

**МОРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АДМИРАЛА Г.И.НЕВЕЛЬСКОГО**  
Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ**

Методические указания  
к выполнению домашнего задания

Составил И. Б. Друзь  
Е. А. Лихобабина

**ВЛАДИВОСТОК  
2004**

Позиция №  
в плане издания  
учебной литературы  
МГУ на 2004 г.

Составили:  
Иван Борисович Друзь,  
Елена Александровна Лихобабина

Методические указания к выполнению домашнего задания  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Лицензия ИД № 05693 от 27.08.02.

---

1,8 уч.-изд. л.  
Тираж 200 экз.

Формат 60×84  $\frac{1}{16}$   
Заказ №

---

Отпечатано в типографии МГУ им. адм. Г. И. Невельского  
Владивосток, 59, ул. Верхнепортовая, 50а.

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Перед выполнением упражнений студенты должны проработать по учебнику соответствующие разделы курса и освоить методы решения задач. Основную и дополнительную литературу рекомендует преподаватель, ведущий практические занятия.

Упражнения студенты выполняют по индивидуальному заданию, условие которого выбирают в соответствии с шифром, выданным преподавателем в прил.4.

При оформлении пояснительной записки к расчетно-графическому упражнению вначале указывается шифр, затем приводятся соответствующая шифру схема, необходимые исходные данные и расчет.

Сроки выполнения расчетно-графических упражнений устанавливаются в соответствии с рабочими планами по дисциплине.

При сдаче упражнения каждый студент должен защитить основные его положения, ответить на теоретические вопросы и решить задачи в объеме соответствующего раздела курса. Принятое преподавателем упражнение хранится на кафедре.

Расчеты на каждом отдельном этапе оформляются в такой последовательности: расчетная формула, подстановка в нее конкретных данных, окончательный результат и его размерность. Расчеты выполняются в единицах СИ. Допускается оформление расчетов на отдельных этапах в виде таблиц.

Каждый отдельный этап расчета должен иметь заглавие. Пояснительную записку оформляют на стандартных листах бумаги, текст и расчеты должны быть написаны аккуратно и без помарок. Графические иллюстрации выполняют на чертежной бумаге или миллиметровке с указанием масштабов графиков и всех необходимых размеров.

В расчетах числовые значения исходных данных и результаты вычисления следует округлять, сохраняя 3–4 значащие цифры. Пример округления:  $723,678 \approx 724$  или  $723,7$ ;  $0,0072367 \approx 0,00724$  или  $724 \cdot 10^{-5}$ ;  $724 + 0,252 \approx 724$ .

Для оценки прочности и жесткости изгибаемых балок необходимо знать величины главных моментов инерции поперечных сечений и положение главных осей инерции. Для простых конфигураций сечений (прямоугольник, треугольник, круг и т.п.) величины главных моментов инерции определяются весьма просто по соответствующим формулам. Для прокатных профилей (уголки, двутавры, швеллеры и т.п.) положение главных осей инерции и величины главных моментов инерции приводятся в ГОСТе на соответствующий прокатный профиль.

Однако в практике машиностроения часто используются сечения сложной конфигурации. Эти сечения могут изготавливаться при помощи сварки из различного сочетания прокатных профилей, отливаться или прокатываться из различных металлов. Геометрические характеристики таких сечений должны вычисляться непосредственно инженерами-проектировщиками.

В методической разработке излагается методика для нахождения положения главных осей инерции и вычисления осевых моментов инерции относительно этих осей.

Расчетно-проектировочная работа служит для закрепления теоретического материала курса и выработки у будущих инженеров навыков по определению геометрических характеристик.

Задачи решаются вручную, с дальнейшей проверкой на ЭВМ.

## УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ УПРАЖНЕНИЯ

### ПЛОЩАДИ И ИХ СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Статическими моментами площади фигуры относительно осей  $x$  и  $y$  (рис. 1) называются определенные интегралы вида

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_A y dA, \\ S_y &= \int_A x dA. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $A$  - площадь фигуры,  $dA$  – ее элемент, а  $x$  и  $y$  – координаты этого элемента. Статический момент измеряется единицей длины в третьей степени, обычно [см<sup>3</sup>].

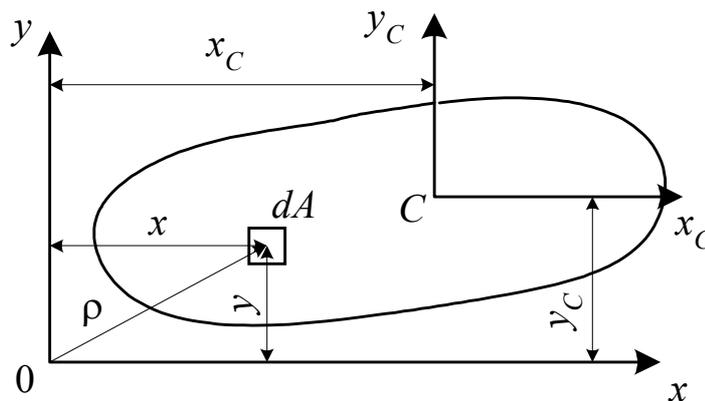


Рис. 1.

### Свойства статического момента

- статический момент сложной фигуры равен сумме статических моментов составляющих ее частей;
- статический момент может быть положительным, отрицательным либо равным нулю.

Если известны координаты центра тяжести фигуры, то статические моменты определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} y_C &= \frac{S_x}{A}, \\ x_C &= \frac{S_y}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из приведённых формул следует, что если оси  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести сечения, то статический момент относительно осей равен нулю. Такие оси называются *центральными осями*.

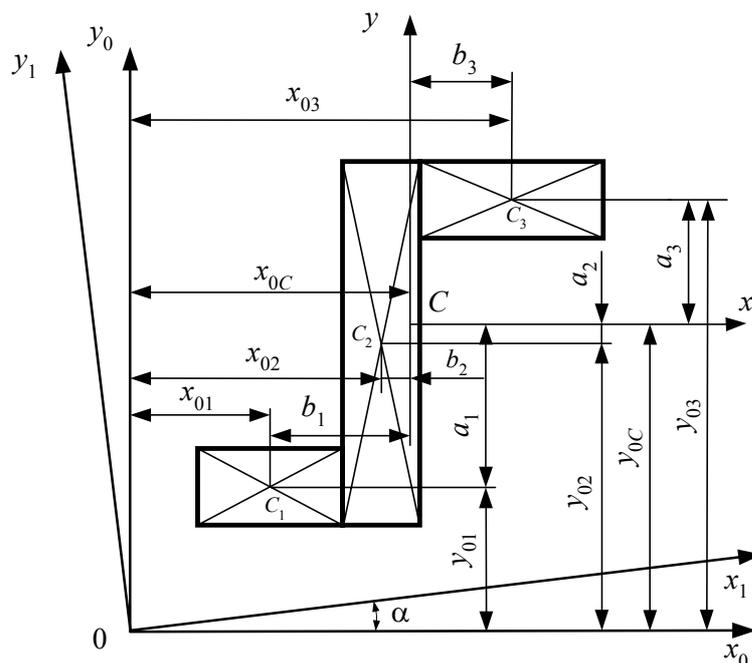


Рис.2

Если фигуру (рис. 2) можно представить в виде отдельных простых фигур (прямоугольников, треугольников и т.д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всей фигуры можно получить как сумму статических моментов этих простых фигур. Это непосредственно следует из свойств определённого интеграла

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i,$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i. \quad (3)$$

### **ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ**

Для определения координат центра тяжести плоской фигуры используют произвольную систему осей  $x_0$  и  $y_0$ , которые будем называть также осями сравнения. Координаты центра тяжести фигуры (в системе осей сравнения) вычисляются по формулам

$$y_{0C} = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{A_1 y_{01} + A_2 y_{02} + \dots + A_n y_{0n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$

$$x_{0C} = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{A_1 x_{01} + A_2 x_{02} + \dots + A_n x_{0n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}. \quad (4)$$

Оси сравнения рекомендуется выбирать так, чтобы вся фигура располагалась в первой четверти; тогда при определении статических моментов площадей, составляющих сложную фигуру, не получают отрицательных величин, а следовательно, и возможных ошибок. Полезно оси сравнения проводить через центр тяжести одного из элементов сложной фигуры.

Вычисление по формулам (4) следует вести в такой последовательности:

- а) отнести заданную фигуру к координатной системе осей сравнения;
- б) расчленить фигуру на простые части, для которых известны площади  $A_i$  и координаты центров тяжести  $(x_{0i}, y_{0i})$ ;
- в) вычислить статические моменты фигуры относительно осей сравнения, применяя (3);
- г) вычислить координаты центров тяжести по формулам (4). Вычисление удобно располагать в табл. 1 из приложения № 1.

### **МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ**

Определенные интегралы вида

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA, \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

называются *осевыми, линейными* или *экваториальными моментами инерции площади фигуры* (рис. 1) *относительно оси x и оси y*;

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (6)$$

*полярный момент инерции площади фигуры* относительно начала координат 0;

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (7)$$

*центробежный момент инерции площади фигуры* относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости фигуры.

Моменты инерции фигуры относительно ее центральных осей принято называть *собственными*. В табл. 3 приложения № 3 приведены формулы для вычисления собственных моментов инерции простейших фигур. Значения собственных моментов инерции прокатных профилей приведены в приложении.

Размерность моментов инерции – единица длины в четвертой степени, обычно **[см<sup>4</sup>]**.

Свойства моментов инерции:

- момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составляющих ее частей;
- осевой и полярный моменты инерции всегда положительны, так как независимо от знака координаты произвольной площадки соответствующее слагаемое положительно, потому что в него входит квадрат этой координаты.

- центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или в частном случае равным нулю.

Полярный момент инерции не связан с осями координат, а зависит лишь от положения полюса 0 (рис. 1).

Из рисунка видно, что  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . Подставив это значение в выражение для  $I_\rho$ , получим

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x = \text{const},$$

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (8)$$

Полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

### **ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ**

Обычно собственные моменты инерции плоской фигуры (либо частей сложной фигуры) известны. Моменты инерции фигуры относительно произвольных осей, параллельных ее центральным осям, вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{x_c} + Ay_c^2, \\ I_y &= I_{y_c} + Ax_c^2, \\ I_{xy} &= I_{x_c y_c} + Ax_c y_c, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где –  $x_c$  и  $y_c$  расстояние между параллельными осями.

Если задана сложная плоская фигура (рис. 2), то для вычисления моментов инерции относительно произвольных осей сечение разбить на простые элементы. Пусть для каждого элемента известны площадь  $A_i$ , координаты центра тяжести  $x_{0i}, y_{0i}$  в произвольной системе осей  $x, y$ , а также собственные моменты  $I_{x_i}, I_{y_i}$  и  $I_{x_i y_i}$  относительно собственных осей, параллельных данным осям  $x_0, y_0$ .

Тогда, вычисляя по (9) моменты инерции каждого элемента относительно произвольных осей  $x_0, y_0$  и суммируя эти значения для всей фигуры, получим моменты инерции сложной фигуры относительно параллельных осей

$$\left. \begin{aligned} I_{x_0} &= \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + A_i y_{0i}^2), \\ I_{y_0} &= \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + A_i x_{0i}^2), \\ I_{x_0 y_0} &= \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + A_i x_{0i} y_{0i}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

## ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Пусть через некоторую точку фигуры проведена система осей  $x$  и  $y$ , относительно которой известны моменты инерции рассматриваемой фигуры (рис. 3).

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

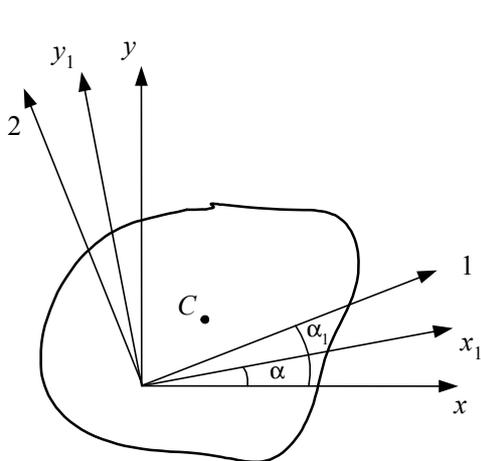


Рис. 3

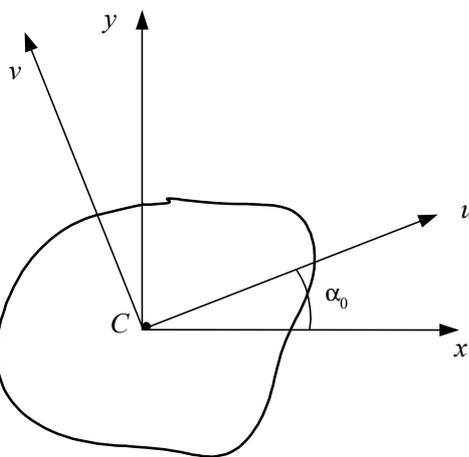


Рис. 4

Складывая почленно выражения для  $I_{x_1}$  и  $I_{y_1}$ , найдём

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y.$$

## ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

В каждой точке плоскости, в которой лежит фигура, существует две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Такие оси называются главными (оси 1 и 2, рис. 3).

Если главные оси проходят через центр тяжести фигуры, то их называют *главными центральными осями* (их обозначают  $u$  и  $v$  рис. 4), а осевые моменты инерции относительно этих осей называют *главными моментами инерции*  $I_u$  и  $I_v$ . Оси симметрии фигуры являются главными осями.

Осевые моменты инерции плоской фигуры относительно главных осей принимают экстремальные значения, т.е. один из них является максимальным ( $I_{\max}$ ), другой – минимальный ( $I_{\min}$ ).

Положение главных осей плоской фигуры определяются углом  $\alpha_0$  (рис. 3, 4), который они образуют с произвольными осями  $x$  и  $y$ . Угол поворота  $\alpha_0$  главных осей определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (12)$$

При вычислении угла следует обращать внимание на знак правой части, зависящей от знака  $I_{xy}$  и знака разности  $(I_y - I_x)$ .

Если значение  $\operatorname{tg}2\alpha_0$  положительно, то угол  $\alpha_0$  положителен, ось  $u$  повернута относительно оси  $y$  против часовой стрелки.

Если же значение  $\operatorname{tg}2\alpha_0$  отрицательно, то угол  $\alpha_0$  отрицательный, ось  $u$  повернута относительно оси  $y$  по часовой стрелки. На рис. 4 показано положительное направление угла  $\alpha_0$ .

Вычисление главных моментов инерции производится по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0, \\ I_v &= I_y \cos^2 \alpha_0 + I_x \sin^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Контролем правильности вычисления главных моментов инерции служит условие

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y.$$

При небольших значениях угла  $\alpha_0$  пользоваться формулами (13) нецелесообразно. В этих случаях рекомендуется вычислять главные моменты инерции по формуле

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (14)$$

При этом, если  $I_x > I_y$ , то  $I_{\max} = I_x$ ,  $I_{\min} = I_y$  и наоборот. Таким образом формулы 12, 13, и 14 позволяют определять положение главных моментов инерции. Ось  $I_{\min}$  (ось  $u$ ) «тяготеет» к площади сечения, т.е. пересекает ее по наибольшему

протяжению, а ось  $I_{\max}$  (ось  $v$ ) «уклоняется» от площади – пересекает ее по наименьшему протяжению (рис. 5).

Если сечение имеет ось симметрии, эта ось и ось, ей перпендикулярная, являются главными осями.

Если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси являются главными центральными осями.

Если сечение обладает тремя и более осями симметрии, то любая центральная

ось сечения является главной и все главные центральные моменты инерции сечения одинаковы.

Зависимость между моментами инерции относительно осей  $x$  и  $y$  и главными моментами инерции относительно осей, проходящих через данную точку, выражается формулами

$$\begin{aligned} I_x &= I_u \cos^2 \alpha + I_v \sin^2 \alpha, \\ I_y &= I_u \sin^2 \alpha + I_v \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

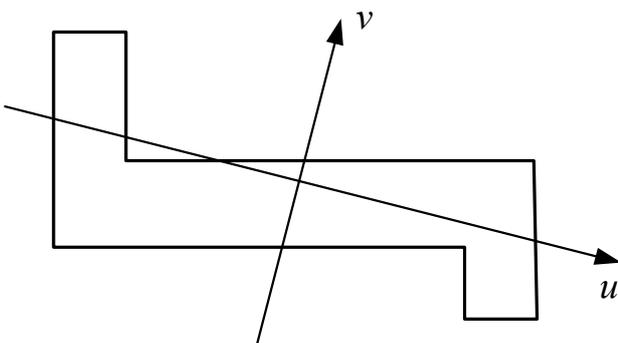


Рис. 5

$$I_{xy} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha, \quad (15)$$

$$I_x + I_y = I_u + I_v,$$

где  $I_u$  и  $I_v$  - главные моменты инерции;  $\alpha$  – угол, составляемый осями  $x$  и  $y$  с главными осями  $u$  и  $v$ .

## СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЕГО ВЫПОЛНЕНИЮ

Для выполнения индивидуального задания курсант обязан изучить теорию, а также решить ряд задач для усвоения практики расчета.

Цель настоящего расчетно-графического задания состоит в том, чтобы курсант овладел не только теорией, но и приобрел твердые навыки вычисления геометрических характеристик, необходимых для практических расчетов.

Курсанту задается форма и линейные размеры сложного составного сечения. Задача состоит в отыскании координат центра тяжести, определении положения главных осей и вычислении главных центральных моментов инерции.

Для выполнения задания можно рекомендовать примерно такую последовательность расчета.

1. Вычертить в крупном масштабе контур сечения с размерами, с нанесением всех осей и указанием расстояний между осями, использованных при вычислении.

2. Выбрать оси сравнения и определить положение ц. т. сложного сечения по формуле (4) (приложение № 1). Нанести положение ц. т. на чертеже сечения.

3. Провести через ц. т. заданного сечения исходные центральные оси  $x$ ,  $y$ , параллельные осям сравнения.

4. Определить моменты инерции сложного сечения относительно, этих центральных осей, используя формулы (10). Весь расчет по формулам (10) выполнить в табличной форме, как показано в таблице приложения № 2.

5. По формуле (12) определить положение (угол наклона) главных центральных осей сложного сечения и нанести оси на чертеж сечения.

6. Определить величины главных центральных моментов инерции сложного сечения по формулам (13) или (14).

7. Произвести проверку правильности вычислений, используя условия

$$I_x + I_y = I_u + I_v, \quad I_{uv} = 0.$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется статическим моментом площади сечения относительно любой оси? Какова его размерность?

2. Чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?

3. Как определяются координаты центра тяжести простой и сложной плоской фигуры?

4. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения? Какова их размерность и знак?
5. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
6. Как отражается на знаке центробежного момента инерции изменение положительных направлений одной или обеих координатных осей?
7. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника относительно оси, совпадающей с одной из его сторон, и относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?
8. Докажите, что моменты инерции квадратного сечения относительно центральной оси, проходящей параллельно сторонам, и относительно оси, проходящей через диагональ, равны.
9. Чему равны осевой и полярный моменты инерции круга и кольца относительно оси, проходящей через его центр тяжести?
10. Выведите зависимости для определения осевых и центробежного моментов инерции относительно осей, параллельных осям, проходящим через центр тяжести?
11. В плоскости сечения проведен ряд параллельных осей. Относительно какой из них осевой момент инерции имеет наибольшее значение?
12. Выведите формулы, выражающие изменения осевых и центробежного моментов инерции фигуры при повороте осей.
13. Изменяется ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
14. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
15. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей инерции?
16. В каких случаях можно без вычисления установить положение главных осей инерции?
17. Выведите формулы для определения положения главных осей инерции и величин главных моментов инерции.
18. Как определяется радиус инерции?
19. Изложите последовательность определения значений главных центральных моментов инерции сложного сечения.
20. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно его центральной оси, параллельной основанию?
21. Чему равны центральные осевые моменты инерции круга и кругового кольца?
22. Как пишутся формулы перехода для осевого и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей?
23. Какие моменты инерции всегда положительны?
24. Какими свойствами обладают главные центральные оси?
25. Какие оси называются главными осями инерции?
26. Как изменится центробежный момент инерции при повороте осей координат на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ?

27. Как связаны между собой суммы моментов инерции относительно перпендикулярных осей и полярный момент инерции относительно точки пересечения этих осей?

28. По каким формулам определяются координаты центра тяжести фигуры?

29. Чему равен статический момент площади фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры?

30. Чему равен центробежный момент инерции круга относительно его центральных осей?

31. Чему равен полярный момент инерции круга (кольца) относительно его центра?

32. Если в плоскости сечения проведен ряд параллельных осей, относительно какой из них осевой момент инерции имеет наименьшее значение?

33. Изменяется ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?

34. Выведите отношение между осевыми и полярными моментами инерции.

35. Определите расстояние  $y$ , если  $I_{x_1} = A$ .

36. Если  $I_x = I_y$  и  $I_{xy} = 0$ , то какие оси являются главными осями инерции?

37. Если  $I_x = I_y$  и  $I_{xy} \neq 0$ , то какие оси являются главными осями инерции?

38. Какие центральные оси являются главными осями инерции у сечений, имеющих более двух осей симметрии? Почему?

### ПРИМЕР 1

Для сечения, показанного на рис. 6, определить положение главных центральных осей и вычислить величины главных центральных моментов инерции сечения.

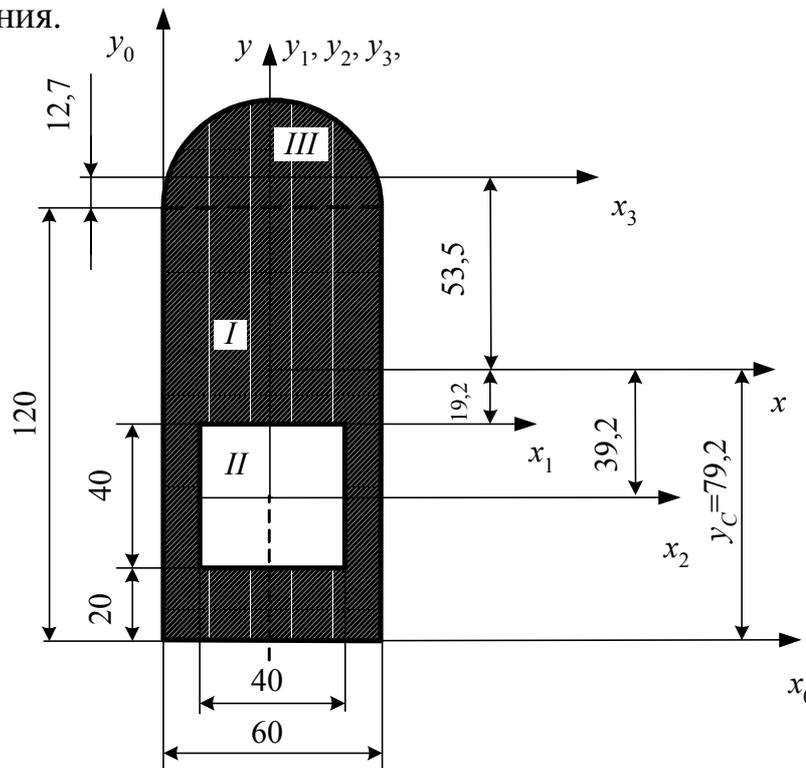


Рис. 6

**РЕШЕНИЕ**

1. Заданное сечение можно рассматривать как сечение образованное из прямоугольника – I, квадрата – II и полуокружности – III. Проведем через центры тяжести частей фигуры горизонтальные и вертикальные координатные оси  $x_1, x_2, x_3, y, y_1, y_2, y_3$  и выпишем данные, которые потребуются при дальнейших расчетах.

а) прямоугольник  $60 \times 120$

$b = 60 = 6 \text{ см}, h = 120 = 12 \text{ см},$  площадь  $A_1 = bh = 6 \times 12 = 72 \text{ см}^2,$   
осевые моменты инерции

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \times 12^3}{12} = 864 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \times 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4,$$

центробежный момент инерции  $I_{x_1 y_1} = 0;$

б) квадрат  $40 \times 40$

$a = 40 = 4 \text{ см},$  площадь  $A_2 = a^2 = 4^2 = 16 \text{ см}^2,$

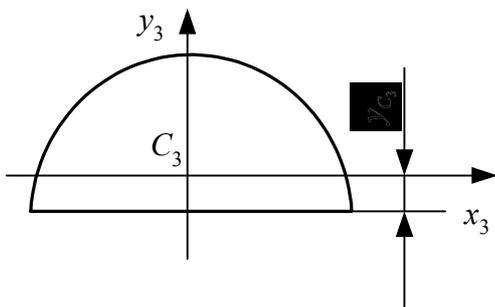
моменты инерции

$$I_{x_2} = I_{y_2} = \frac{a^4}{12} = \frac{6^4}{12} = 21,33 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_2 y_2} = 0;$$

в) полуокружность  $d = 60 = 6 \text{ см},$

положение центра тяжести  $y_{C_3} = \frac{4}{3} \times \frac{r}{\pi} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{\pi} = 1,27 \text{ см},$



площадь  $A_3 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi \times 6^2}{8} = 14,23 \text{ см}^2,$

моменты инерции

$$I_{x_3} = 0,00686 \times d^4 = 0,00686 \times 6^4 = 8,91 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_3} = \frac{\pi \times d^4}{128} = \frac{\pi \times 6^4}{128} = 31,8 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_3 y_3} = 0;$$

площадь всего сечения

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 72 - 16 + 14,13 = 70,13 \text{ см}^2.$$

2. Определяем положение центра тяжести сечения. Т.к. сечение имеет ось симметрии (ось  $y$ ), то центр тяжести лежит на этой оси. Выбираем систему вспомогательных осей  $x_0, y_0$  и по формуле (4) определяем координаты  $y_C$ .

$$y_C = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{A_1 y_{01} + A_2 y_{02} + A_3 y_{03}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{72 \times 6 - 16 \times 4 + 14,13 \times 13,27}{72 - 16 + 14,13} = 7,92 \text{ см}.$$

Относим фигуру к центральным осям  $x, y$ , параллельным осям  $x_0, y_0$ . Находим координаты центров тяжести  $a_i$  и  $b_i$  элементов сечения в осях  $x, y$ .

Для прямоугольника  $a_1 = 6 - 7,92 = -1,92$  см,

$$b_1 = 0.$$

Для квадрата  $a_2 = 4 - 7,92 = -3,92$  см,

$$b_2 = 0.$$

Для полуокружности  $a_3 = 13,27 - 7,92 = 5,35$  см,

$$b_3 = 0.$$

На чертеже наносим координаты центров тяжести сечений каждой отдельной простейшей фигуры относительно центральных осей  $x$  и  $y$ .

3. Вычисляем осевые моменты инерции заданного сечения относительно главных центральных осей  $x$  и  $y$ , используя при этом формулы перехода к параллельным осям (10).

$$I_x = \sum_{i=1}^3 [I_{x_i} + A_i a_i^2] = [864 + (-1,92)^2 \times 72] - [21,33 + (-3,92)^2 \times 16] +$$

$$+ [8,91 + 5,35^2 \times 14,13] = 1275,5 \text{ см}^4,$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 [I_{y_i} + A_i b_i^2] = 216 - 21,33 + 31,8 = 226,5 \text{ см}^4.$$

## ПРИМЕР 2

Определить положение главных центральных осей и вычислить главные центральные моменты инерции заданного сечения (рис. 7).

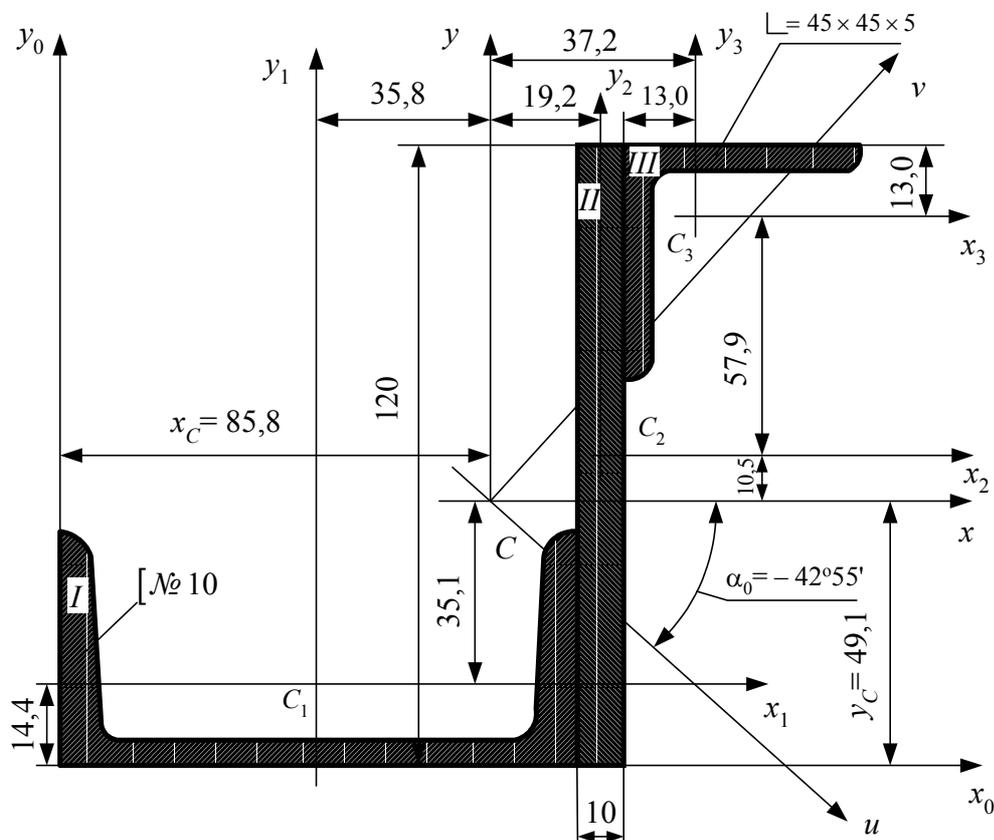


Рис.7

**РЕШЕНИЕ**

1. Проведем через центры тяжести частей фигуры горизонтальные и вертикальные координатные оси  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  и выпишем данные, которые потребуются при дальнейших расчетах

а) швеллер №10



площадь  $A_1 = 10,9 \text{ см}^2$ ,

моменты инерции

$$I_{x_1} = 20,4 \text{ см}^4; I_{y_1} = 174 \text{ см}^4; I_{x_1 y_1} = 0,$$

расстояние от длинной грани до центра тяжести

$$y_{C_1} = 1,44 \text{ см},$$

б) прямоугольник

площадь  $A_2 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ см}^2$ ,

моменты инерции

$$I_{x_2} = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{1 \times 12^3}{12} = 144 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2} = \frac{h \times b^3}{12} = \frac{12 \times 1^3}{12} = 1 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_2 y_2} = 0;$$

в) угольник 45×45×5

площадь  $A_3 = 4,92 \text{ см}^2$ ,

координаты центра тяжести

$$x_{C_3} = y_{C_3} = 1,3 \text{ см},$$

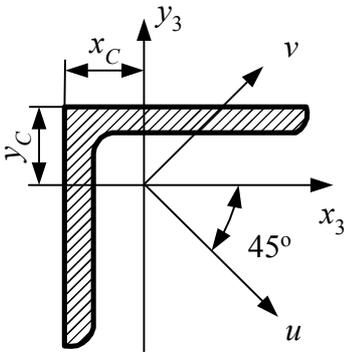
моменты инерции

$$I_{x_3} = I_{y_3} = 8,03 \text{ см}^4;$$

$$I_u = I_{\max} = 12,7 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{\min} = 3,33 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3 y_3} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2(45^\circ) = \frac{12,7 - 3,33}{2} = 4,69 \text{ см}^4.$$



Сечение, вычерченное в масштабе (рис. 8), относим к осям координат  $x_0 y_0$ , параллельным сторонам контура сечения. Каждый элемент сечения (швеллер *I*, прямоугольник *II*, уголок *III*) относим к центральным осям  $x_i, y_i$  параллельным осям сравнения  $x_0 y_0$ .

Координаты центров тяжести каждого элемента в осях  $x_0 y_0$  будут иметь значения

для швеллера  $x_{01} = 5 \text{ см},$

$$y_{01} = 1,44 \text{ см};$$

для прямоугольника  $x_{02} = 10 + 0,5 = 10,5 \text{ см},$



### 3. Определение моментов инерции сечения относительно осей $x$ и $y$ .

Таблица 2

№/№ элемент-	Наименование и форма элементов	Размеры элементов (см)	$A_i$	Координаты ц. т.		Моменты инерции					
				$b_i$	$a_i$	Ось $x$		Ось $y$		Центробежные	
						$A_i \cdot b_i^2$	$I_{x_i}$	$A_i \cdot a_i^2$	$I_{y_i}$	$A_i \cdot a_i \cdot b_i$	$I_{x_i y_i}$
см	см <sup>2</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>		
1	Швеллер	№ 10	10,9	-3,51	-3,58	134,3	20,4	139,7	174	137,0	0
2	Прямоугольник	12x1	12,0	1,05	1,92	13,23	144,0	44,24	1,0	24,2	0
3	Уголок	4,5x4,5x0,5	4,29	5,79	3,72	143,8	8,03	59,37	8,03	92,4	4,69
Сумма			27,19			291,35	172,43	243,3	183	253,6	4,69
По формуле (10)						$I_x = 463,8$	$I_y = 426,3$	$I_{xy} = 258,3$			

### 4. Определение положения главных центральных осей инерции $u$ и $v$ . По формуле (12)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 258,3}{426,3 - 463,8} = -13,776.$$

По таблице тригонометрических функций,  $2\alpha_0 = -85^\circ 50'$ , следовательно  $\alpha_0 = -42^\circ 55'$

$$\begin{aligned} \cos(-42^\circ 55') &= 0,7323, & \sin(-42^\circ 55') &= -0,6810, \\ \cos(-85^\circ 50') &= 0,07254, & \sin(-85^\circ 50') &= -0,9974. \end{aligned}$$

Так как угол  $\alpha_0 < 0$ , то откладываем его от оси  $x$  по часовой стрелке и проводим главные центральные оси инерции  $u$  и  $v$ .

### 5. Определение величины главных центральных моментов инерции с помощью формул перехода к повернутым осям (13)

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0 = 463,8 \cdot (0,7323)^2 + 426,3 \cdot (-0,6810)^2 - 258,3 \cdot (-0,9974) = 248,722 + 197,7 + 257,63 = 704,05 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0 = 463,8 \cdot (-0,6810)^2 + 426,3 \cdot (0,7323)^2 + 258,3 \cdot (-0,9974) = 215,09 + 228,61 - 257,63 = 186,07 \text{ см}^4,$$

или по формуле (14)

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{463,8 + 426,3}{2} \pm \sqrt{(463,8 - 426,3)^2 + 4 \cdot 258,3^2} = 18,75 \pm 259,0.$$

Поскольку  $I_x > I_y$ , то ось  $u$  является осью, относительно которой момент инерции будет максимальным.

$$I_u = I_{\max} = 704,05 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_{\min} = 186,05 \text{ см}^4.$$

6. Проверка вычислений

$$I_x + I_y = 463,8 + 426,3 = 890,1 \text{ см}^4$$

$$I_u + I_v = 704,05 + 186,07 = 890,1 \text{ см}^4,$$

или

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{463,8 - 426,3}{2} \cdot (-0,9974) + 258,3 \cdot (0,0725) = 18,7 - 18,7 = 0.$$

Проверка показывает, что вычисления выполнены достаточно точно.

### Приложение 1

Таблица 1

Определение координат центра тяжести сечения в осях  $x_0, y_0$ .

№/№ элементов	Наименование и форма элементов	Размеры элементов (см)	Площадь $A_i$ (см <sup>2</sup> )	Координаты центра тяжести		Статические моменты	
				$x_{0i}$ (см)	$y_{0i}$ (см)	$A_i \times x_{0i}$ (см <sup>3</sup> )	$A_i \times y_{0i}$ (см <sup>3</sup> )
Сумма				X			

### Приложение 2

Таблица 2

Определение моментов инерции сечения относительно осей  $x, y$ .

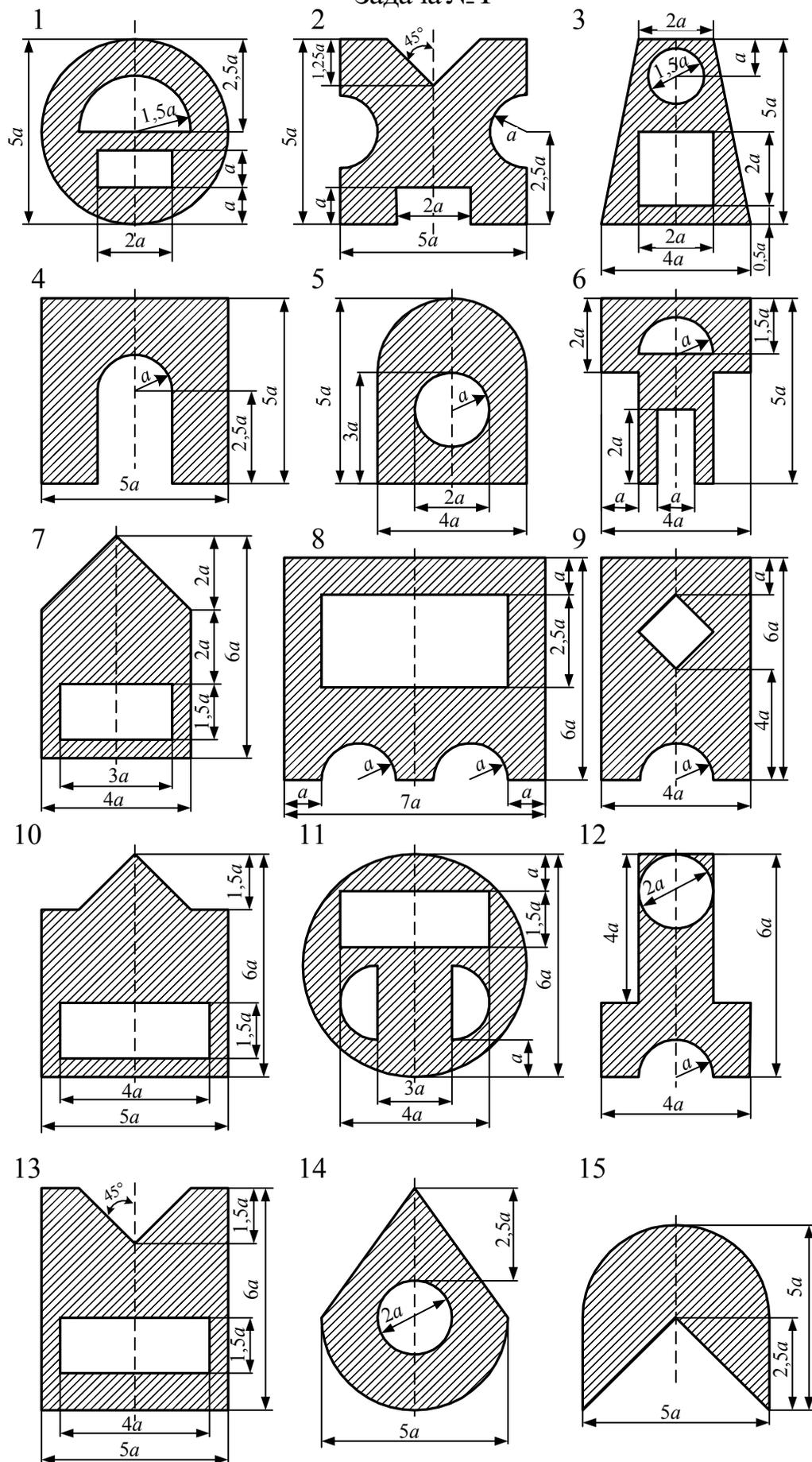
№/№ элементов	Наименование и форма элементов	Размеры элементов (см)	$A_i$	Координаты ц. т.		Моменты инерции					
						Ось $x$		Ось $y$		Центробежные	
				$b_i$	$a_i$	$A_i \cdot b_i^2$	$I_{x_i}$	$A_i \cdot a_i^2$	$I_{y_i}$	$A_i \cdot a_i \cdot b_i$	$I_{x_i y_i}$
		см	см <sup>2</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>
1											
2											
Сумма					$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	
По формуле (10)						$I_x = A + B$		$I_y = C + D$		$I_{xy} = E + F$	

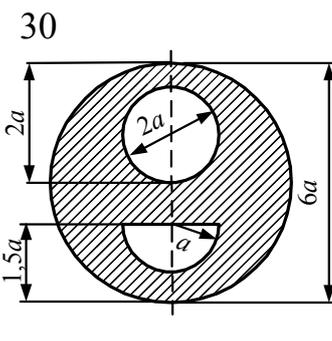
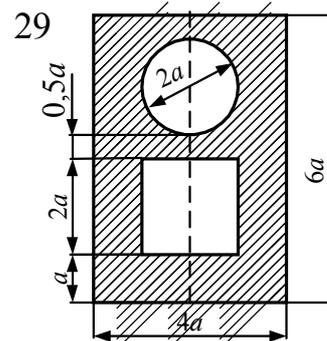
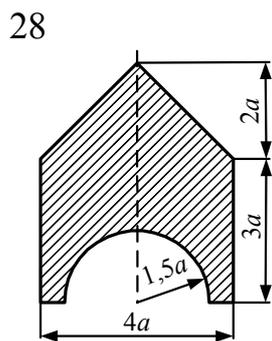
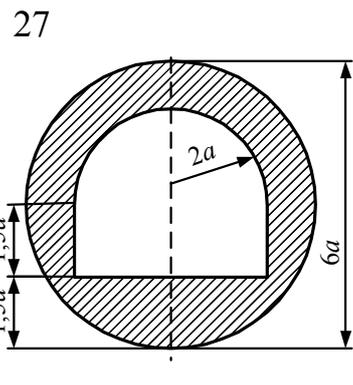
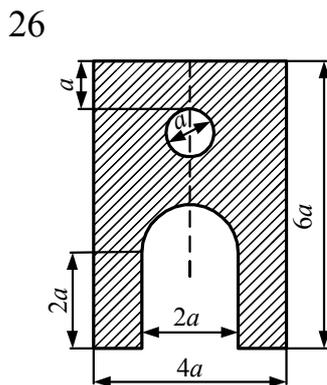
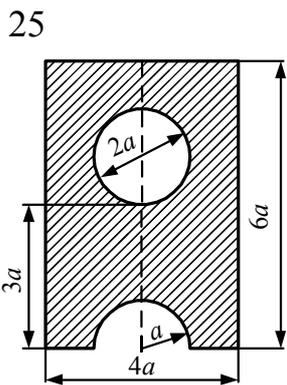
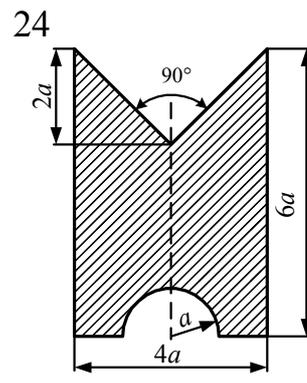
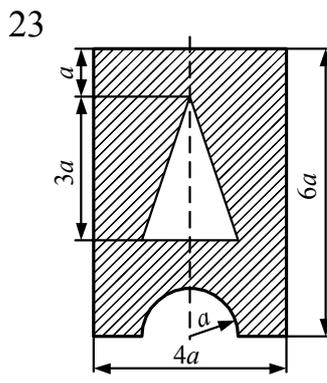
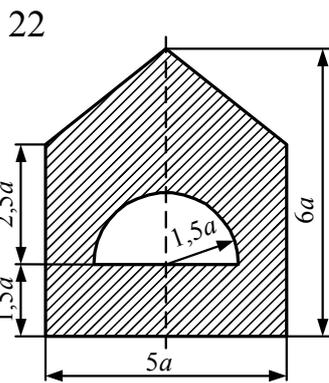
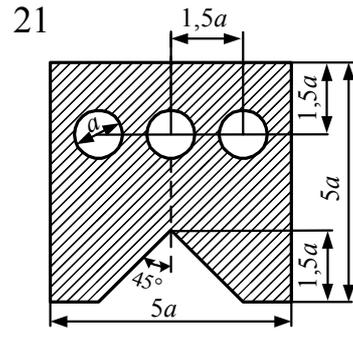
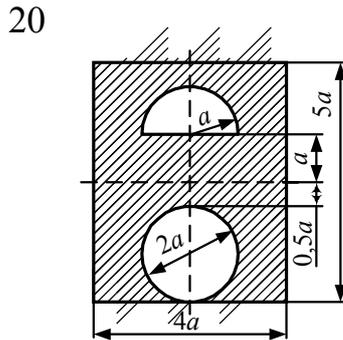
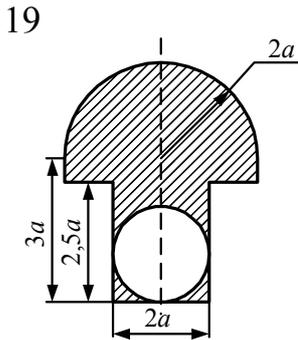
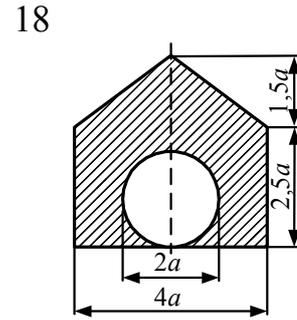
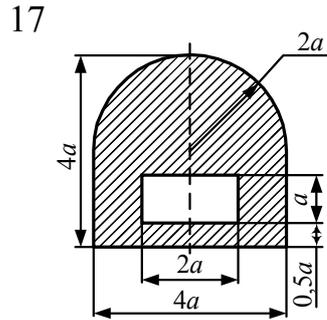
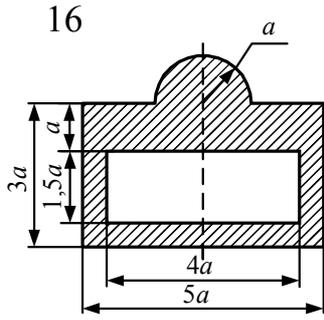
Приложение 3

Таблица 3

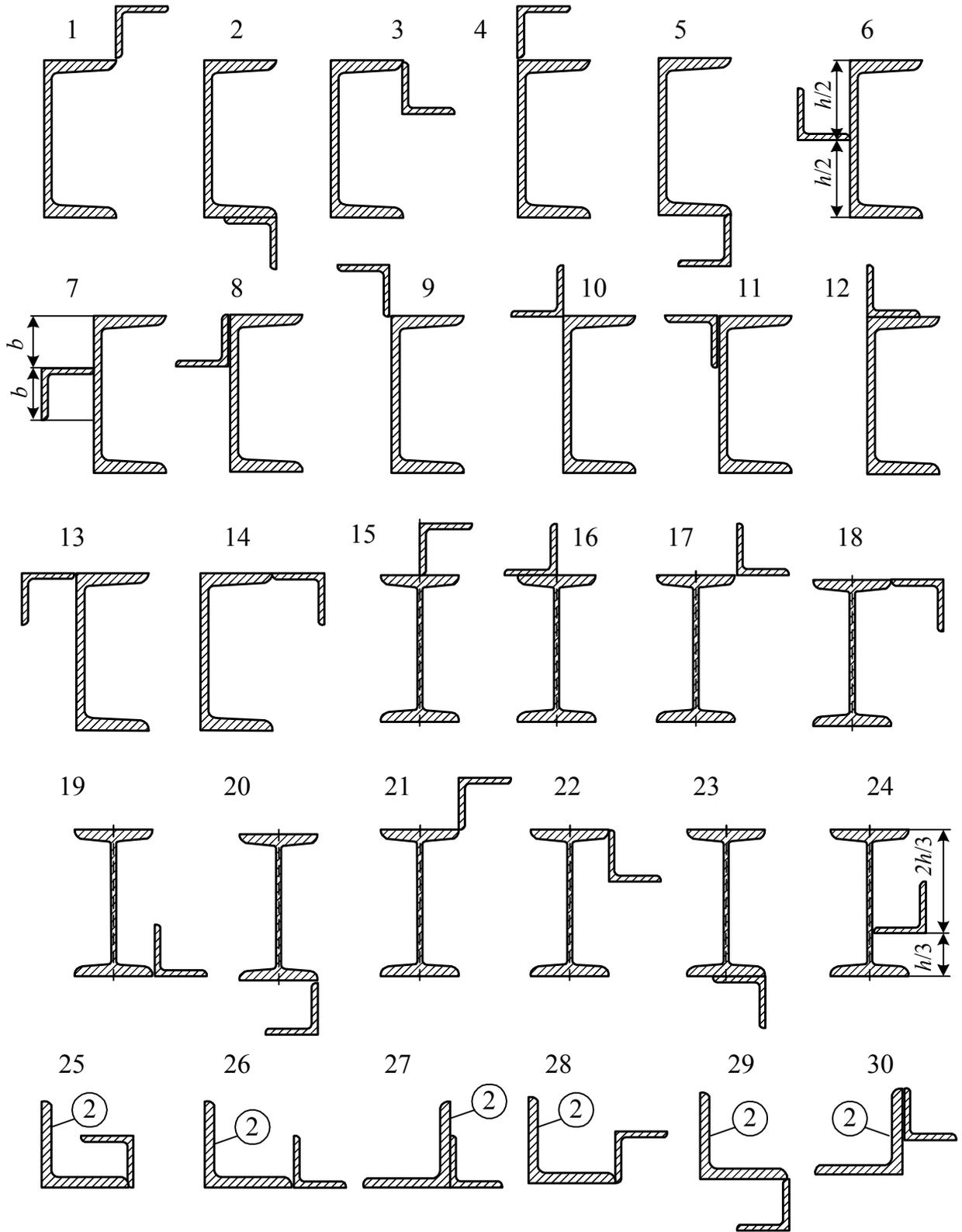
	$A = hb, \quad I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}.$
	$A = \frac{hb}{2}, \quad y_c = \frac{h}{3}, \quad I_{x_1} = \frac{bh^3}{12},$ $I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{48}.$
	$A = \frac{hb}{2}, \quad y_c = \frac{h}{3}, \quad x_c = \frac{b}{3}, \quad I_{x_1} = \frac{bh^3}{12},$ $I_{y_1} = \frac{hb^3}{12}, \quad I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{48}.$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}.$
	$A = \frac{\pi d^2}{8}, \quad I_x \approx 0,00686d^4 \approx 0,11r^4, \quad y_c = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d,$ $I_y = I_{x_1} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8} \approx 0,0246d^4 \approx 0,393r^4.$
	$A = \frac{\pi r^2}{8}, \quad I_{xy} = -0,0165r^4, \quad y_c = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,212d,$ $I_y = I_x \approx 0,0549r^4, \quad I_{u(\max)} \approx 0,0714r^4, \quad I_{v(\min)} \approx 0,0384r^4$
	$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D},$ $I_y = I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4).$

Приложение 4  
Задача № I



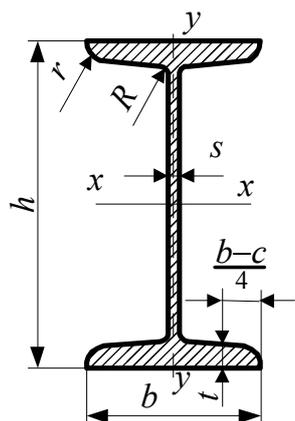


Задача №2



№/№	Двутавры	Швеллер	Равнополочный уголок	Второй равнополочный уголок
1	10	10	63×63×6	110×110×7
2	12	12	70×70×7	125×125×7
3	14	14	80×80×6	125×125×8
4	16	16	80×80×8	140×140×10
5	18	18	90×90×7	140×140×12

## СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



**Таблица 1**

### Балки двутавровые (ГОСТ 8239—72)

$I$  — момент инерции;  
 $W$  — момент сопротивления;  
 $S$  — статический момент полусечения;  
 $r$  — радиус инерции.

№ профиля	Вес 1 м, Н	Размеры, мм							Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей					
		$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$	$x-x$			$y-y$				
								$I_{x^2}$ , см <sup>4</sup>		$W_{x^2}$ , см <sup>3</sup>	$i_{x^2}$ , см	$S_{x^2}$ , см <sup>3</sup>	$I_{y^2}$ , см <sup>4</sup>	$W_{y^2}$ , см <sup>3</sup>	$i_{y^2}$ , см
10	94,6	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	115	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	137	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	159	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	184	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	199	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	210	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	227	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	240	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	258	220	120	5,4	8,9	10	4	328	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	273	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	294	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	315	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	339	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	365	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	392	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	422	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	486	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
50	768	500	170	9,5	15,2	17	7	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	898	550	180	10,3	16,5	18	7	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	1040	600	190	11,1	17,8	20	8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	1200	650	200	12,0	19,2	22	9	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	1380	700	210	13,0	20,8	24	10	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	1580	700	210	15,0	24,0	24	10	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70б	1840	700	210	17,5	28,2	24	10	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

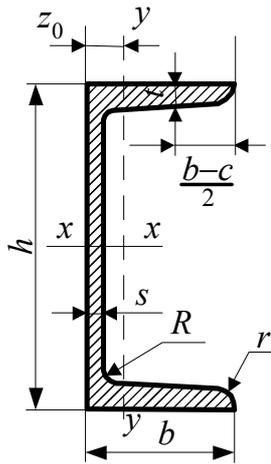


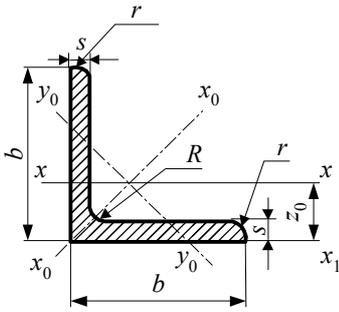
Таблица 2

**Швеллеры**  
(ГОСТ 8240—72\*)

№ профиля	Вес 1 м, Н	Размеры, мм						Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		h	b	s	t	R	r		x - x				y - y			
									$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
5	48,4	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	59,0	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	70,5	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	133	12,8	4,75	1,19	1,31
10	85,9	100	46	4,5	7,6	7,0	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	104	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	123	140	58	4,9	8,1	8,0	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	133	140	62	4,9	8,7	8,0	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	142	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	741	92,6	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	153	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	103	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	174	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	184	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	198	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	210	220	82	5,4	9,5	10,0	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	226	220	87	5,4	10,2	10,0	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,02	2,55	2,46
24	240	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	258	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	277	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	318	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	365	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	419	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	483	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Таблица 3

**Уголки равнополочные**  
(ГОСТ 8509-72)



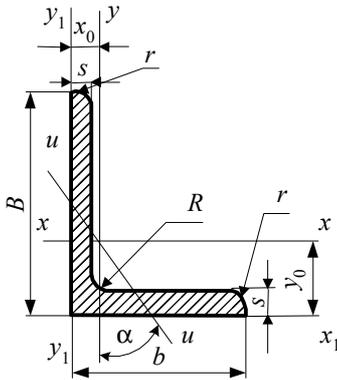
№ профиля	Размеры, мм				Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Вес 1 м, Н	Справочные величины для осей							
	b	s	R	r			x - x		x <sub>0</sub> - x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>	
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>x<sub>0</sub> max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub> max</sub> , см	I <sub>y<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> min</sub> , см	I <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
2	20	3	3,5	1,2	1,13	8,9	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,46	11,5	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	11,2	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4			1,86	14,6	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4	1,3	1,62	12,7	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	14,6	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	19,1	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	16,5	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	21,6	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	5	1,7	2,35	18,5	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	24,2	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	5	1,7	2,65	20,8	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	27,3	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	33,7	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	23,2	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	30,5	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	37,7	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6	2	3,86	30,3	11,6	1,73	18,3	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4			4,38	34,4	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	42,5	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	7	2,3	4,96	39,0	18,9	1,95	29,9	2,15	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	48,1	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	57,2	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
		6			8,15	63,9	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	73,9	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,70	83,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	58,0	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	68,9	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,10	79,6	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,50	90,2	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9			12,80	101,0	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	67,8	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	73,6	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7			10,80	85,1	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8			12,30	96,5	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10	3,3	10,6	83,3	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	96,4	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	109	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	122	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55

Продолжение табл. 3

№ профиля	Размеры, мм				Площадь профиля см <sup>2</sup>	Вес 1 м, Н	Справочные величины для осей							
							x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	
	b	s	R	r			I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>x<sub>0</sub> max x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub> max</sub> , см	I <sub>y<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> min</sub> , см	I <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
10	100	6,5	12	4	12,8	101	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	108	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	122	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10			19,2	151	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12			22,8	179	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	206	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	233	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	119	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	135	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	14	4,6	19,7	155	294	3,87	467	4,87	122	2,19	516	3,36
		9			22,0	173	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			24,3	191	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12			28,9	227	422	3,82	670	4,82	174	2,16	782	3,53
		14			33,4	262	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16			37,8	296	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1050	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	194	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	215	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	255	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	247	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	270	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	294	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	340	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	385	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	430	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	474	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	305	1216	5,60	1933	7,06	500	3,58	2324	4,89
		12			42,2	331	1317	5,59	2093	7,04	540	3,59	2128	4,85
20	200	12	18	6	47,1	370	1823	6,22	2896	7,84	749	3,98	3452	5,42
		13			50,9	399	1961	6,21	3116	7,83	805	3,99	3182	5,37
		14			54,6	428	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	487	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	601	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	740	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			115,5	876	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	474	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	538	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,92
25	250	16	24	8	78,4	615	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	689	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	761	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22			106,1	833	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25			119,7	940	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			113,1	1045	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142,0	1114	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

Таблица 4

### Уголки неравнополочные (ГОСТ 8510-72)



№ профиля	Размеры, мм					Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Вес 1 м, Н	Справочные величины для осей											
								x-x		y-y		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>		u-u			
	B	b	s	R	r			I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	I <sub>y<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	I <sub>u<sub>min</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u<sub>min</sub></sub> , см	tgα	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	9,1	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392	
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	11,7	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382	
			4			1,94	15,2	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374	
4/2,5	40	25	3	4	1,3	1,89	14,8	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385	
			4			2,47	19,4	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	16,8	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382	
			4			2,80	22,0	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	19,0	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403	
			4			3,17	24,9	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	28,1	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406	
			5			4,41	34,6	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	46,3	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393	
			5			4,98	60,3	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,85	0,386
			6			5,90	31,7	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,87	0,397
			8			7,68	39,1	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,86	0,396
7/4,5	70	45	4	7,5	2,5	5,07	39,8	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407	
			5			5,59	43,9	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,98	0,406
7/5,5	75	50	5	8	2,7	6,11	47,9	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436	
			6			7,25	56,9	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	1,08	0,435
			8			9,47	74,3	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	49,9	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387	
			6			7,55	59,2	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5	9	3	7,86	61,7	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	
			5			8,54	67,0	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	1,22	0,384
			6			11,18	87,7	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	75,3	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	
			7			11,1	87,0	113	3,19	35,0	1,78	232	3,58	58,7	1,46	20,8	1,37	1,37	0,392
			8			12,6	98,7	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	1,36	0,391
			10			15,5	121	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	1,35	0,387
11/7	110	70	6	10	3,3	11,4	89,8	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	
			5			12,3	96,4	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	1,53	0,402
			7			13,9	109	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	110	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,80	43,4	1,76	0,407	
			8			16,0	125	256	4,01	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	1,75	0,406
			10			19,7	155	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	1,74	0,404
			12			23,4	183	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18,0	141	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411	
			10			22,2	175	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	180	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	100	2,20	0,391	
			10			25,3	198	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	2,19	0,390
			12			30,0	236	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	2,18	0,388
			14			34,7	273	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	2,16	0,385

№ профиля	Размеры, мм					Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Вес l м, Н	Справочные величины для осей										
								x-x		y-y		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>		u-u		
	B	b	s	R	r			I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	I <sub>y1</sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	I <sub>u<sub>max</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u<sub>max</sub></sub> , см	tgα
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	222	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	264	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
			11			34,9	274	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,399
20/12,5	200	125	12	14	4,7	37,9	297	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9	344	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	391	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,3	379	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,48	0,405
			16			63,6	499	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,49	0,407
			18			71,1	558	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,50	0,408
			20			78,5	617	4987	7,97	1613	4,53	1041	8,31	2776	3,85	949	3,54	0,410

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ</b> .....	<b>3</b>
<b>УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ УПРАЖНЕНИЯ</b> .....	<b>4</b>
ПЛОЩАДИ И ИХ СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ .....	4
ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ .....	5
МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ .....	6
ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ .....	7
ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ .....	8
ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ .....	8
<b>СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЕГО ВЫПОЛНЕНИЮ</b> ...	<b>10</b>
<b>КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ</b> .....	<b>10</b>
<b>ПРИМЕР 1</b> .....	<b>12</b>
<b>ПРИМЕР 2</b> .....	<b>14</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1</b> .....	<b>18</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2</b> .....	<b>18</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3</b> .....	<b>19</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4</b> .....	<b>20</b>
Задача №1 .....	20
Задача №2 .....	22
<b>СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ</b> .....	<b>23</b>
Таблица 1. Балки двутавровые .....	23
Таблица 2. Швеллеры .....	24
Таблица 3. Уголки равнополочные .....	25
Таблица 4. Уголки неравнополочные .....	27