МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:

«ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ СЕТОК»

Уфа
2013

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является приобретение студентами умения приближенного решения на компьютере параболических дифференциальных уравнений в частных производных.

2 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В данной работе рассматривается численное решение методом сеток задачи нестационарного одномерного распределения тепла. Задача описывается классическим дифференциальным уравнением параболического типа - уравнением теплопроводности. Требуется вычислить значения функции $u(x,t)$, удовлетворяющей в области $G = \{(x,t) \mid 0 \le x \le l, t > 0\}$ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a = const,\ a > 0, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \tag{3}$$

Математически – это *задача Коши с граничными условиями* или *краевая задача с начальными условиями* (смешанная задача).

Такая постановка имеет место, например, в задаче о распространении тепла в однородном стержне длины l, на концах которого поддерживается заданный температурный режим. В этой задаче a – коэффициент теплопроводности материала стержня. Замена $t \to at$ приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

поэтому примем $a = 1$.

Поскольку задачу (1) - (3) называют эволюционной, имея в виду построение эволюции температуры во времени, то ее область решения является полубесконечной ($t > 0$). Для проведения численных расчетов ограничим область по оси времени некоторой величиной T ($0 < t < T$).

Решение поставленной задачи будем искать методом сеток с использованием разностной схемы.

Общая идея метода сеток состоит в построении в области решения сетки из узловых точек, конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения в узлах сетки и решении получившейся системы алгебраических уравнений.

В области решения строим равномерную прямоугольную сетку с шагами h и τ в направлениях x и t соответственно (*рисунок 1*).

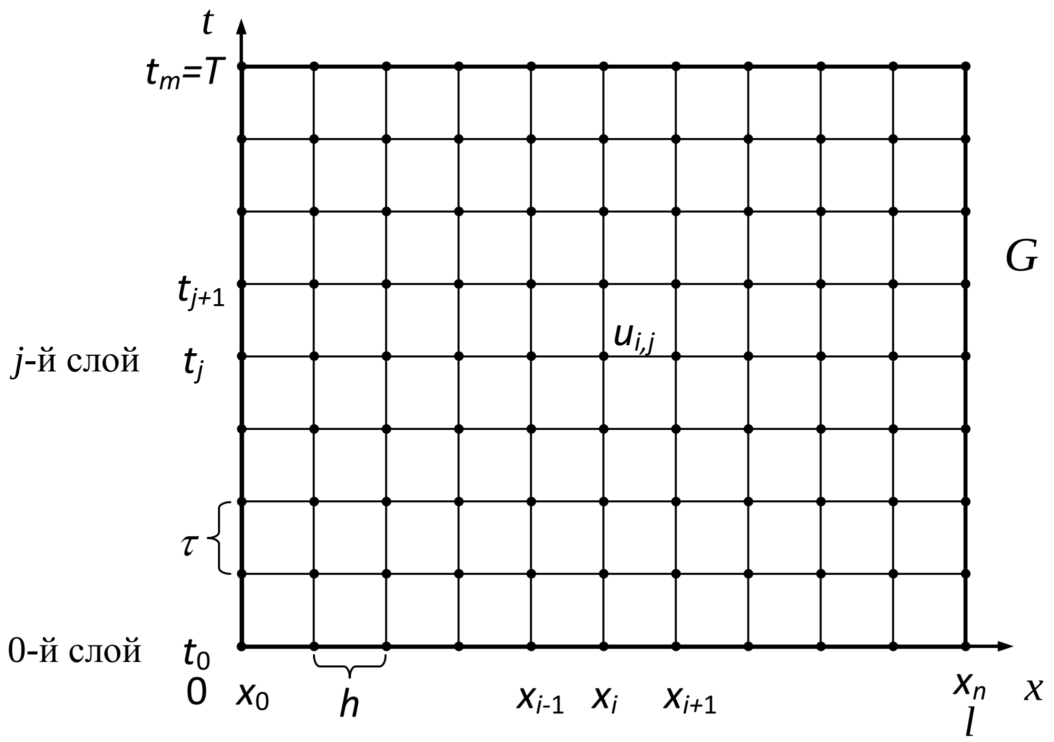


Рисунок 1- Область решения задачи

Координаты узлов обозначим:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \qquad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

где n, m – количество узлов по направлениям x и t, соответственно.

Тогда $h = l / n$ и $\tau = T / m$. Искомую сеточную функцию $u(x,t)$, отражающую температуру в узлах, обозначим $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$. Узлы, имеющие одинаковую временную координату $(j = const)$, называют *t-слоями* или *слоями по времени*.

Решение ищется последовательно по временным слоям начиная от слоя $j=1$ и далее до слоя $j=m$ включительно.

Запишем разностную аппроксимацию уравнения (4) с использованием четырехточечных шаблонов двух типов, показанных на *рисунке 2.* Шаблон на *рисунке 2, а* соответствует так называемой *явной схеме,* а шаблон на *рисунке 2, б - неявной схеме.*

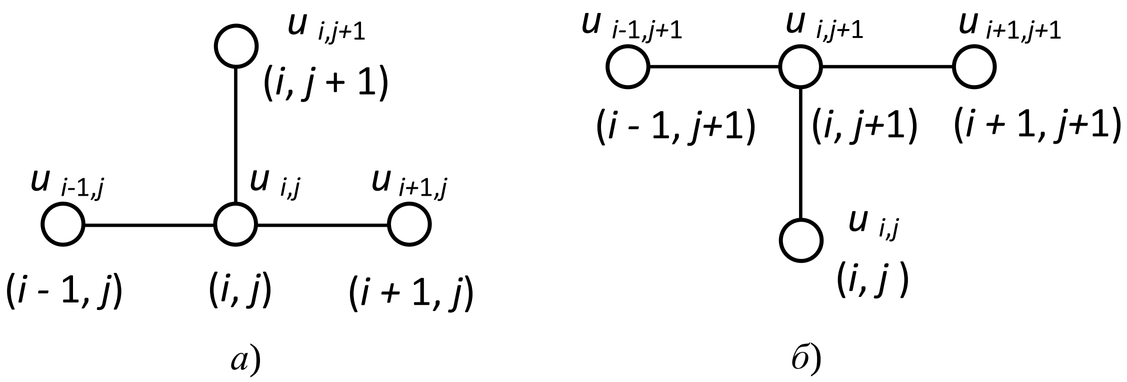


Рисунок 2 - Шаблоны для разностной аппроксимации

В явной схеме производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ аппроксимируется с использованием известных значений сеточной функции на j-м временном слое, а в неявной схеме - с использованием неизвестных значений функции на (j + 1)-м слое.

Аппроксимируем производные решаемого уравнения в соответствии с шаблоном, показанным на *рисунке 2, а*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Подставим разностные отношения в решаемое уравнение (4)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(\tau, h^2).$$

Из этого соотношения получается явная разностная схема, когда искомое значение $u_{i,j+1}$ определяется явным образом через известные значения на j-м слое по соотношению

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \qquad (5)$$

где параметр $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$.

Для неявной разностной схемы, соответствующей шаблону на *рисунке 2, б,* имеем

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}=\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}+O(\tau,h^2)$$

или

$$\lambda u_{i+1,j+1}-(1+2\lambda)u_{i,j+1}+\lambda u_{i-1,j+1}=-u_{i,j}. \qquad (6)$$

Соотношение (6), записанное для всех внутренних узлов текущего временного слоя, порождает систему линейных алгебраических уравнений, с помощью которых определяются искомые значения функции u в узлах слоя. Каждое уравнение этой системы содержит только три неизвестных, т.е. система обладает трехдиагональной матрицей коэффициентов и ее рационально решать либо методом прогонки, либо итерационными методами.

Итак, алгоритм численного решения задачи теплопроводности следующий. На нулевом временном слое j=0 значения функции (температуры) известны из начального условия $u_{i,0}=f(x_i),\quad i=0,1,\ldots,n$. Также известны значения функции в левых и правых граничных узлах: $u_{0,j}=\mu_1(t_j)$ и $u_{n,j}=\mu_2(t_j)$.

На каждом следующем слое искомая функция определяется:

- в явной схеме непосредственно по формуле (5);
- неявной схеме путем решения системы из n-1 уравнения вида (6).

Для разностных схем важным свойством является их *устойчивость*. Поясним понятие устойчивости. Ошибки округления при вычислении начальных и граничных условий, а также правых частей уравнений можно рассматривать как возмущения. Очевидно, что разностная задача будет корректной и устойчивой, если ее решение будет незначительно изменяться при малом изменении в начальных и граничных условиях и в правых частях, связанных со случайными ошибками. В противном случае разностная задача является неустойчивой.

Свойство неявной схемы – ее устойчивость при любых значениях параметра λ. Явная схема оказывается устойчива только при $\lambda\le\frac{1}{2}$ или $\tau\le\frac{h^2}{2}$.

Это значит, что вычисления в явной схеме придется вести с очень малым шагом по времени.

Очевидно, что при одинаковых шагах разностной сетки число операций, необходимых для отыскания решения на отдельном слое, в явных схемах значительно меньше, чем в неявных. Поскольку в конечном счете качество разностной схемы при одинаковой требуемой точности должно оцениваться количеством операций, необходимых для получения решения на всем временном интервале, в ряде случаев неявные разностные схемы оказываются более предпочтительными, чем явные.

В настоящей лабораторной работе задача теплопроводности (1) - (3) на интервале времени $0 \le t \le T$ решается по явной схеме.

В явной схеме погрешность приближенного решения, полученного методом сеток, определяется только ошибками аппроксимации частных производных конечно-разностными отношениями. Для производной по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ ошибка пропорциональна шагу τ, а для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - квадрату шага h^2. С уменьшением величин шагов (увеличением числа узлов сетки) повышается точность решения задачи.

3 РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Методом сеток решить смешанную (начально-краевую) задачу для уравнения теплопроводности в области $G = \{(x,t) \mid 0 \le x \le 1, 0 < t < 0{,}15\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0;1], \quad t \in [0;0{,}15]$$

с начальным условием

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} f_1(x) = 10 - 20x, & x \in [0;0{,}5] \\ f_2(x) = 40x - 20, & x \in [0{,}5;1] \end{cases}$$

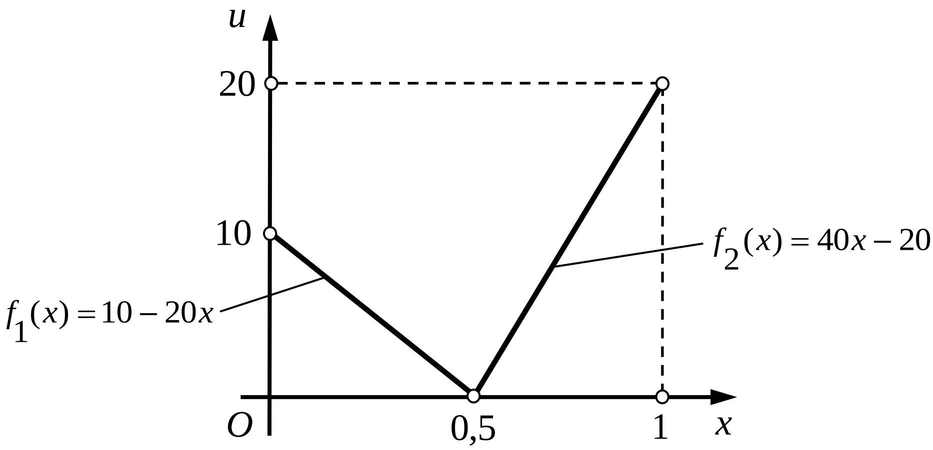
и граничными условиями:

$$u(0,t) = \mu_1(t) = 10; \quad u(1,t) = \mu_1(t) = 20, \quad t \in [0;0{,}15]$$

на сетке с шагом h по x, равным 0,1.

Число разбиений по оси x определяется из шага $n = \frac{l}{h} = \frac{1}{0{,}1} = 10.$

Из данной постановки задачи следует, что в начальный момент времени распределение температуры по длине стержня $u(x,0)$ имеет следующий вид



В ходе решения требуется слой за слоем вычислить значения функции u во внутренних узлах сетки (*рисунок 1*), показывающие, как изменяется распределение температуры по длине стержня с течением времени.

Для вычисления искомой функции (температуры) на каждом временном слое используем явную разностную схему

$$u_i^* = (1-2\lambda)u_i + \lambda(u_{i+1} + u_{i-1}),$$

где $u_i = u_{i,j}, u_{i-1} = u_{i-1,j}, u_{i+1} = u_{i+1,j}$ - значения сеточной функции на текущем j-м временном слое,

а $u_i^* = u_{i,j+1}$ - вычисляемое значение сеточной функции на последующем $(j+1)$-м слое.

Исходными данными для расчета являются: l – длина области решения по направлению x; n – количество шагов сетки по x; T – граничное значение по направлению времени t. Шаг по времени τ вычисляется через шаг по длине исходя из условия обеспечения устойчивости явной схемы $\tau = \frac{h^2}{3}$ или $\lambda = \frac{1}{3}$. Также должны быть заданы функциональные зависимости $F(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, определяющие начальные и граничные условия задачи.

Блок-схема алгоритма численного решения представлена на *рисунке 3*.

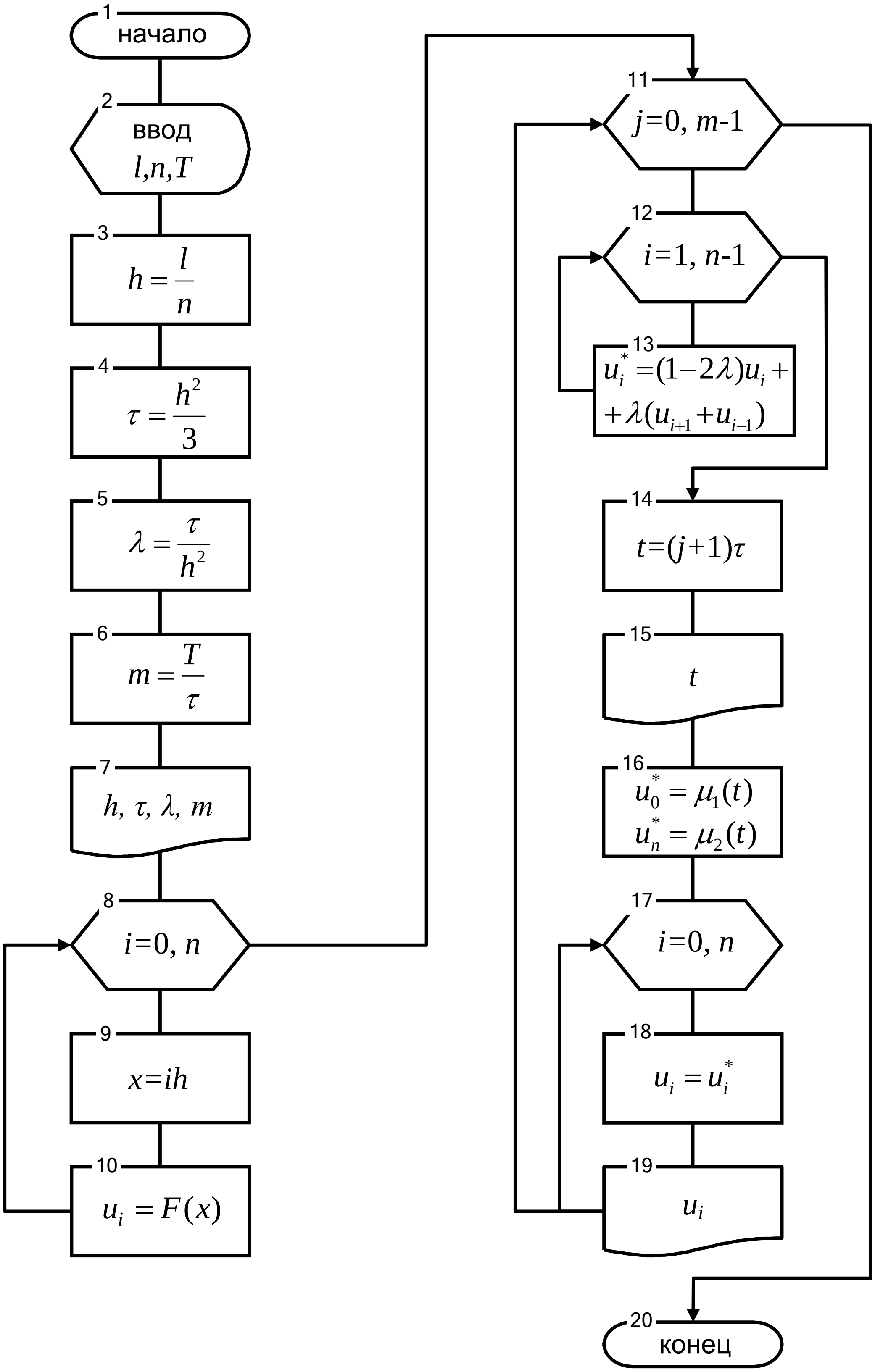


Рисунок 3 - Алгоритм решения уравнения теплопроводности

<u>Пояснения к схеме алгоритма</u>

Блок 2 – ввод исходных данных.

Блоки 3, 4 – вычисление шагов сетки по осям.

Блок 6 – вычисление числа шагов по времени.

Блоки 8…10 – вычисление начальных значений с помощью функции $F(x)$ (может быть составной, например, состоять из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$).

Блок 11 – задание счетчика цикла по времени.

Блоки 12…13 – вычисление значений искомой функции u на расчетном $(j+1)$ временном слое по явной схеме.

Блоки 14…15 – вычисление и вывод времени t расчетного слоя.

Блок 16 – вычисление граничных значений расчетного слоя.

Блоки 17…19 – переобозначение и вывод вычисленных значений искомой функции u на расчетном временном слое.

Описанный алгоритм решения задачи реализован в виде программы на языке Паскаль.

```
program teplo;
var a,b,c,d,h,x,l,r,t,tk,v:real; i,j,n,m:integer;
u :array [0..1000] of real;
u1:array [0..1000] of real;
function f1(x:real):real;
begin
f1:=10-20*x;             {формула функции  f1(x)}
end;
function f2(x:real):real;
begin
f2:=40*x-20;             {формула функции  f2(x)}
end;
BEGIN
writeln('ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА');
writeln('ЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ');
writeln;
write('Введите длину стержня L '); readln(L);
write('Введите число шагов N по оси x '); readln(n);
write('Введите границу по времени T '); readln(tk);
H:=L/n;
```

```
t:=sqr(H)/3;
r:=t/sqr(H);
m:=trunc(tk/t);
writeln('Шаг по длине H= ',H:4:2);
writeln('Шаг по времени t= ',t:5:4);
writeln('Число временных слоев m= ',m);
write('Введите число A '); readln(a);
write('Введите число B '); readln(b);
write('Введите число C '); readln(c);
write('Введите число D '); readln(d); {варианты с 11 по 30}
for i:=0 to n do
begin
x:=i*H;
if x<c then u[i]:=f1(x) else u[i]:=f2(x) {начальное условие}
end;
writeln('Температура на нулевом слое:');
for i:=0 to n do
write(' u(',i,')=',u[i]:5:2);
writeln;
writeln('Результат вычисления температуры по слоям:');
for j:=0 to m-1 do
begin
for i:=1 to n-1 do
u1[i]:=u[i]*(1-2*r)+r*(u[i+1]+u[i-1]);
v:=(j+1)*t;
writeln('слой ',j+1,', время V=',v:5:4);
u1[0]:=a; u1[n]:=b;  {граничные условия}
for i:=0 to n do
begin
u[i]:=u1[i];
write(' u(',i,')=',u[i]:5:2);
end;
writeln;
end;
END.
```

Перед началом расчета по программе необходимо:

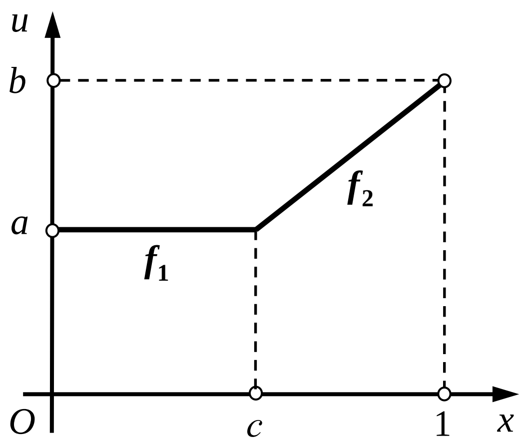
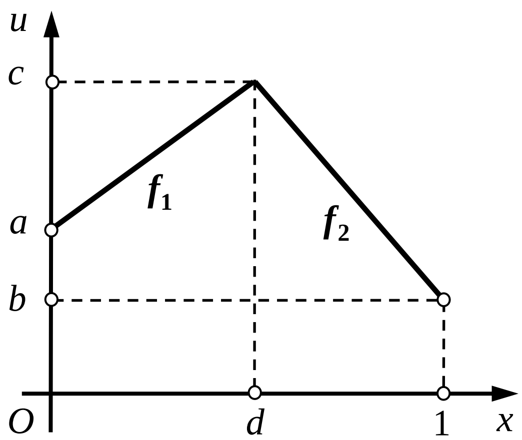
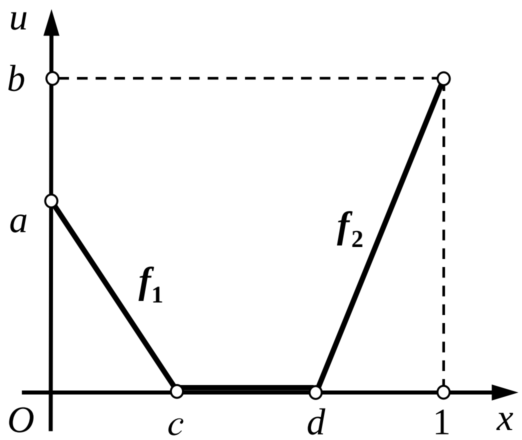
1) задать начальное условие $F(x)$ (функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и алгоритм вычисления);
2) задать граничные условия $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$;
3) определить необходимые фактические значения входных параметров: l – длина стержня; n – число шагов по x; T – граница по времени; a, b, c, d – параметры начального и граничных условий.

В результате расчета для рассматриваемого примера получим следующее распределение температуры (показана часть результатов):

```
Введите длину стержня L 1
Введите число шагов N по оси x 10
Введите границу по времени T 0.15
Шаг по длине H= 0.10
Шаг по времени t= 0.0033
Число временных слоев m= 44
Введите число A 10
Введите число B 20
Введите число C 0.5
Введите число D 0
Температура на нулевом слое:
 u(0)=10.00 u(1)= 8.00 u(2)= 6.00 u(3)= 4.00 u(4)= 2.00 u(5)= 0.00
 u(6)= 4.00 u(7)= 8.00 u(8)=12.00 u(9)=16.00 u(10)=20.00
Результат вычисления температуры по слоям:
слой 1, время V=0.0033
 u(0)=10.00 u(1)= 8.00 u(2)= 6.00 u(3)= 4.00 u(4)= 2.00 u(5)= 2.00
 u(6)= 4.00 u(7)= 8.00 u(8)=12.00 u(9)=16.00 u(10)=20.00
слой 2, время V=0.0067
 u(0)=10.00 u(1)= 8.00 u(2)= 6.00 u(3)= 4.00 u(4)= 2.67 u(5)= 2.67
 u(6)= 4.67 u(7)= 8.00 u(8)=12.00 u(9)=16.00 u(10)=20.00
слой 3, время V=0.0100
 u(0)=10.00 u(1)= 8.00 u(2)= 6.00 u(3)= 4.22 u(4)= 3.11 u(5)= 3.33
 u(6)= 5.11 u(7)= 8.22 u(8)=12.00 u(9)=16.00 u(10)=20.00
слой 4, время V=0.0133
 u(0)=10.00 u(1)= 8.00 u(2)= 6.07 u(3)= 4.44 u(4)= 3.56 u(5)= 3.85
 u(6)= 5.56 u(7)= 8.44 u(8)=12.07 u(9)=16.00 u(10)=20.00
слой 5, время V=0.0167
 u(0)=10.00 u(1)= 8.02 u(2)= 6.17 u(3)= 4.69 u(4)= 3.95 u(5)= 4.32
 u(6)= 5.95 u(7)= 8.69 u(8)=12.17 u(9)=16.02 u(10)=20.00
слой 6, время V=0.0200
 u(0)=10.00 u(1)= 8.07 u(2)= 6.30 u(3)= 4.94 u(4)= 4.32 u(5)= 4.74
 u(6)= 6.32 u(7)= 8.94 u(8)=12.30 u(9)=16.07 u(10)=20.00
слой 7, время V=0.0233
 u(0)=10.00 u(1)= 8.12 u(2)= 6.43 u(3)= 5.19 u(4)= 4.67 u(5)= 5.13
 u(6)= 6.67 u(7)= 9.19 u(8)=12.43 u(9)=16.12 u(10)=20.00
слой 8, время V=0.0267
 u(0)=10.00 u(1)= 8.18 u(2)= 6.58 u(3)= 5.43 u(4)= 4.99 u(5)= 5.49
 u(6)= 6.99 u(7)= 9.43 u(8)=12.58 u(9)=16.18 u(10)=20.00
слой 9, время V=0.0300
 u(0)=10.00 u(1)= 8.25 u(2)= 6.73 u(3)= 5.67 u(4)= 5.30 u(5)= 5.82
 u(6)= 7.30 u(7)= 9.67 u(8)=12.73 u(9)=16.25 u(10)=20.00
слой 10, время V=0.0333
 u(0)=10.00 u(1)= 8.33 u(2)= 6.88 u(3)= 5.90 u(4)= 5.60 u(5)= 6.14
 u(6)= 7.60 u(7)= 9.90 u(8)=12.88 u(9)=16.33 u(10)=20.00
слой 11, время V=0.0367
 u(0)=10.00 u(1)= 8.40 u(2)= 7.04 u(3)= 6.13 u(4)= 5.88 u(5)= 6.45
 u(6)= 7.88 u(7)=10.13 u(8)=13.04 u(9)=16.40 u(10)=20.00
слой 12, время V=0.0400
 u(0)=10.00 u(1)= 8.48 u(2)= 7.19 u(3)= 6.35 u(4)= 6.15 u(5)= 6.74
 u(6)= 8.15 u(7)=10.35 u(8)=13.19 u(9)=16.48 u(10)=20.00
слой 13, время V=0.0433
 u(0)=10.00 u(1)= 8.56 u(2)= 7.34 u(3)= 6.56 u(4)= 6.41 u(5)= 7.01
 u(6)= 8.41 u(7)=10.56 u(8)=13.34 u(9)=16.56 u(10)=20.00
слой 14, время V=0.0467
 u(0)=10.00 u(1)= 8.63 u(2)= 7.49 u(3)= 6.77 u(4)= 6.66 u(5)= 7.28
 u(6)= 8.66 u(7)=10.77 u(8)=13.49 u(9)=16.63 u(10)=20.00
```

4 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальным условием $u(x,0) = F(x)$, граничными условиями $u(0,t) = a$, $u(1,t) = b$ в области $G = \{0 \le x \le 1,\ 0 < t < 0{,}15\}$ на сетке с шагом h по x, равным 0,1.

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>F(x)</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="10">
</td><td>10</td><td>30</td><td>0,70</td><td rowspan="10"></td></tr>
<tr><td>2</td><td>12</td><td>35</td><td>0,65</td></tr>
<tr><td>3</td><td>14</td><td>40</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td><td>45</td><td>0,55</td></tr>
<tr><td>5</td><td>18</td><td>50</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>6</td><td>20</td><td>55</td><td>0,70</td></tr>
<tr><td>7</td><td>22</td><td>60</td><td>0,65</td></tr>
<tr><td>8</td><td>24</td><td>65</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td>9</td><td>26</td><td>70</td><td>0,55</td></tr>
<tr><td>10</td><td>28</td><td>75</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="10">
</td><td>8</td><td>4</td><td>18</td><td>0,30</td></tr>
<tr><td>12</td><td>10</td><td>6</td><td>20</td><td>0,35</td></tr>
<tr><td>13</td><td>12</td><td>8</td><td>22</td><td>0,40</td></tr>
<tr><td>14</td><td>14</td><td>10</td><td>24</td><td>0,45</td></tr>
<tr><td>15</td><td>16</td><td>12</td><td>26</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>16</td><td>18</td><td>14</td><td>28</td><td>0,55</td></tr>
<tr><td>17</td><td>20</td><td>12</td><td>30</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td>18</td><td>22</td><td>10</td><td>32</td><td>0,55</td></tr>
<tr><td>19</td><td>24</td><td>8</td><td>34</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>20</td><td>26</td><td>6</td><td>36</td><td>0,45</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="10">
</td><td>20</td><td>28</td><td>0,20</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>22</td><td>18</td><td>26</td><td>0,25</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>23</td><td>16</td><td>24</td><td>0,30</td><td>0,65</td></tr>
<tr><td>24</td><td>14</td><td>22</td><td>0,35</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td>25</td><td>12</td><td>20</td><td>0,30</td><td>0,55</td></tr>
<tr><td>26</td><td>10</td><td>18</td><td>0,25</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>27</td><td>9</td><td>16</td><td>0,20</td><td>0,45</td></tr>
<tr><td>28</td><td>8</td><td>15</td><td>0,40</td><td>0,65</td></tr>
<tr><td>29</td><td>7</td><td>14</td><td>0,45</td><td>0,70</td></tr>
<tr><td>30</td><td>6</td><td>12</td><td>0,50</td><td>0,75</td></tr>
</table>

5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Ознакомиться с теорией численного решения уравнения теплопроводности методом сеток. Разобрать приведенный пример решения.

Составить и ввести в компьютер программу на алгоритмическом языке, реализующую явную схему решения задачи.

Настроить программу в соответствии с вариантом задания:

а) Вычислить коэффициенты формул прямых, входящих в условие $F(x)$.

Варианты 1-10: $f_1(x) = a$; $f_2(x) = \left(\dfrac{b-a}{1-c}\right)x - \left(\dfrac{bc-a}{1-c}\right)$.

Варианты 11-20: $f_1(x) = \left(\dfrac{c-a}{d}\right)x + a$; $f_2(x) = \left(\dfrac{b-c}{1-d}\right)x + \left(\dfrac{c-bd}{1-d}\right)$.

Варианты 21-30: $f_1(x) = a - \dfrac{a}{c}x$; $f_2(x) = \left(\dfrac{b}{1-d}\right)x - \left(\dfrac{bd}{1-d}\right)$.

Записать полученные формулы прямых в программу.

б) Записать в программу алгоритм вычисления начального условия.

Варианты 1-10: **`if x<c then u[i]:=f1(x) else u[i]:=f2(x)`**.

Варианты 11-20: **`if x<d then u[i]:=f1(x) else u[i]:=f2(x)`**.

Варианты 21-30: **`if x<c then u[i]:=f1(x) else if x>d then u[i]:=f2(x) else u[i]:=0`**.

в) Записать в программу граничные условия.

Подготовить исходные данные (*l, n, T, a, b, c, d*) в соответствии с вариантом задания и выполнить расчет по программе.

6 ОТЧЕТНОСТЬ

Лабораторная работа засчитывается по представлении студентом аккуратно оформленного отчета и при умении применять на практике численные методы решения задачи теплопроводности для параболического дифференциального уравнения.

Отчет выполняется на компьютере и должен содержать: титульный лист с названием лабораторной работы, цель работы, краткие сведения из теории, текст задания по варианту, схему алгоритма для явной разностной схемы, текст программы на алгоритмическом языке, результаты расчета по программе.

7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 В чем состоит идея сеточных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений?

2 Что означает разностная аппроксимация дифференциального уравнения?

3 Способы аппроксимации частных производных первого и второго порядка.

4 Что означает устойчивость разностной схемы?

5 Суть явной и неявной схемы для разностного уравнения теплопроводности. Преимущества и недостатки этих схем.

СОДЕРЖАНИЕ