

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 1

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(x^2 - y^2)y' = 2xy$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y'(x + \sqrt{x}) = \sqrt{1 - y} \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 - x^2)y'' = xy'$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Материальная точка массой $m = 2$ г. погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности $k = 0,002$ кг/с. Найти скорость точки через 1 с. после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 2

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \sin x = y \ln y \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = \frac{4}{3}$,

$$y'(0) = \frac{1}{27}.$$

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью $V_0 = 12$ км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 10с скорость лодки уменьшилась до $V_0 = 6$ км/ч. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через 1мин после остановки мотора.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 3

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad y(0) = 0$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = e^{-2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 4y' = 8 \operatorname{ctg} 2x$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Пуля, двигаясь со скоростью $V_0 = 400 \text{ м/с}$, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее, испытывая силу сопротивления стены, эта сила сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7 \text{ м}^{-1}$. Найти скорость пули через $0,001 \text{ с}$ после вхождения пули в стену.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 4

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' + y = 3.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + \frac{1}{x}y' = x^2.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Материальная точка массой $m = 1\text{г}$ движется прямолинейно. На нее действует сила в направлении движения, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3}$ и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 0,003 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$. Найти скорость точки через 3 с после начала движения, если начальная скорость точки была равна нулю.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 5

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + \frac{y}{2x} = x^2 \quad y(1) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1 + (y')^2 + y y'' = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

В сосуде 100л водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью $g = 5 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе $m_0 = 10 \text{ кг}$ соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 6

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' \cos x = (y + 1) \sin x.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x \quad y(-1) = \frac{3}{2}$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Кривая проходит через точку $A(2; -1)$ и обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 7

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y'e^{-x} = x - 1 \quad y(1) = e$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x y'' + 2y' = x^3.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Кривая проходит через точку $A(1;2)$ и обладает тем свойством, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке на сумму координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 8

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2 y' - 2xy = 3.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5 \quad y(2) = 4$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' \operatorname{tgy} = 2(y')^2.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Кривая проходит через точку $A(1;2)$ и обладает тем свойством, что отношение ординаты любой ее точки к абсциссе пропорционально угловому коэффициенту касательной к этой кривой, проведенной в той же точке, с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 9

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2 y' + y^2 - 2xy = 0.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y'tgx = \sin x.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 16e^x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + y = 4ctgx$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Кривая проходит через точку $A(1;5)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение кривой.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 10

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' + y = x + 1.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \sin x = y \ln y \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$3yy'' + (y')^2 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Кривая проходит через точку $A(1;4)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 11

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(x - y)y' = x + y.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \cos x = y \sin x + \sin x \quad y(0) = 0$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 5x^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; 2)$ и обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 12

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - 2xy = xe^{-x^2}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3} \quad y(1) = 4$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' x \ln x = y'.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 2)$ и обладающей тем свойством, что длина любой подкасательной равна среднему арифметическому координат точки касания (подкасательной называется проекция на ось Ox отрезка касательной, заключенного между точкой касания и точкой пересечения касательной с осью Ox).

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 13

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - 3x^2 y - x^2 = 0.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2x y'' = y'.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(5; -\frac{1}{5})$ и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 14

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0 \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - y' = \frac{1}{2e^x + 1}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

В комнате, где температура 20°C , некоторое тело остыло за 20 мин от 100°C до 60°C . Найти закон охлаждения тела. Через сколько минут оно остынет до 30°C ? Повышением температуры в комнате пренебречь.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 15

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y dx - (4 + x^2) \ln y dy = 0 \quad y(2) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 2y(y')^3 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = -\sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Тело массы m падает по вертикали с некоторой высоты без начальной скорости. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найти закон движения тела.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 16

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - \frac{3y}{x} = x.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$(1 + e^x)y' = ye^x \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y y'' + (y')^2 = 1.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 2(1 - x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;2)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен абсциссе точки касания.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 17

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y'e^{-x} = x - 1 \quad y(1) = -e$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2(y')^2 = (y-1)y''.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1;3)$, если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке кривой втрое больше углового коэффициента радиус-вектора точки касания.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 18

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + y \cos x = \sin 2x.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \cdot 3^{x^2} + x \cdot 9^{-y} = 0 \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' = y'(\ln y' - \ln x).$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение w приближено связаны уравнением $w = g - kv$, где g и k – постоянные. Установить зависимость между пройденным путем s и временем t , если при $t = 0$, $s = v = 0$.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 19

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$(1 + e^x)yy' = e^x \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2yy'' = 1 + (y')^2.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 4)$ и обладающей тем свойством, что точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 20

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{e^x(x-2)}{x}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$(x^2 y + y)dy + (xy^2 + x)dx = 0 \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''(2y + 3) - (2y')^2 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - 2y' = \frac{4}{e^{2x} + 1}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $N(2; 0)$ и обладающей тем свойством, что отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 21

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - y = e^x.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \sin x = y \ln y \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y y'' + (y')^2 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{9}$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Тело движется прямолинейно со скоростью v , пропорциональной квадрату времени. Установить зависимость между пройденным путем s и временем t , если известно, что при $t=0$, $s=s_0$.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 22

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{6x^2 + 6xy + y^2}{x^2}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \sin x - y \ln y \cos x = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x y'' + x y' = 1.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = x + 1$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющих в наличии в рассматриваемый момент времени t . Количество бактерий утроилось в течении 5ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 23

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin x \cos x.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$xy' = y^2 - y \quad y(1) = 0,5$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y^3 y'' = 1.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + 2e^x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки O параллельно данному направлению.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 24

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1).$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \operatorname{ctg} x = 2 - y \quad y(0) = -1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x(y'' + 1) + y' = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Сила тока в цепи с сопротивлением R , самоиндукцией L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению

$L \frac{di}{dt} + Ri = E$. Найти зависимость силы тока от времени t , считая R и L

постоянными, если электродвижущая сила возрастает пропорционально времени, т.е. $E=kt$; сила тока в начальный момент равна нулю.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 25

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right).$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0 \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - e^y y' = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 5$, $y'(0) = 6$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти кривую, проходящую через точку $A(0;1)$, для которой треугольник, образованный осью Oy , касательной к кривой в произвольной ее точке и радиусом-вектором точки касания, - равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 26

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$(1 + y^2)dx = xydy \quad y(2) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y^3 y'' = 3.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 27

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = 2\sqrt{y} \ln x \quad y(e) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(y+1)^2 y'' = (y')^3.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{9}$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти кривую, у которой радиус кривизны равен кубу нормали; искомая кривая должна проходить через точку $M(0;1)$ и иметь в этой точке касательную, составляющую с осью Ox угол 45° .

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 28

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' \cos x = \frac{y}{\ln y} \quad y(0) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x y'' - y' = e^x x^2.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Материальная точка массы m движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала; среда, в которой происходит движение, оказывает движению точки сопротивление, пропорциональное скорости движения. Найти закон движения.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 29

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^3} \quad y(1) = 1$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' x \ln x - y' = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;1)$, если известно, что произведение абсциссы любой точки кривой на угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке равно утроенной сумме координат точки.

Контрольная работа №4 «Дифференциальные уравнения»

Вариант 30

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

Задание 2

Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{yy'}{x} + e^y = 0 \quad y(1) = 0$$

Задание 3

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2yy'' - (y')^2 = 0.$$

Задание 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 9xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.

Задание 5

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$y'' + y = ctgx$$

Задание 6

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Задание 7

Найти уравнение кривой, проходящей через точку $N(2; 0)$ и обладающей тем свойством, что отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.