МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ
НА ТЕМУ

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ) СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ»

Уфа

Издательство УГНТУ

2015

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является приобретение студентами умения применять метод конечных элементов для расчета напряженного состояния стержневой системы.

2 СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Метод конечных элементов (МКЭ) для описания сплошных сред широко применяется в различных областях техники. МКЭ – основной численный метод для решения на компьютере прикладных задач механики сложных конструкций. В строительной механике МКЭ используется для исследования напряженного состояния конструкций сложной геометрической формы. В основе МКЭ лежит универсальный подход, заключающийся в представлении геометрии любого деформируемого тела в виде совокупности элементов простейшей формы: одномерных, двумерных (треугольного, четырехугольного и др.) или пространственных (*рисунок 1*).

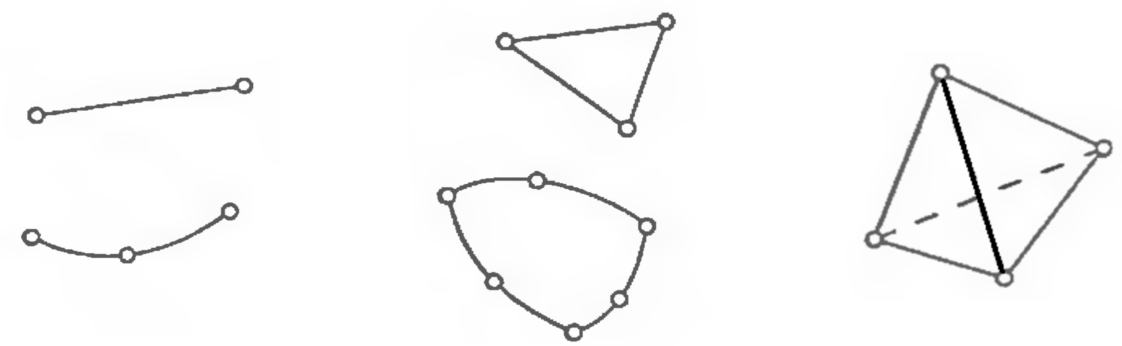

Рисунок 1 – Примеры элементов конструкций

2.1 Основные этапы МКЭ

МКЭ предполагает следующие основные этапы:

1 Разделение конструкции на малые элементы простой формы.
2 Выбор схемы интерполяции перемещений внутри элементов.
3 Определение соотношений между силами и перемещениями в узлах.
4 Вывод системы уравнений для конструкции в целом.
5 Решение полученной системы линейных уравнений относительно узловых перемещений.

1 этап

Разделение на конечные элементы (КЭ) можно выполнить разными способами, так как выбор размеров, формы и ориентации КЭ определяется тем, как проще решить поставленную задачу. Принимают, что КЭ взаимодействуют между собой только в заданных узловых точках. Узлы и сами КЭ нумеруют. Например, на *рисунке 2* показана конечно-элементная модель равномерно нагруженной симметричной пластины с центральным отверстием.

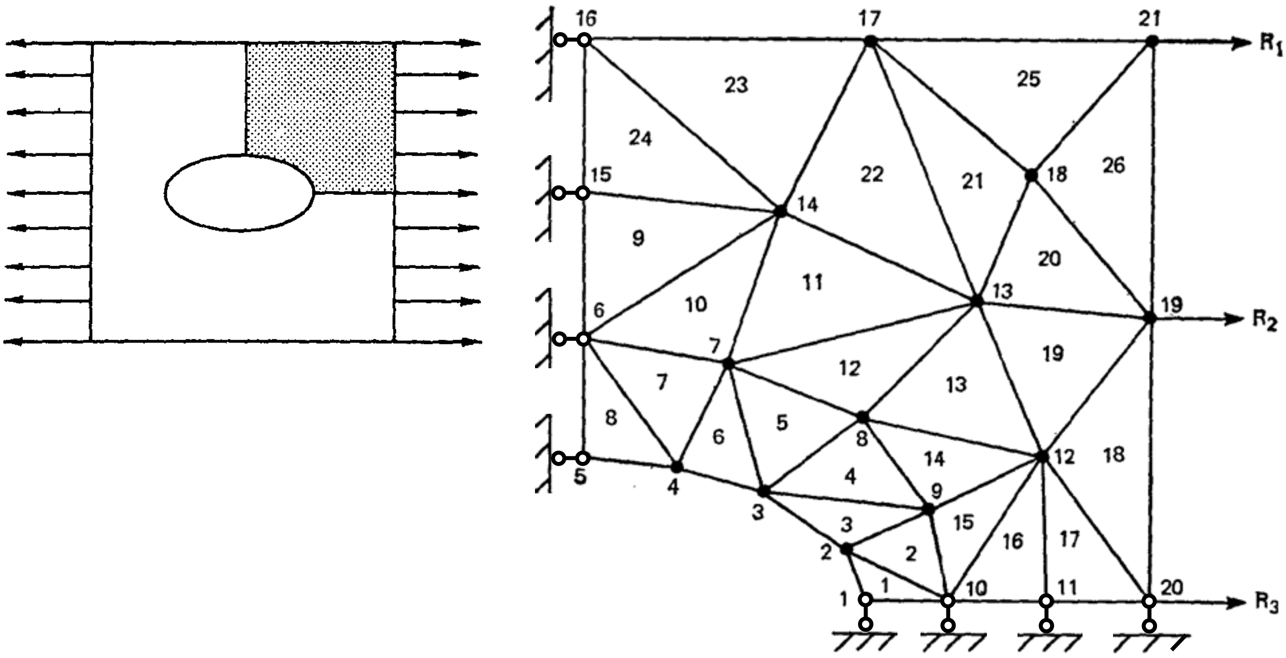

Рисунок 2 – Пример конечно-элементной модели

Основными неизвестными при расчете по МКЭ являются перемещения в узлах.

2 этап

На втором этапе применения МКЭ выбирается какая-либо простая схема интерполяции (функция формы), позволяющая выразить перемещение в любой точке внутри КЭ через узловые перемещения. Обычно функция формы для перемещения задается простым полиномом с коэффициентами, определяемыми в процессе решения.

3 этап

Для каждого КЭ определяются зависимости между узловыми силами и перемещениями. Рассмотрим, как пример, плоский треугольный КЭ (*рисунок 3*). Узлам придаются дополнительные связи. В частности, для плоской задачи достаточно двух связей, исключающих линейные перемещения. Узловые реакции и узловые перемещения определяются своими компонентами в принятой системе координат.

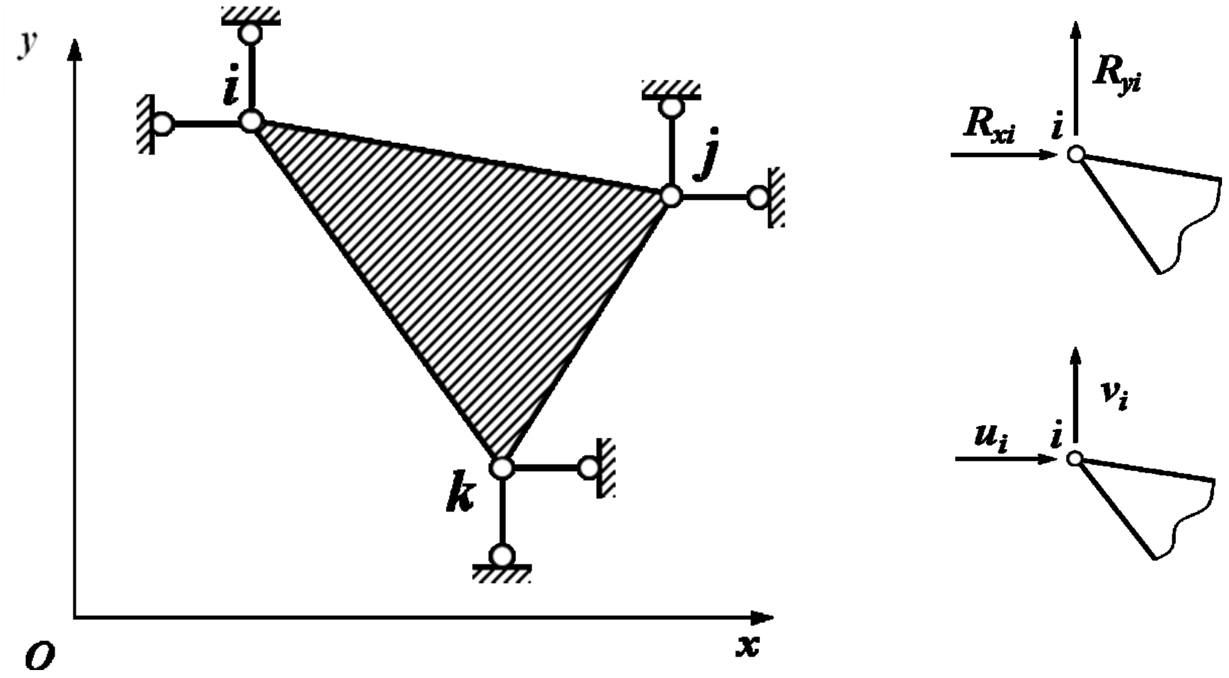

Рисунок 3 – Реакции в связях для треугольного плоского КЭ

Для упругой деформации между реакциями и перемещениями существует линейная зависимость. Например, для узла *i* реакция в направлении оси *x*.

$$R_{ix} = k_{11}u_i + k_{12}v_i + k_{13}u_j + k_{14}v_j + k_{15}u_k + k_{16}v_k,$$

где k_{ij} – коэффициенты жесткости. Такие зависимости можно записать для всех шести компонентов узловых сил

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{kx} \\ R_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}.$$

или в матричной форме

$$\{R\} = [K] \cdot \{q\},$$

где $\{R\}$ – вектор узловых реакций; $[K]$ – матрица жесткости КЭ;
$\{q\}$ – вектор узловых перемещений.

Данная система линейных уравнений отражает условия равновесия КЭ. Матрица жесткости КЭ симметричная и может быть сформирована на основе принципа возможных перемещений.

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) формулируется так. Если тело находится в равновесии и каждой его точке сообщить малое смещение $\delta\vec{u}$, допускаемое наложенными связями (возможные перемещения), то работа всех сил на возможных перемещениях равна нулю или, по-другому, приращение работы внутренних сил δU равно работе внешних сил δW на возможных перемещениях, т.е. $\delta U = \delta W$. При этом полная потенциальная энергия системы $\Pi = U - W$ минимальна, т.к.

$$\delta U - \delta W = 0; \quad \delta(U - W) = \delta \Pi = 0. \tag{1}$$

Работа внутренних сил (потенциальная энергия деформации) в области тела Ω

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega,$$

где σ и ε – функции напряжений и деформаций в области Ω.

Работа внешних сил

$$W = \int_{\Omega} pud\Omega,$$

где p и u – функции нагрузки и перемещений по области Ω.

Вариационный принцип Лагранжа позволяет получить систему уравнений равновесия исходя из условия минимума функционала полной потенциальной энергии системы. Если считать, что перемещения всех точек тела u есть известные функции узловых перемещений q_i, то из (1)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или после дифференцирования

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(q_1)}{\partial q_1} + \dfrac{\partial U(q_2)}{\partial q_1} + \ldots + \dfrac{\partial U(q_n)}{\partial q_1} = \dfrac{\partial W(q_1)}{\partial q_1}; \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial U(q_1)}{\partial q_n} + \dfrac{\partial U(q_2)}{\partial q_n} + \ldots + \dfrac{\partial U(q_n)}{\partial q_n} = \dfrac{\partial W(q_n)}{\partial q_n}. \end{cases} \tag{2}$$

Сравнивая (2) с системой равновесия КЭ $[K] \cdot \{q\} = \{R\}$ можно представить

$$\frac{\partial U(q_j)}{\partial q_i} = k_{ij} q_j;$$

$$\frac{\partial W(q_i)}{\partial q_i} = R_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где R_i - узловые нагрузки.

Коэффициент жесткости k_{ij} – это усилие, возникающее по направлению i-й связи от j-го единичного перемещения (q_j = 1) при условии, что все остальные перемещения равны нулю. Из равенства работ внутренних и внешних сил получим

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \sigma_j \varepsilon_i d\Omega .$$

4 этап

На четвертом этапе МКЭ уравнения равновесия отдельных КЭ объединяют в одну систему. При этом матрицы жесткости КЭ суммируют и получают глобальную матрицу жесткости. Получим систему линейных уравнений для всего тела (конструкции).

$$[\overline{K}] \cdot \{\overline{q}\} = \{\overline{P}\},$$

где $\{\overline{P}\}, \{\overline{q}\}$ – векторы узловых сил и перемещений всего тела;

$[\overline{K}]$ – глобальная матрица жесткости.

Матрица $[\overline{K}]$ имеет размерность $nm \times nm$, где n – число КЭ, а m – число узлов. Она симметричная и имеет ленточную структуру.

Объединенная система уравнений равновесия должна быть разрешима относительно неизвестных узловых перемещений. Для этого к ней необходимо добавить граничные условия и известные внешние нагрузки в соответствующих узлах.

5 этап

На пятом этапе полученную систему линейных уравнений решают относительно узловых перемещений одним из известных методов, например прямым методом Гаусса или итерационным методом Зейделя. На основе вычисленных узловых перемещений, используя функции формы, можно получить значения перемещений в любой точке тела. Далее, используя известные соотношения механики деформируемого твердого тела, можно найти значения деформаций и напряжений.

2.2 КЭ растянутого (сжатого) стержня

Рассмотрим стержневой КЭ с двумя узлами, нагруженный силами N_1 и N_2, работающий на растяжение-сжатие (*рисунок 4*): l - длина стержня; A – площадь поперечного сечения; γ - объемный вес материала стержня. В каждом узле одна степень свободы вдоль оси стержня. Введем обозначения: вектор узловых перемещений $\{q\} = \{u_1, u_2\}^T$; вектор узловых сил $\{P\} = \{N_1, N_2\}^T$. Верхний индекс ^{T} обозначает операцию транспонирования вектора.

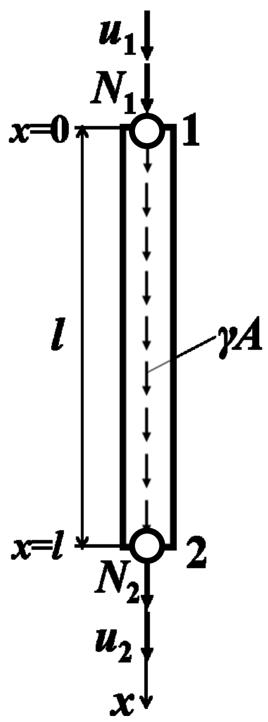

Рисунок 4 – Стержневой КЭ

Выберем функцию формы для КЭ, а именно перемещение u в произвольной точке с координатой x аппроксимируем линейной функцией

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x,$$

где α_1, α_2 – постоянные коэффициенты.
В матричной записи:

$$\{u\} = [1 \quad x] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \text{ или } \{u\} = [F] \cdot \{\alpha\},$$

где $[F] = [1 \quad x]$ - матрица базисных функций;

$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}^T$ - вектор постоянных.

Получим выражение для вектора $\{\alpha\}$:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \text{ или } \{q\} = [C] \cdot \{\alpha\},$$

где $[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}$ - матрица узловых координат.

Отсюда $\{\alpha\} = [C]^{-1} \cdot \{q\} = \dfrac{1}{l} \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{q\}$. Подставим $\{\alpha\}$ в $\{u\}$:

$$\{u\} = [F] \cdot [C]^{-1} \{q\} = [1 \quad x] \cdot \frac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{q\}.$$

Обозначим $[\Phi] = [F] \cdot [C]^{-1} = [1 \quad x] \cdot \dfrac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{l - x}{l} & \dfrac{x}{l} \end{bmatrix}$,

и тогда $\boldsymbol{\{u\} = [\Phi] \cdot \{q\}}$. $[\Phi]$ - функции формы.

Найдем выражение для деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \text{ или } \{\varepsilon_x\} = [A] \cdot [\Phi] \cdot \{q\}, \text{ где } [A] = \left[\frac{d}{dx} \right].$$

Обозначим $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\}$ и

$$[B] = [A] \cdot [\Phi] = [A] \cdot [1 \quad x] \cdot \frac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \cdot \frac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \cdot [-1 \quad 1],$$

тогда $\boldsymbol{\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{q\}} = \dfrac{1}{l} [-1 \quad 1] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{l} (u_2 - u_1)$.

Найдем выражение для напряжений:

Из закона Гука $\sigma_x = E\varepsilon_x$ имеем $\{\sigma\} = \{\sigma_x\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$, где $[D]=[E]$, E – модуль упругости материала стержня.

Тогда $\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{D}]\cdot[\boldsymbol{B}]\cdot\{\boldsymbol{q}\}$.

Из принципа возможных перемещений *получим коэффициенты жесткости и уравнения равновесия* стержневого КЭ. Работа внутренних сил равна работе внешних (нагрузки в узлах + сила тяжести)

$$\int_{V_{КЭ}}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dv=\{q\}^T\{P\}+\int_{V_{КЭ}}\{u\}^T\{\gamma\}\,dv.$$

Подставляя ранее полученные выражения

$$\{\varepsilon\}^T=\{q\}^T[B]^T,\ \{u\}^T=\{q\}^T[\Phi]^T,\ \{\sigma\}=[D]\cdot[B]\cdot\{q\},$$

получим

$$\{q\}^T\int_{V_{КЭ}}\{B\}^T\{D\}\{B\}dv\{q\}=\{q\}^T\{P\}+\{q\}^T\int_{V_{КЭ}}\{\Phi\}^T\{\gamma\}\,dv \quad \text{или}$$

$$\int_{V_{КЭ}}\{B\}^T\{D\}\{B\}dv\{q\}=\{P\}+\int_{V_{КЭ}}\{\Phi\}^T\{\gamma\}\,dv.$$

Это основное матричное уравнение КЭ $[\boldsymbol{K}]\cdot\{\boldsymbol{q}\}=\{\boldsymbol{R}\}$,

где $[K]=\int_{V_{КЭ}}[B]^T[D][B]\,dv$ - матрица жесткости;

$\{R\}=\{P\}+\int_{V_{КЭ}}\{\Phi\}^T\{\gamma\}\,dv$ - вектор обобщенных узловых сил (с учетом веса стержня).

Получим матрицу жесткости $[K]$:

Интеграл по объему заменим интегралом по длине $dv=A\cdot dx$, где A – площадь поперечного сечения стержня (A = const).

Тогда $[K]=A\int_l[B]^T[D][B]\,dx$. (3)

Ранее получили $[B]=[0\quad 1]\cdot\frac{1}{l}\cdot\begin{bmatrix} l & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{l}\cdot[-1\quad 1]$ или $[B]^T=\frac{1}{l}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$.

Подставим эти выражения в (3)

$$[K]=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}=\frac{AEl}{l^2}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}[-1\quad 1]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Вектор узловых сил $\{R\}=\begin{Bmatrix}N_1+\gamma Al/2\\ N_2+\gamma Al/2\end{Bmatrix}$.

Окончательное уравнение равновесия для стержневого КЭ:

$$\frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{l}}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u_1}\\ \boldsymbol{u_2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{N_1+\gamma Al/2}\\ \boldsymbol{N_2+\gamma Al/2}\end{Bmatrix}. \qquad (5)$$

2.3 Пример расчета стержневой системы

Рассмотрим простейшую стержневую систему, представленную на *рисунке 5а.*

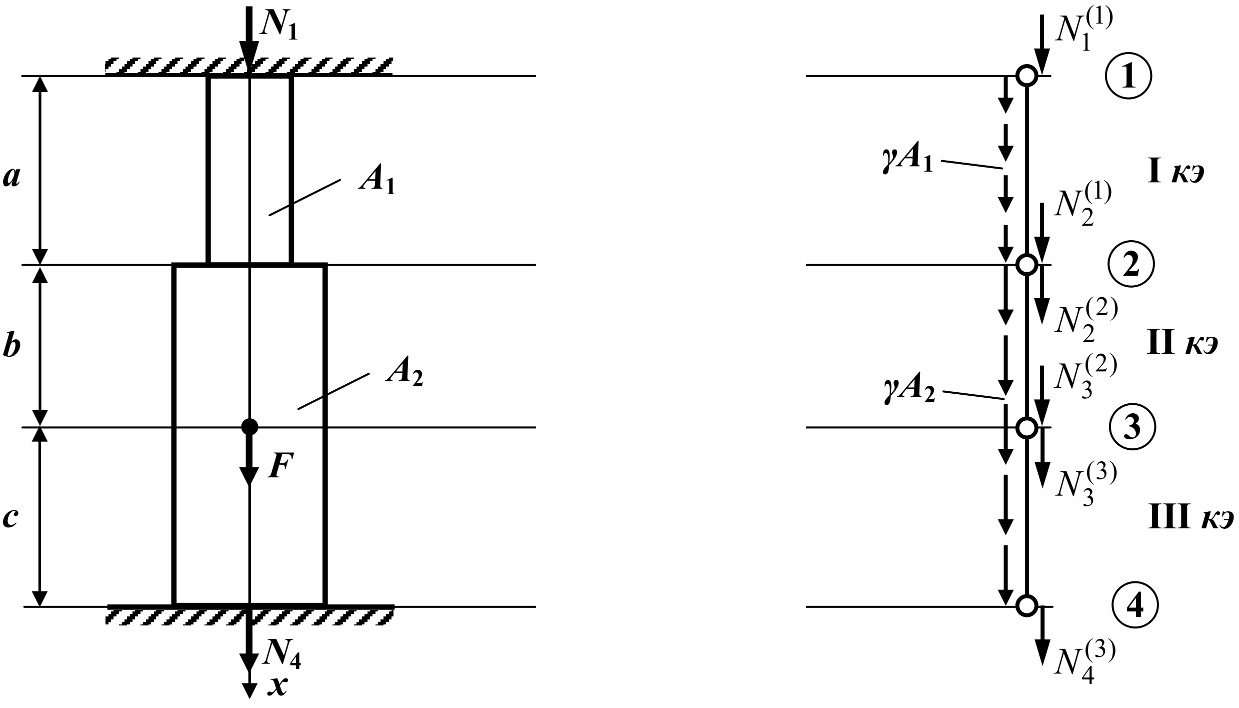

Рисунок 5 – Стержневая система

Стержень ступенчатого сечения с жестко защемленными концами нагружен силой F; A_1, A_2 – площади сечений участков стержня; γ – объемный вес материала стержня; E – модуль упругости материала.

Стержневая система находится в напряженно-деформированном состоянии. Под действием внешней нагрузки F все точки стержня, за исключением закрепленных концов, получают перемещения. Используя МКЭ, рассчитаем приближенные значения перемещений для отдельных точек, а также рассчитаем реакции, которые возникают в концевых сечениях стержня.

Исходя из постановки задачи стержневую систему удобно разбить на три стержневых КЭ длиной a, b и c (*рисунок 5б*). Введем нумерацию КЭ и четырех узлов. Также укажем действующие силы: в узле 3 приложена внешняя сила F; в узлах 1 и 4 действуют реакции закрепления N_1 и N_4, соответственно; дополнительно учтем распределенный по длине вес стержня (силу тяжести), пропорциональный площади сечения участков стержня γA_1 и γA_2.

Используя (5), запишем систему уравнений равновесия для каждого из трех КЭ. Распределенный вес приведем к узловым точкам.

Для 1 КЭ:

Уравнение равновесия $\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^{(1)} + \gamma A_1 a/2 \\ N_2^{(1)} + \gamma A_1 a/2 \end{Bmatrix}$;

матрица жесткости $K^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \dfrac{A_1 E}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Аналогично для 2 КЭ:

Уравнение равновесия $\begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_2^{(2)} + \gamma A_2 b/2 \\ N_3^{(2)} + \gamma A_2 b/2 \end{Bmatrix}$,

матрица жесткости $K^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \dfrac{A_2 E}{b} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Аналогично для 3 КЭ:

Уравнение равновесия $\begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_3^{(3)} + \gamma A_2 c/2 \\ N_4^{(3)} + \gamma A_2 c/2 \end{Bmatrix}$,

матрица жесткости $K^{(3)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = \dfrac{A_2 E}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Здесь u_1, u_2, u_3 и u_4 – узловые перемещения; $N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$, $N_2^{(2)}$, $N_3^{(2)}$, $N_3^{(3)}$, $N_4^{(3)}$ - усилия на концах каждого КЭ.

Далее уравнения равновесия отдельных КЭ объединяем в одну систему. При этом матрицы жесткости трех КЭ суммируем и получаем глобальную матрицу жесткости для всего стержня.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix},$$

где $[K]$ - глобальная матрица жесткости, $\{R\}$ - вектор обобщенных узловых сил.

При суммировании имеем

$$k_{11} = k_{11}^{(1)}, k_{12} = k_{12}^{(1)}, k_{13} = 0, k_{14} = 0,$$

$$k_{21} = k_{21}^{(1)}, k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}, k_{23} = k_{12}^{(2)}, k_{24} = 0,$$

$$k_{31} = 0, k_{32} = k_{21}^{(2)}, k_{33} = k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)}, k_{34} = k_{12}^{(3)},$$

$$k_{41} = 0, k_{42} = 0, k_{43} = k_{21}^{(3)}, k_{44} = k_{22}^{(3)}.$$

Таким образом, глобальная матрица жесткости

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{a} & -\frac{EA_1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{a} & \frac{EA_1}{a}+\frac{EA_2}{b} & -\frac{EA_2}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{b} & \frac{EA_2}{b}+\frac{EA_2}{c} & -\frac{EA_2}{c} \\ 0 & 0 & -\frac{EA_2}{c} & \frac{EA_2}{c} \end{bmatrix}.$$

Узловые силы

$$R_1 = N_1^{(1)} + \gamma A_1 a/2 = N_1 + \gamma A_1 a/2,$$

$$R_2 = N_2^{(1)} + N_2^{(2)} + \gamma A_1 a/2 + \gamma A_2 b/2 = N_2 + \gamma A_1 a/2 + \gamma A_2 b/2,$$

$$R_3 = N_3^{(2)} + N_3^{(3)} + \gamma A_2 b/2 + \gamma A_2 c/2 = N_3 + \gamma A_2 b/2 + \gamma A_2 c/2,$$

$$R_4 = N_4^{(3)} + \gamma A_2 c/2 = N_4 + \gamma A_2 c/2.$$

Учтем известные внешние силы: N_2=0 и N_3=F

$$R_1 = N_1 + \gamma A_1 a/2,$$

$$R_2 = \gamma A_1 a/2 + \gamma A_2 b/2,$$

$$R_3 = F + \gamma A_2 b/2 + \gamma A_2 c/2,$$

$$R_4 = N_4 + \gamma A_2 c/2.$$

Теперь учтем граничные условия. По условию задачи концы стержня защемлены, следовательно, u_1=0, u_4=0 и из глобальной матрицы исключаем первый и четвертый столбцы. Окончательно система уравнений равновесия для решения поставленной задачи принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA_1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_1}{a}+\frac{EA_2}{b} & -\frac{EA_2}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{b} & \frac{EA_2}{b}+\frac{EA_2}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_2}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 + \gamma A_1 a/2 \\ \gamma A_1 a/2 + \gamma A_2 b/2 \\ F + \gamma A_2 b/2 + \gamma A_2 c/2 \\ N_4 + \gamma A_2 c/2 \end{Bmatrix}.$$

Из данной системы найдем искомые неизвестные задачи: узловые перемещения u_2, u_3 и реакции в защемлении N_1 и N_4.

Систему, состоящую из 2 и 3 уравнения

$$\begin{cases} k_{22}u_2 + k_{23}u_3 = R_2 \\ k_{32}u_2 + k_{33}u_3 = R_3 \end{cases},$$

решим относительно u_2 и u_3 по правилу Крамера

$$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} R_2 & k_{23} \\ R_3 & k_{33} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}} = \frac{R_2 k_{33} - R_3 k_{23}}{k_{22} k_{33} - k_{32} k_{23}}, \quad u_3 = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} & R_2 \\ k_{32} & R_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}} = \frac{R_3 k_{22} - R_2 k_{32}}{k_{22} k_{33} - k_{32} k_{23}}.$$

Искомые реакции N_1 *и* N_4 вычисляем из уравнений 1 и 4, соответственно

$$\begin{cases} k_{12} u_2 = R_1 \\ k_{43} u_3 = R_4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\dfrac{EA_1}{a} u_2 = N_1 + \gamma A_1 a/2 \\ -\dfrac{EA_2}{c} u_3 = N_4 + \gamma A_2 c/2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$N_1 = -\frac{EA_1}{a} u_2 - \gamma A_1 a/2, \quad N_4 = -\frac{EA_2}{c} u_3 - \gamma A_2 c/2.$$

Программа на языке Паскаль и пример расчета по полученным формулам приведены в приложении Б.

3 ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

Для вертикального ступенчатого стержня, защемленного нижним концом (*рисунок 6а*), рассчитать методом конечных элементов перемещения точек 1, 2, 3 под действием внешних нагрузок F_1, F_2, F_3 и собственного веса стержня, а также вычислить силу реакции N_4 в защемлении стержня.

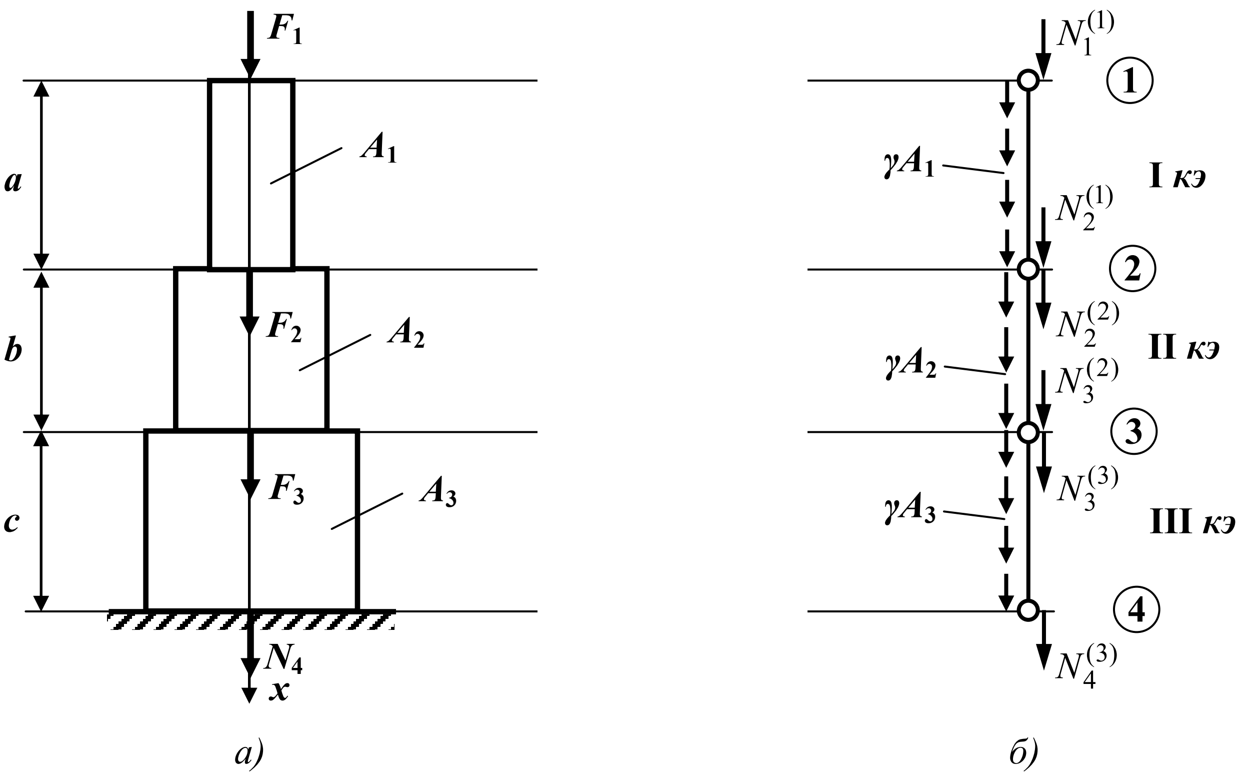

Рисунок 6 – Стержневая система для расчета

a, b, c –длина участков стержня; A_1, A_2, A_3 – площади сечений участков стержня; γ – объемный вес материала стержня.

Исходные данные к расчету взять в соответствии с вариантом, указанным преподавателем (*таблица 1*).

Таблица 1

Вариант	a	b	c	A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3
	м	м	м	см^2	см^2	см^2	кН	кН	кН
1	1,1	1,5	2,2	100	150	200	8	4	10
2	1,2	2,5	2,0	125	150	250	10	12	8
3	1,3	0,8	2,3	150	200	300	12	6	14
4	1,5	2,3	1,8	125	200	250	9	11	13
5	1,7	0,9	1,9	100	200	300	11	9	12
6	1,9	2,0	1,7	100	150	200	13	8	7
7	2,0	1,1	1,5	125	150	250	14	7	6
8	2,2	1,3	1,3	150	200	300	12	6	4
9	2,4	1,7	1,2	125	200	250	10	9	12
10	2,5	1,5	1,0	100	200	300	8	10	13
11	2,2	1,1	1,5	100	150	200	16	-	8
12	2,0	1,2	2,5	125	150	250	8	-	10
13	2,3	1,3	0,8	150	200	300	14	-	12
14	1,8	1,5	2,3	125	200	250	13	-	9
15	1,9	1,7	0,9	100	200	300	12	-	11
16	1,7	1,9	2,0	100	150	200	7	-	13
17	1,5	2,0	1,1	125	150	250	6	-	14
18	1,3	2,2	1,3	150	200	300	4	-	12
19	1,2	2,4	1,7	125	200	250	12	-	10
20	1,0	2,5	1,5	100	200	300	13	-	8
21	1,5	2,2	1,1	100	150	200	10	17	-
22	2,5	2,0	1,2	125	150	250	12	8	-
23	0,8	2,3	1,3	150	200	300	6	14	-
24	2,3	1,8	1,5	125	200	250	11	13	-
25	0,9	1,9	1,7	100	200	300	9	12	-
26	2,0	1,7	1,9	100	150	200	8	9	-
27	1,1	1,5	2,0	125	150	250	7	10	-
28	1,3	1,3	2,2	150	200	300	6	11	-
29	1,7	1,2	2,4	125	200	250	9	12	-
30	1,5	1,0	2,5	100	200	300	10	13	-

γ = 0,018 Н/см^3; E = 3000 МПа.

4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Ознакомиться с теорией МКЭ. Разобрать приведенный пример решения.
2 Исходя из постановки задачи, разбить стержневую систему на три КЭ длиной a, b, c, как показано на *рисунке 5б*.
3 Составить уравнения равновесия для каждого из трех КЭ. Уравнения равновесия отдельных КЭ объединить в одну систему. Записать глобальную матрицу жесткости для всего стержня. Учесть в матрице жесткости граничное условие (защемление нижнего конца стержня). Окончательно записать систему уравнений равновесия стержневой системы.
4 Решить полученную систему уравнений относительно искомых узловых перемещений u_1, u_2, u_3, используя или стандартный алгоритм метода Гаусса, или образец программы на языке Паскаль из Приложения А.
5 Дополнительно из уравнения равновесия рассчитать величину реакции N_4 в нижнем сечении стержня.
6 Оформить отчет по лабораторной работе.

5 ОТЧЕТНОСТЬ

Лабораторная работа засчитывается по представлении студентом аккуратно оформленного отчета и при умении применять на практике МКЭ для численного решения задачи растяжения (сжатия) для стержневой системы.

Отчет выполняется на компьютере и должен содержать: титульный лист с названием лабораторной работы, цель работы, краткие сведения из теории, текст задания по варианту, схему разделения стержневой системы на КЭ, вывод системы уравнений равновесия, программу для расчета на компьютере, результаты расчета стержневой системы.

6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Какой универсальный подход лежит в основе МКЭ?

2 Назовите основные этапы МКЭ?

3 Какой физический смысл коэффициентов жесткости?

4 Как получить матрицу жесткости отдельного КЭ?

5 Как получить глобальную матрицу жесткости всей конструкции?

6 Как записывается объединенная система уравнений равновесия и каким методом можно ее решить?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
program fem;
uses crt;
var a,b,c,g,a1,a2,a3,e,n4,s:real;
    i,j,n:integer;
    k:array [1..4,1..4] of real;
    u,r,f:array [1..4] of real;
BEGIN
writeln('ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ');
writeln('  Длина участков стержня[м]:');
write('a=');readln(a);
write('b=');readln(b);
write('c=');readln(c);
writeln('  Площади сечений стержня[кв.см]:');
write('A1=');readln(a1);
write('A2=');readln(a2);
write('A3=');readln(a3);
writeln('Внешние силы [кН]:');
write('F1=');readln(f[1]);
write('F2=');readln(f[2]);
write('F3=');readln(f[3]);
write('Объемный вес материала G[Н/куб.см]=');readln(g);
write('Модуль упругости E[МПа]=');readln(e);
{расчет коэффициентов матрицы жесткости}
k[1,1]:=e*a1/a; k[1,2]:=-e*a1/a; k[1,3]:=0;
k[2,1]:=k[1,2]; k[2,2]:=e*a1/a+e*a2/b; k[2,3]:=-e*a2/b;
k[3,1]:=0; k[3,2]:=k[2,3]; k[3,3]:=e*a2/b+e*a3/c;
k[4,3]:=-e*a3/c;
{расчет узловых сил}
r[1]:=10*f[1]+g*a1*a/2;
r[2]:=10*f[2]+g*a1*a/2+g*a2*b/2;
r[3]:=10*f[3]+g*a2*b/2+g*a3*c/2;
{решение линейной системы методом Гаусса}
for n:=1 to 2 do
begin
for j:=n+1 to 3 do k[n,j]:=k[n,j]/k[n,n];
r[n]:=r[n]/k[n,n];
k[n,n]:=1;
```

```
for i:=n+1 to 3 do
begin
for j:=n+1 to 3 do k[i,j]:=k[i,j]-k[n,j]*k[i,n];
r[i]:=r[i]-r[n]*k[i,n];
k[i,n]:=0;
end;
end;
u[3]:=r[3]/k[3,3];
for i:=2 downto 1 do
begin
s:=0;
for j:=i+1 to 3 do s:=s+k[i,j]*u[j];
u[i]:=r[i]-s;
end;
writeln('РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА');
writeln('Перемещения в узлах [мм]:');
write('U1=',u[1]*1000:6:3);
write(' U2=',u[2]*1000:6:3);
write(' U3=',u[3]*1000:6:3);
writeln(' U4=',0:2);
END.
```

Пример результатов расчета по программе **fem.**

```
ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
  Длина участков стержня[м]:
a=4
b=3
c=2
  Площади сечений стержня[кв.см]:
A1=300
A2=600
A3=750
Внешние силы [кН]:
F1=0
F2=20
F3=30
Объемный вес материала G[Н/куб.см]=0.018
Модуль упругости E[МПа]=3000
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА
Перемещения в узлах [мм]:
U1= 0.949 U2= 0.901 U3= 0.504 U4= 0
```

Данные значения перемещений близки к точным, полученным при решении этой же задачи аналитически (пример 4 на с.13 в учебном пособии: Агапчев В.И. и др. Сопротивление материалов. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2005г.)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

```
program fem_primer;
uses crt;
var a,b,c,a1,a2,f,g,e,k12,k22,k23,k32,k33,k43:real;
    r1,r2,r3,r4,n1,n4,u2,u3:real;
BEGIN
writeln('ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ');
writeln('  Длина участков стержня[м]:');
write('a=');readln(a);
write('b=');readln(b);
write('c=');readln(c);
writeln('  Площади сечений стержня[кв.см]:');
write('A1=');readln(a1);
write('A2=');readln(a2);
write('Внешняя сила F[кН]=');readln(f);
write('Объемный вес материала стержня G[Н/куб.см]=');readln(g);
write('Модуль упругости E[МПа]=');readln(e);
{расчет коэффициентов матрицы жесткости}
k12:=-e*a1/a; k22:=e*a1/a+e*a2/b; k23:=-e*a2/b;
k32:=-e*a2/b; k33:=e*a2/b+e*a2/c; k43:=-e*a2/c;
{расчет узловых сил}
r2:=g*a1*a/2+g*a2*b/2;
r3:=10*f+g*a2*b/2+g*a2*c/2;
{решение линейной системы по формулам Крамера}
u2:=(r2*k33-r3*k23)/(k22*k33-k32*k23);
u3:=(r3*k22-r2*k32)/(k22*k33-k32*k23);
r1:=k12*u2;
r4:=k43*u3;
n1:=r1-g*a1*a/2;
n4:=r4-g*a2*c/2;
writeln('РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА');
writeln('Перемещение в узле 2 U2=',u2*1000:5:3,' мм');
writeln('Перемещение в узле 3 U3=',u3*1000:5:3,' мм');
writeln('Реакция в узле 1 N1=',n1/10:5:2,' кН');
writeln('Реакция в узле 4 N4=',n4/10:5:2,' кН');
END.
```

Пример результатов расчета по программе **fem_primer**:

```
ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
  Длина участков стержня[м]:
a=2
b=1
c=1.5
  Площади сечений стержня[кв.см]:
A1=200
A2=300
Внешняя сила F[кН]=40
Объемный вес материала стержня G[Н/куб.см]=0.018
Модуль упругости E[МПа]=3000
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА
Перемещение в узле 2 U2=0.379 мм
Перемещение в узле 3 U3=0.499 мм
Реакция в узле 1 N1=-11.74 кН
Реакция в узле 4 N4=-30.33 кН
```

СОДЕРЖАНИЕ

1 Цель работы 1
2 Сведения из теории 1
2.1 Основные этапы МКЭ 1
2.2 КЭ растянутого (сжатого) стержня 5
2.3 Пример расчета стержневой системы 8
3 Задание к работе 11
4 Порядок выполнения работы 13
5 Отчетность 13
6 Контрольные вопросы 13
Приложение А... 14
Приложение Б 16