**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

***УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:***

«РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИЙ»

**Уфа
2013**

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является приобретение студентами умения приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов матриц.

2 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Целый ряд инженерных задач сводится к рассмотрению систем уравнений, имеющих единственное решение лишь в том случае, если известно значение некоторого входящего в них параметра. Этот особый параметр называется характеристическим, или собственным, значением системы. С задачами на собственные значения инженер сталкивается в различных ситуациях. Так, в теории напряженного состояния тела, для тензоров напряжений собственные значения определяют главные нормальные напряжения, а собственными векторами задаются направления, связанные с этими значениями. При динамическом анализе механических систем собственные значения соответствуют собственным частотам колебаний, а собственные векторы характеризуют модули этих колебаний. При расчете конструкций на прочность собственные значения позволяют определить критические нагрузки, превышение которых приводит к потере устойчивости.

Выбор наиболее эффективного метода определения собственных значений или собственных векторов для данной инженерной задачи зависит от типа уравнений и числа искомых собственных значений.

Алгоритмы решения задач на собственные значения делятся на две группы.

- Итерационные методы – они очень удобны и хорошо приспособлены для определения наименьшего и наибольшего собственных значений.
- Методы преобразования подобия – они сложнее, но позволяют определить все собственные значения и собственные векторы.

2.1 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЧНОГО И ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В общем виде задача на собственные значения формулируется следующим образом:

$$\boldsymbol{AX} = \lambda \boldsymbol{X},$$

где $\boldsymbol{A}$ - матрица размерности $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$.

Требуется найти $\boldsymbol{n}$ скалярных значений λ и собственные векторы $\boldsymbol{X}$, соответствующие каждому из собственных значений.

2.1.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1 Матрица $\boldsymbol{A}$ называется симметричной, если

$$a_{ij} = a_{ji}, \text{ где } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует симметрия относительно диагонали

$$a_{kk}, \text{ где } k = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

является примером симметрии.

2 Матрица $\boldsymbol{A}$ называется ортогональной, если

$$A^T A = E,$$

где A^T - транспонированная матрица $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{E}$ - единичная матрица.

Очевидно, что матрица, обратная ортогональной, эквивалентна транспонированной.

3 Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются подобными, если существует такая несингулярная матрица $\boldsymbol{P}$, что справедливо соотношение

$$B = P^{-1} A P.$$

2.1.2 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1 Все $\boldsymbol{n}$ собственных значений симметричной матрицы размерности $n \times n$, состоящей из действительных чисел, действительные. Это полезно помнить, так как матрицы, встречающиеся в инженерных расчетах, часто бывают симметричными.

2 Если собственные значения матрицы различны, то ее собственные векторы ортогональны. Совокупность $\boldsymbol{n}$ линейно независимых собственных векторов образует базис рассматриваемого пространства. Следовательно, для совокупности линейно независимых собственных векторов

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{i}}, \quad \boldsymbol{i} = 1, \ldots, \boldsymbol{n}$$

любой произвольный вектор в том же пространстве можно выразить через собственные векторы. Таким образом,

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{i}}.$$

3 Если две матрицы подобны, то их собственные значения совпадают. Из подобия матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ следует, что

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$

Так как

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X},$$

то

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

Если принять $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$, то

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \lambda \boldsymbol{Y},$$

а

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = \lambda \boldsymbol{Y}.$$

Таким образом, матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не только имеют одинаковые собственные значения, но и их собственные векторы связаны соотношением

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}.$$

4 Умножив собственный вектор матрицы на скаляр, получим собственный вектор той же матрицы. Обычно все собственные векторы нормируют, разделив каждый элемент собственного вектора либо на его наибольший элемент, либо на сумму квадратов всех других элементов.

2.2 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Очевидным способом решения задачи на собственные значения является их определение из системы уравнений

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0},$$

которая имеет ненулевое решение лишь в случае, если $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$. Раскрыв определитель, получим многочлен n-й степени относительно λ, корни которого и будут собственными значениями матрицы. Для определения корней можно воспользоваться любым из методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений. К сожалению, в задачах на собственные значения часто встречаются кратные корни. Так как итерационные методы в этих случаях не гарантируют получение решения, то для определения собственных значений следует пользоваться другими методами.

2.2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

На рисунке 1 показана блок-схема простейшего итерационного метода отыскания наибольшего собственного значения системы

$$\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}.$$

Процедура начинается с пробного нормированного вектора $\boldsymbol{X}^{(0)}$. Этот вектор умножается слева на матрицу $\boldsymbol{A}$ и результат приравнивается произведению постоянной (собственное значение) и нормированного вектора $\boldsymbol{X}^{(1)}$. Если вектор $\boldsymbol{X}^{(1)}$ совпадает с вектором $\boldsymbol{X}^{(0)}$ в пределах заданной погрешности ε, то счет прекращается. В противном случае новый нормированный вектор используется в качестве исходного и вся процедура повторяется. Если процесс сходится, то постоянный множитель соответствует истинному наибольшему собственному значению, а нормированный вектор - соответствующему собственному вектору. Быстрота сходимости этого итерационного процесса зависит от того, насколько удачно выбран начальный вектор. Если он близок к истинному собственному вектору, то итерации сходятся очень быстро. На быстроту сходимости влияет также и отношение величин двух наибольших собственных значений. Если это отношение близко к единице, то сходимость оказывается медленной.

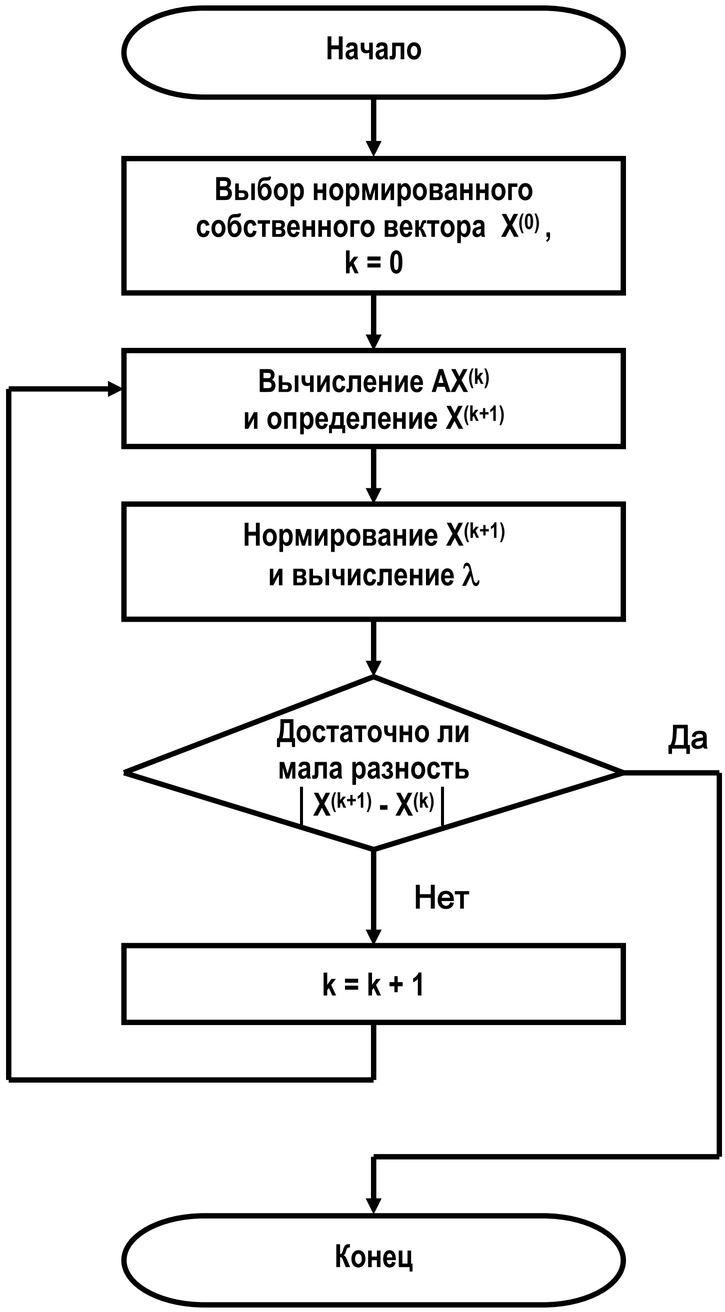

Рисунок 1 - Блок-схема алгоритма итерационного метода решения задач на собственные значения

2.2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИМЕНЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Если умножить исходную систему $\boldsymbol{AX = \lambda X}$ на матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$, обратную А, получим

$$\boldsymbol{A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X} \text{ или } \boldsymbol{1/\lambda X = A^{-1}X}.$$

Обозначим $\mathbf{1/\lambda = s}$.

Тогда

$$\boldsymbol{A^{-1}X = sX}.$$

Для данной матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$ находим наибольшее собственное значение $\boldsymbol{s}$ методом итераций. Тогда наименьшее собственное значение исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ будет $\boldsymbol{\lambda = 1/s}$.

3 ЗАДАНИЯ К РАБОТЕ

Для тензора напряжений A определить наибольшее главное напряжение (наибольшее собственное значение) и соответствующий собственный вектор методом итераций с погрешностью $\varepsilon = 0{,}0001$. Ед. измерения [$\times 10^7$ Н/м^2].

1 $A = \begin{vmatrix} 2{,}1 & 1 & 1{,}1 \\ 1 & 2{,}6 & 1{,}1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 3{,}1 \end{vmatrix}$

2 $A = \begin{vmatrix} 1{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1{,}5 \end{vmatrix}$

3 $A = \begin{vmatrix} 2{,}4 & 1 & 1{,}4 \\ 1 & 2{,}9 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1{,}4 & 3{,}4 \end{vmatrix}$

4 $A = \begin{vmatrix} 2{,}7 & 1 & 1{,}7 \\ 1 & 3{,}2 & 1{,}7 \\ 1{,}7 & 1{,}7 & 3{,}7 \end{vmatrix}$

5 $A = \begin{vmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}3 \end{vmatrix}$

6 $A = \begin{vmatrix} 1{,}4 & 1{,}2 & -1{,}3 \\ 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ -1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

7 $A = \begin{vmatrix} 1{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 1{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}6 \end{vmatrix}$

8 $A = \begin{vmatrix} 3{,}2 & 1 & 2{,}2 \\ 1 & 3{,}7 & 2{,}2 \\ 2{,}2 & 2{,}2 & 4{,}2 \end{vmatrix}$

9 $A = \begin{vmatrix} 2{,}2 & 1 & 1{,}2 \\ 1 & 2{,}7 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 3{,}2 \end{vmatrix}$

10 $A = \begin{vmatrix} 2{,}8 & 1 & 1{,}8 \\ 1 & 3{,}3 & 1{,}8 \\ 1{,}8 & 1{,}8 & 3{,}8 \end{vmatrix}$

11 $A = \begin{vmatrix} 2{,}5 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 3 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 3{,}5 \end{vmatrix}$

12 $A = \begin{vmatrix} 2{,}4 & 1{,}2 & -0{,}3 \\ 1{,}2 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ -0{,}3 & 1{,}4 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

13 $A = \begin{vmatrix} 1{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 1{,}4 \end{vmatrix}$

14 $A = \begin{vmatrix} 1{,}6 & 1{,}2 & -1{,}1 \\ 1{,}2 & 1{,}1 & 0{,}6 \\ -1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

15 $A = \begin{vmatrix} 1{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 1{,}7 \end{vmatrix}$ 16 $A = \begin{vmatrix} 3{,}3 & 1 & 2{,}3 \\ 1 & 3{,}8 & 2{,}3 \\ 2{,}3 & 2{,}3 & 4{,}3 \end{vmatrix}$

17 $A = \begin{vmatrix} 2{,}3 & 1 & 1{,}3 \\ 1 & 2{,}8 & 1{,}3 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 3{,}3 \end{vmatrix}$ 18 $A = \begin{vmatrix} 2{,}9 & 1 & 1{,}9 \\ 1 & 3{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 1{,}9 & 3{,}9 \end{vmatrix}$

19 $A = \begin{vmatrix} 2{,}6 & 1 & 1{,}6 \\ 1 & 3{,}1 & 1{,}6 \\ 1{,}6 & 1{,}6 & 3{,}6 \end{vmatrix}$ 20 $A = \begin{vmatrix} 2{,}6 & 1{,}2 & -0{,}1 \\ 1{,}2 & 2{,}1 & 1{,}6 \\ -0{,}1 & 1{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

21 $A = \begin{vmatrix} 3{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 1 & 4 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}5 & 4{,}5 \end{vmatrix}$ 22 $A = \begin{vmatrix} 1{,}8 & 1{,}2 & -0{,}9 \\ 1{,}2 & 1{,}3 & 0{,}8 \\ -0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

23 $A = \begin{vmatrix} 1{,}8 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}9 & 1{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}3 & 1{,}8 \end{vmatrix}$ 24 $A = \begin{vmatrix} 3{,}4 & 1 & 2{,}4 \\ 1 & 3{,}9 & 2{,}4 \\ 2{,}4 & 2{,}4 & 4{,}4 \end{vmatrix}$

25 $A = \begin{vmatrix} 3{,}1 & 1 & 2{,}1 \\ 1 & 3{,}6 & 2{,}1 \\ 2{,}1 & 2{,}1 & 4{,}1 \end{vmatrix}$ 26 $A = \begin{vmatrix} 2{,}8 & 1{,}2 & 0{,}1 \\ 1{,}2 & 2{,}3 & 1{,}8 \\ 0{,}1 & 1{,}8 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

27 $A = \begin{vmatrix} 2 & 1{,}2 & -0{,}7 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 1 \\ -0{,}7 & 1 & 0{,}8 \end{vmatrix}$ 28 $A = \begin{vmatrix} 2{,}2 & 1{,}2 & -0{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}7 & 1{,}2 \\ -0{,}5 & 1{,}2 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

29 $A = \begin{vmatrix} 1{,}6 & 2{,}3 & -0{,}5 \\ 2{,}3 & 2 & 1{,}2 \\ -0{,}5 & 1{,}2 & 0{,}6 \end{vmatrix}$ 30 $A = \begin{vmatrix} 2{,}4 & 1{,}2 & 2{,}5 \\ 1{,}2 & 3{,}5 & 1{,}4 \\ 2{,}5 & 1{,}4 & 4{,}2 \end{vmatrix}$

4 РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА

Исследуем трехосное напряженное состояние элемента тела (конструкции), представленного на рисунке 2. Матрица напряжений для него имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 3 \end{vmatrix} \times 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

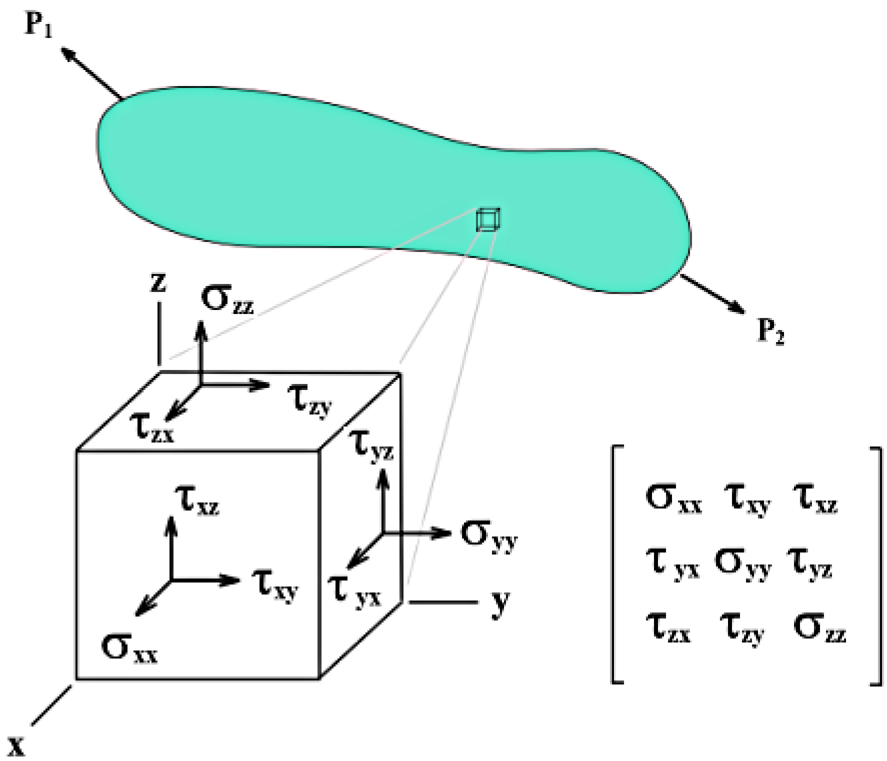

Рисунок 2 - Трехосное напряженное состояние элемента тела и соответствующий тензор напряжений

Если исходить из того, что разрушение тела произойдет при максимальном напряжении, то необходимо знать величину наибольшего главного напряжения, которое соответствует наибольшему собственному значению матрицы напряжений. Для нахождения этого напряжения воспользуемся методом итераций. Ниже приведена программа на языке Паскаль, с помощью которой итерационная процедура осуществляется до тех пор, пока разность между собственными значениями, вычисленными в последовательных итерациях, не станет меньше заданной погрешности ε.

```
program eigenvalue;
var L,S,E:real;
i,j,k:integer;
a:array [1..3,1..3] of real;
x,r:array [1..3] of real;
label lb;
BEGIN
writeln('ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА');
writeln('ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ
МАТРИЦЫ');
```

```
writeln;
writeln('Введите значения элементов матрицы:');
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 3 do
begin
write('A(',i,',',j,')= ');
readln(a[i,j]);
end;
write('Введите заданную погрешность расчета E ');
readln(E);
writeln;
writeln('Итерации:');
x[1]:=1; x[2]:=0; x[3]:=0;
k:=0; S:=0;
lb: k:=k+1;
for i:=1 to 3 do
begin
r[i]:=0;
for j:=1 to 3 do
r[i]:=r[i]+a[i,j]*x[j];
end;
for i:=1 to 3 do
x[i]:=r[i];
L:=x[1];
for i:=2 to 3 do
if x[i]>L then L:=x[i];
for i:=1 to 3 do
x[i]:=x[i]/L;
writeln('k=',k,' L=',L:7:5,' x(1)=',x[1]:8:6,'
x(2)=',x[2]:8:6,
' x(3)=',x[3]:8:6);
if abs(L-S)>E then
begin S:=L; goto lb; end;
writeln;
writeln('Результаты вычисления:');
writeln('Наибольшее собственное значение L=',L:8:6);
writeln('Собст. вектор X');
writeln(' x(1)=',x[1]:8:6);
writeln(' x(2)=',x[2]:8:6);
writeln(' x(3)=',x[3]:8:6);
writeln('Число итераций K=',k);
writeln;
END.
```

Результаты расчета по программе получаем в следующем виде

```
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Введите значения элементов матрицы:
A(1,1)= 1
A(1,2)= 0.5
A(1,3)= 0.6
A(2,1)= 0.5
A(2,2)= 2
A(2,3)= 0.4
A(3,1)= 0.6
A(3,2)= 0.4
A(3,3)= 3
Введите заданную погрешность расчета E 0.0001

Итерации:
k=1 L=1.00000 x(1)=1.000000 x(2)=0.500000 x(3)=0.600000
k=2 L=2.60000 x(1)=0.619231 x(2)=0.669231 x(3)=1.000000
k=3 L=3.63923 x(1)=0.426971 x(2)=0.562777 x(3)=1.000000
k=4 L=3.48129 x(1)=0.375826 x(2)=0.499539 x(3)=1.000000
k=5 L=3.42531 x(1)=0.357805 x(2)=0.463313 x(3)=1.000000
k=6 L=3.40001 x(1)=0.349841 x(2)=0.442801 x(3)=1.000000
k=7 L=3.38703 x(1)=0.345802 x(2)=0.431211 x(3)=1.000000
k=8 L=3.37997 x(1)=0.343615 x(2)=0.424656 x(3)=1.000000
k=9 L=3.37603 x(1)=0.342397 x(2)=0.420944 x(3)=1.000000
k=10 L=3.37382 x(1)=0.341711 x(2)=0.418839 x(3)=1.000000
k=11 L=3.37256 x(1)=0.341322 x(2)=0.417645 x(3)=1.000000
k=12 L=3.37185 x(1)=0.341102 x(2)=0.416967 x(3)=1.000000
k=13 L=3.37145 x(1)=0.340977 x(2)=0.416582 x(3)=1.000000
k=14 L=3.37122 x(1)=0.340906 x(2)=0.416364 x(3)=1.000000
k=15 L=3.37109 x(1)=0.340865 x(2)=0.416239 x(3)=1.000000
k=16 L=3.37101 x(1)=0.340842 x(2)=0.416169 x(3)=1.000000

Результаты вычисления:
Наибольшее собственное значение L=3.371015
Собст. вектор X
 x(1)=0.340842
 x(2)=0.416169
 x(3)=1.000000
Число итераций K=16
```

5 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Ознакомиться с теорией приближенных вычислений собственных значений и собственных векторов матрицы. Разобрать приведенный пример расчета наибольшего собственного значения и соответствующего собственного вектора.

Составить и ввести в компьютер программу на алгоритмическом языке, реализующую метод итераций для расчета собственных значений и собственных векторов матрицы.

Выполнить расчет по программе для варианта задания, указанного преподавателем.

6 ОТЧЕТНОСТЬ

Лабораторная работа засчитывается по представлении студентом аккуратно оформленного отчета и при умении применять на практике приближенные вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы.

Отчет выполняется на компьютере и должен содержать: титульный лист с названием лабораторной работы, цель работы, краткие сведения из теории, текст задания по варианту, схему алгоритма метода итераций, текст программы на алгоритмическом языке, результаты расчета по программе.

7 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Какие существуют алгоритмы решения задач на собственные значения?

2 Назовите основные свойства собственных значений.

3 В чем заключается итерационный метод определения наибольшего собственного значения и соответствующего собственного вектора?

4 От чего зависит быстрота сходимости итерационного процесса?

5 Как определить наименьшее собственное значение, используя итерационный метод?

6 В каких инженерных задачах используются собственные значения матриц?

СОДЕРЖАНИЕ

1 Цель работы 1
2 Краткие сведения из теории 1
2.1 Некоторые сведения из теории матричного и векторного исчисления 1
2.1.1 Основные определения матричного исчисления 2
2.1.2 Основные свойства собственных значений 2
2.2 Итерационные методы решения 4
2.2.1 Определение наибольшего собственного значения и собственного вектора матрицы методом итераций........ 4
2.2.2 Определение наименьшего собственного значения методом итераций 5
3 Задания к работе 6
4 Решение примера 7
5 Порядок выполнения работы 10
6 Отчетность 11
7 Контрольные вопросы 11