

ЗАДАЧА И СПОСОБЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

В основе большинства численных методов математического анализа лежит подмена одной функции $f(x)$ (известной, неизвестной или частично известной) другой функцией $\varphi(x)$, близкой к $f(x)$ и обладающей «хорошими» свойствами, позволяющими легко производить над нею те или иные аналитические или вычислительные операции. Будем называть такую подмену *аппроксимацией*^{*)} или просто *приближением* функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$. Для того, чтобы построить какую-то разумную теорию таких приближений и предложить конкретные способы получения аппроксимирующих функций $\varphi(x)$ по заданным тем

^{*)} Часто термин «аппроксимация функций» используется в более узком смысле, чем это принимается здесь.

или иным образом аппроксимируемым функциям $f(x)$, предварительно следует ответить на ряд вопросов.

1) *Что известно о функции $f(x)$?* Задана ли она своим аналитическим выражением или таблицей своих значений, какова степень ее гладкости и доступны ли значения ее производных, как расположены точки в интересующей части области определения $f(x)$, где известны ее значения, и можно ли их задавать по своему усмотрению, и т.п.

2) *Какому классу (семейству) функций должна принадлежать функция $\varphi(x)$?* Какие дополнительные требования предъявляются к $\varphi(x)$, выделяющие ее из заданного класса?

3) *Что понимать под близостью между $f(x)$ и $\varphi(x)$; иначе, какой принять критерий согласия между ними?* Говоря языком функционального анализа, по метрике какого пространства должно быть малым расстояние между $f(x)$ и $\varphi(x)$?

Как видим, задача аппроксимации функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ состоит в построении для заданной функции $f(x)$ такой функции $\varphi(x)$, что

$$f(x) \approx \varphi(x), \quad (8.1)$$

причем левая часть приближенного равенства (8.1) должна быть обусловлена ответами на вопросы первой группы, правая часть — второй группы, а ответ на вопрос 3) должен уточнить значение связывающего $f(x)$ и $\varphi(x)$ символа « \approx ».

Прежде всего, определимся с ответом на второй вопрос. *Договоримся использовать в качестве аппроксимирующих функций $\varphi(x)$ только многочлены или функции, составленные из многочленов**; в таком случае будем говорить о **полиномиальной аппроксимации** или **кусочно-полиномиальной аппроксимации** соответственно.

По сравнению с другими семействами функций, пригодных для построения теории приближений, например, таких, как тригонометрические или показательные функции, рациональные функции или всплески [18], для вычислительной математики многочлены привлекательны тем, что они являются линейными функциями своих параметров (коэффициентов), и их вычисление сводится к выполнению конечного числа простейших арифметических операций — сложения и умножения.

Будем считать, что аппроксимация функции $f(x)$ производится с помощью многочленов степени $n \in \mathbf{N}_0$. Тогда в зависимости от выбора критерия согласия и, в частности, от количества *точек согласования* $f(x)$ с $\varphi(x)$ (будем называть их *узлами*), т.е. точек, в которых известна информация об $f(x)$ и, возможно, ее производных, можно рассмотреть разные конкретные способы аппроксимации.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Пусть в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, что $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$, известны значения функции $y = f(x)$, т.е. на отрезке $[a, b]$ задана **табличная (сеточная) функция**

$$f(x): \begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}. \quad (8.2)$$

Функция $\varphi(x)$ называется **интерполирующей** или **интерполяционной** для $f(x)$ на $[a, b]$, если ее значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в заданных точках x_0, x_1, \dots, x_n , называемых **узлами интерполяции**, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, т.е. с y_0, y_1, \dots, y_n соответственно^{*}). Геометрически факт интерполирования означает, что график функции $\varphi(x)$ проходит так, что, по меньшей мере, в $n + 1$ заданных точках он пересекает или касается графика функции $f(x)$ (рис.8.1).

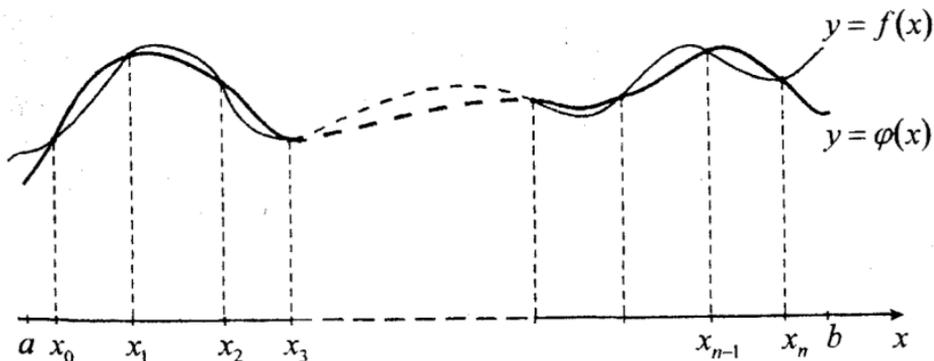


Рис.8.1. Геометрическая интерпретация задачи интерполирования

Легко представить, что таких графиков $\varphi(x)$, проходящих через заданные точки, можно изобразить сколько угодно, и они могут отличаться от графика $f(x)$ сколь угодно сильно, если не накладывать на $\varphi(x)$ и $f(x)$ определенных ограничений.

^{*}) Латинское слово *interpolatio* переводится как обновление, изменение, переделка. Обычно термин **интерполяция** (или иначе, **интерполирование**) означает процесс построения интерполяционной функции или процесс нахождения промежуточных значений табличной функции. Этот термин введен в 1656 году английским математиком Джоном Валлисом (Уоллисом, 1616–1703 гг.); кстати отметим, что годом раньше он ввел ныне общепринятый символ бесконечности (∞) [199].

потребовать выполнения условия

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i \\ 1, & \text{если } j = i \end{cases} \quad \forall j, i \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (8.5)$$

В таком случае для многочлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

в каждом узле x_j ($j \in \{0, 1, \dots, n\}$), в силу (8.5), справедливо

$$\begin{aligned} L_n(x_j) &= l_0(x_j)y_0 + \dots + l_{j-1}(x_j)y_{j-1} + l_j(x_j)y_j + l_{j+1}(x_j)y_{j+1} + \dots \\ &\dots + l_n(x_j)y_n = 0 + \dots + 0 + y_j + 0 + \dots + 0 = y_j, \end{aligned}$$

т.е. выполняются условия интерполяции (8.3).

Чтобы конкретизировать базисные многочлены $l_i(x)$, учтем, что они должны удовлетворять условиям (8.5). Равенство нулю i -го многочлена во всех узлах, кроме i -го, означает, что $l_i(x)$ можно записать в виде

$$l_i(x) = A_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

а коэффициент A_i этого представления легко получается из содержащегося в (8.5) требования $l_i(x_i) = 1$. Подставляя в выражение $l_i(x)$ значение $x = x_i$ и приравнявая результат единице, получаем

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Таким образом, *базисные многочлены Лагранжа* имеют вид

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

а искомым *интерполяционным многочленом Лагранжа* есть

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i. \quad (8.6)$$

Заметим, что числитель, фигурирующий в записи i -го слагаемого $L_n(x)$ дроби, представляет собой произведение разностей между переменной x и всеми узлами, кроме i -го, а знаменатель — произведение разностей между i -м узлом и всеми остальными.

В качестве примера запишем интерполяционные многочлены Лагранжа первой и второй степени.

При $n=1$ информация об интерполируемой функции $y = f(x)$ сосредоточена в двух точках: $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$. Многочлен Лагранжа в этом случае составляется с помощью двух базисных многочленов первой степени ($l_0(x)$ и $l_1(x)$) и имеет вид

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1. \quad (8.7)$$

При $n = 2$ по трехточечной таблице

$$f(x): \begin{array}{c|c|c|c} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}$$

можно образовать три базисных многочлена ($l_0(x)$, $l_1(x)$ и $l_2(x)$) и, соответственно, интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2. \quad (8.8)$$

Приближенные равенства

$$f(x) \approx L_1(x) \quad \text{и} \quad f(x) \approx L_2(x)$$

называют соответственно **формулами линейной и квадратичной интерполяции**. Геометрически они означают подмену графика функции $y = f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ оси абсцисс, содержащем точки x_0, x_1 в первом и x_0, x_1, x_2 во втором случаях, соответствующими участками прямой линии и квадратичной параболы, проходящих через заданные точки координатной плоскости.

Такая простейшая интерполяция широко применялась при составлении различных таблиц значений функций для их пополнения промежуточными значениями (что и являлось основной задачей интерполяции на ранней стадии развития вычислительной математики). В связи с этим, заметим, что иногда термину **интерполяция** противопоставляется термин **экстраполяция**. В таких случаях речь идет о том, что под интерполяцией понимается нахождение промежуточных значений таблично заданной

функции строго внутри таблицы, тогда как экстраполяция*) предполагает использование интерполяционного многочлена, построенного по значениям функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n , для нахождения ее приближенных значений за пределами промежутка $[x_0, x_n]$.

Вернемся к изучению интерполяционного многочлена Лагранжа (8.6).

Покажем его **единственность** (от противного). Предположим, что наряду с $L_n(x)$ имеется другой многочлен n -й степени $Q_n(x)$, решающий ту же задачу интерполяции, т.е. удовлетворяющий условиям интерполяции типа (8.3):

$$Q_n(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Образует новый многочлен как разность между $L_n(x)$ и $Q_n(x)$. Этот многочлен $P_n(x) := L_n(x) - Q_n(x)$ имеет степень не выше n и во всех $n+1$ узлах x_0, x_1, \dots, x_n обращается в нуль, в силу равенства значений $Q_n(x_i)$ и $L_n(x_i)$ одним и тем же числам y_i . Получается, что точки x_0, x_1, \dots, x_n служат корнями многочлена $P_n(x)$. Но по следствию из основной теоремы алгебры многочленов $P_n(x)$ не может иметь более n корней. Полученное противоречие означает, что многочлены $Q_n(x)$ и $L_n(x)$ должны полностью совпадать, т.е. по заданным $n+1$ значениям функции можно построить единственный интерполяционный многочлен.

Пусть для данной функции $f(x)$ интерполяционный многочлен $L_n(x)$ построен, т.е. для приближенного представления функции $f(x)$ на отрезке $[a, b] \supseteq [x_0, x_n]$ применяется **интерполяционная формула**

$$f(x) \approx L_n(x). \quad (8.9)$$

Естественно встает вопрос: какова погрешность такого приближенного равенства? Иначе, сколь велико может быть различие между значениями интерполируемой функции $f(x)$ и соответствующими значениями интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ в точках отрезка $[a, b]$, не совпадающих с узловыми точками?

*) Указанный здесь узкий смысл терминов «интерполирование» и «экстраполирование» становится очевидным, если учитывать их латинское происхождение: «inter» и «extra» означают соответственно «между» и «вне», а «polire» — «делать гладким» [200]; таким образом, интерполирование — это сглаживание между узлами, а экстраполирование — сглаживание вне таблицы.

Для совершенно произвольной функции $f(x)$ такая постановка вопроса о погрешности интерполяции заведомо некорректна, поскольку функций, для которых построенный (единственный!) многочлен $L_n(x)$ будет интерполяционным, бесконечно много; легко представить себе эту ситуацию графически: через $n+1$ заданных точек с координатами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_n; y_n)$, согласно доказанному, можно провести единственную параболу — график многочлена степени n — и, в то же время, можно изобразить сколько угодно графиков других функций, как угодно сильно отличающихся от этой параболы. Этот факт говорит о том, что заключить величину этого отклонения, т.е. погрешность интерполяции, в определенные рамки невозможно, если не наложить каких-то ограничений на гладкость интерполируемой функции $f(x)$ и на расположение узлов интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n на отрезке $[a, b]$.

Будем выяснять величину отклонения $f(x)$ от $L_n(x)$ в произвольной точке $x \in [a, b]$, иначе, величину *остаточного члена*

$$R_n(x) := f(x) - L_n(x)$$

интерполяционной формулы Лагранжа (8.9) в предположении, что $f(x) \in C_{[a, b]}^{n+1}$, т.е. данная функция $n+1$ раз непрерывно дифференцируема.

Обозначим

$$\Pi_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (8.10)$$

— определенный через узлы x_0, x_1, \dots, x_n многочлен $(n+1)$ -й степени. Через него введем в рассмотрение функцию

$$u(x) := f(x) - L_n(x) - c\Pi_{n+1}(x), \quad (8.11)$$

где c — некоторая постоянная (параметр).

Так как в точках $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ многочлен $\Pi_{n+1}(x)$ обращается в нуль, согласно его конструкции, а $f(x) - L_n(x) = 0$ в этих точках по условиям интерполяции, то и $u(x_i) = 0$ при $i = 0, 1, \dots, n$, т.е. функция $u(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ по меньшей мере $n+1$ корень. Подберем параметр c так, чтобы $u(x)$ имела заведомо еще и $(n+2)$ -й корень в какой-то фиксированной точке $\bar{x} (\neq x_i)$ промежутка $[a, b]$. Имеем:

$$u(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = c\Pi_{n+1}(\bar{x}) \Leftrightarrow c = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})},$$

причем такое значение c обязательно найдется, поскольку $\Pi_{n+1}(x) = 0$ только в узлах x_i .

Пусть для определенности $\bar{x} \in (x_i, x_{i+1})$. Тогда можно утверждать, что при найденном c функция $u(x)$ равна нулю на концах $n+1$ отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Значит, к функции $u(x)$ на каждом из этих отрезков применима теорема Ролля, т.е. внутри каждого из этих отрезков существует, по крайней мере, по одной такой точке, в которой производная функции $u(x)$ обращается в нуль. Эти $n+1$ точки образуют систему из n отрезков, на концах каждого из которых уже функция $u'(x)$ равна нулю, т.е. теперь к производной можно применить теорему Ролля, по которой существует n нулей второй производной функции $u(x)$. Продолжая процесс таких рассуждений далее, в конце концов, приходим к выводу о существовании такой точки $\xi \in (x_0, x_n) \subseteq (a, b)$, что $u^{(n+1)}(\xi) = 0$. Учитывая, что n -я производная многочлена n -й степени постоянна, а $(n+1)$ -я равна нулю, находим выражение $(n+1)$ -й производной функции $u(x)$, заданной равенством (8.11):

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - c(n+1)!.$$

Итак, существует точка $\xi \in (x_0, x_n)$ такая, что

$$f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)! = 0, \quad \text{т.е. } c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Это значение c должно совпадать с выбранным ранее, т.е. должно выполняться равенство

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

откуда получаем

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(\bar{x}).$$

Так как в качестве \bar{x} могла быть взята любая точка x из промежутка $[a, b]$, не совпадающая ни с какой узловой, расфиксируем (или, как еще говорят, разморозим) точку \bar{x} , т.е. заменим ее в последнем равенстве произвольной точкой $x \neq x_i$, в результате чего приходим к выражению остаточного члена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x). \quad (8.12)$$

Знание остаточного члена в предположении $(n+1)$ -кратной дифференцируемости $f(x)$ позволяет записать точное представление $f(x)$ через ее интерполяционный многочлен $L_n(x)$:

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x), \quad (8.13)$$

где ξ — некоторая (вообще говоря, неизвестная, причем зависящая от x) точка из промежутка интерполяции (a, b) , а $\Pi_{n+1}(x)$ — определенный в (8.10) многочлен*).

Теперь можно ставить и пытаться отвечать на вопросы о погрешности приближенного вычисления значения $f(x)$ с помощью $L_n(x)$ в какой-либо конкретной точке промежутка $[a, b]$, о величине максимальной погрешности, допускаемой при замене функции $f(x)$ многочленом $L_n(x)$ на этом промежутке, о сходимости интерполяционного процесса, т.е. о том, имеет ли место $\rho(f(x), L_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ по метрике $\rho(\cdot, \cdot)$ того или иного определенного на $[a, b]$ функционального пространства.

Так, если известна величина

$$M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

то оценить абсолютную погрешность интерполяционной формулы (8.9) в любой точке $\tilde{x} \in [a, b]$ можно с помощью неравенства

$$|R_n(\tilde{x})| = |f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(\tilde{x})|. \quad (8.14)$$

Максимальная погрешность интерполирования на отрезке $[a, b]$ оценивается величиной

$$\max_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\Pi_{n+1}(x)|. \quad (8.15)$$

Так как максимумы функций $f^{(n+1)}(x)$ и $\Pi_{n+1}(x)$ достигаются, вообще говоря, в разных точках отрезка $[a, b]$, то более точной, но более трудно реализуемой по сравнению с (8.15) следует считать оценку

$$\max_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x) \Pi_{n+1}(x)|.$$

*) Формула (8.12) устанавливалась для значений $x \neq x_i$. Но при $x = x_i$ левая и правая части (8.12) равны нулю, следовательно, формула (8.12), а с нею и представление (8.13), справедливы при любых $x \in [a, b]$.

Пример 8.1. Рассмотрим квадратичную интерполяцию функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ по ее трем значениям: $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

По формуле (8.8) строим многочлен Лагранжа второй степени

$$L_2(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(0 - \frac{\pi}{4}\right)\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot 0 + \frac{(x-0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(x-0)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot 1,$$

или после преобразований

$$L_2(x) = \frac{8}{\pi^2} x \left[(1 - \sqrt{2})x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi \right]. \quad (8.16)$$

Остаточный член для этого случая получаем по формуле (8.12), учитывая, что $n = 2$, $(\sin x)''' = -\cos x$ и $\Pi_3(x) = x \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$.

Имеем:

$$R_2(x) = \sin x - L_2(x) = \frac{-\cos \xi}{3!} x \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

Так как точка $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ неизвестна, можно делать лишь оценки $|R_2(x)|$, полагая $M_3 = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |-\cos x| = 1$. Найдя максимальное значение $|\Pi_3(x)|$,

реализуемое в двух точках данного отрезка $x_{1,2} = \frac{\pi}{12} (3 \pm \sqrt{3})$ и не превосходящее 0.568, по формуле (8.15) оцениваем сверху величину допустимого отклонения дуги параболы (8.16) от данной синусоиды на промежутке интерполирования:

$$\max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |\sin x - L_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |\Pi_3(x)| < \frac{0.568}{6} \approx 0.095.$$

Подставим в полученный интерполяционный многочлен (8.16) контрольную точку $\tilde{x} = \frac{\pi}{6}$. Получим приближенное значение

$$L_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 1}{9} \approx 0.517, \text{ отличающееся от значения } \sin \frac{\pi}{6} = 0.5 \text{ на вели-}$$

чину ≈ 0.017 , меньшую, чем это допускается оценкой по формуле (8.14):

$$\left| \sin \frac{\pi}{6} - L_2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| \leq \frac{M_3}{3!} \left| \Pi_3 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{6} \right)^3 \approx 0.075.$$

Наблюдаем типичную картину: фактическая погрешность меньше оценки погрешности в точке, которая, в свою очередь, меньше максимальной погрешности на отрезке (т.е. по чебышевской норме).

В заключение этого параграфа заметим, что через введенный в (8.10) многочлен $\Pi_{n+1}(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа (8.6) можно записать в более компактной форме. Для этого достаточно увидеть, что знаменатель фигурирующей там дроби представляет собой значение производной многочлена $\Pi_{n+1}(x)$ в i -м узле, а числитель есть просто $\Pi_{n+1}(x)$ без множителя $x - x_i$.

Таким образом,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)y_i}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}. \quad (8.6a)$$