.5)$; г) $f(1.94)$; д) $f(2.5)$, записав предварительно соответствующие каждому случаю интерполяционные формулы.

Для решения поставленной задачи учитываем, что значения $f(x)$ заданы в примере 8.3 на сетке р а в н о о т с т о я щ и х узлов, поэтому здесь можно применить конечноразностную интерполяцию. При этом будем пользоваться уже составленной табл.8.5 конечных разностей и проведенным ранее ее анализом на выявление оптимальной степени многочлена. Для случаев б–д фиксируем вторую степень, для а — третью. В каждом случае, т.е. для конкретного значения аргумента, выбираем базовый узел, подсчитываем значение вспомогательной переменной q и, в зависимости от положения базового узла и значения q, пользуясь представленными в табл.8.5 числами, записываем требуемую интерполяционную формулу. Подстановка в нее значения q приводит к искомому значению $f(x)$.

а) При $x=0.5$ (начало таблицы) полагаем $x_0=0.4$; тогда $q=\dfrac{x-x_0}{h}=\dfrac{0.5-0.4}{0.2}=0.5$. Соответствующую интерполяционную формулу для аппроксимации $f(x)$ при $x=0.4+0.2q$ с $q\in(-1,1)$ записываем, глядя на первую интерполяционную формулу Ньютона (8.26) и табл.8.5:

$$f(x)\approx P_3(0.4+0.2q)=0.336-0.179q+\frac{0.062}{2}q(q-1)+\frac{0.015}{6}q(q-1)(q-2).$$

Отсюда получаем искомое значение

$$f(0.5) \approx P_3(0.4+0.2\cdot 0.5) = 0.336 - 0.179\cdot 0.5 + 0.031\cdot 0.5\cdot(-0.5) +$$
$$+0.0025\cdot 0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1.5) \approx 0.336 - 0.0895 - 0.0078 + 0.0009 \approx 0.240.$$

б) Точка $x = 1.22$ находится в средней части таблицы. Поэтому здесь целесообразно применить формулу Стирлинга или Бесселя. Полагая $x_0 = 1.2$ и найдя $q = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{1.22 - 1.2}{0.2} = 0.1$, останавливаемся на формуле Стирлинга (8.32), которая в данном случае имеет вид

$$f(x) \approx P_S(1.2 + 0.2q) = 0.040 + \frac{0.040 + 0.119}{2} q + \frac{0.079}{2} q^2$$

и при $q = 0.1$ приводит к искомому значению

$$f(1.22) \approx 0.040 + 0.0080 + 0.0004 \approx 0.048.$$

в) Здесь, очевидно, напрашивается применение формулы (8.34) интерполирования на середину. Полагая $x_0 = 1.4$, $x_1 = 1.6$, имеем:

$$f(1.5) \approx \frac{0.159 + 0.353}{2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{0.075 + 0.075}{2} \approx 0.256 - 0.0094 \approx 0.247.$$

г) Глядя на положение точки $x = 1.94$ в заданной системе узлов табл.8.5, видим, что для вычисления $f(1.94)$ также возможно применение центральных интерполяционных формул. Положив $x_0 = 1.8$ и вычислив $q = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{1.94 - 1.8}{0.2} = 0.7$, на основе (8.33) записываем интерполяционную формулу Бесселя

$$f(x) \approx P_B(1.8 + 0.2q) = \frac{0.622 + 0.961}{2} + 0.339(q - 0.5) + \frac{0.070 + 0.068}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{2}.$$

Из нее получаем

$$f(1.94) \approx P_B(1.8 + 0.2\cdot 0.7) \approx 0.7915 + 0.0678 - 0.0072 \approx 0.852.$$

д) Точка $x = 2.5$ расположена за последним узлом, поэтому для экстраполяции $f(x)$ здесь однозначно следует применить вторую интерполяционную формулу Ньютона (8.28). Считая $x_n = 2.4$ (индекс n здесь используется условно, без придания ему конкретного значения), записываем формулу экстраполяции

$$f(x) \approx P(2.4 + 0.2q) = 1.840 + 0.472q + \frac{0.065}{2} q(q+1),$$

откуда при $q = \dfrac{x - x_n}{h} = \dfrac{2.5 - 2.4}{0.2} = 0.5$ находим

$$f(2.5) \approx P(2.4 + 0.2\cdot 0.5) \approx 1.840 + 0.236 + 0.0244 \approx 2.100.$$