

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Центр дистанционных форм обучения

Кафедра теоретической механики

КИНЕМАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения

Тула, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Кинематика изучает общие геометрические свойства движения тел без учета физических причин, вызывающих данное движение. Проектируя новую машину или прибор, разработчик должен уметь создавать такие кинематические схемы, чтобы выходные звенья механизма совершали движения, требуемые технологическим процессом. При этом часто приходится искать способы получения заданных движений всего механизма или его отдельных звеньев в зависимости от тех или иных ограничений определяемых условиями функционирования машины.

В большинстве существующих механизмов отдельные их звенья совершают плоско-параллельное (плоское) движение, поэтому данный раздел кинематики имеет существенное значение в технике.

Такого рода задачи успешнее будет решать инженер не только хорошо владеющий методами кинематики, но и умеющий грамотно произвести моделирование механизма с использованием вычислительной техники.

ЦЕЛЬ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Приобретение навыков кинематического расчёта плоского шарнирного механизма с использованием различных методов.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Объектом исследования является плоский многозвездный шарнирный механизм с одной степенью свободы¹, размеры которого известны.

Задаваемыми параметрами являются:

- геометрические характеристики звеньев механизма;
- закон движения ведущего звена механизма², определяемый уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t.$$

где φ_0 — начальное значение угла поворота; $\omega_0 = \pi/T \text{ c}^{-1}$ — угловая скорость; Т — период вращения ведущего звена.

К определяемым параметрам относятся:

- закон движения ведомых звеньев механизма;
- угловые скорости, угловые ускорения звеньев, совершающих вращательные и плоское движение;
- закон движения, траектория, а также скорости и ускорения заданных точек, и звеньев совершающих поступательные движения.

Методы исследований:

- аналитический метод;
- геометрические (графический и графоаналитический) методы;

Процедура постановки и решения задач кинематики включает в себя четыре этапа:

1. Формулировку задачи.

¹ Схемы механизмов и их геометрические размеры приведены в Приложении 1.

² Исходные данные для вычислений приведены в таблицах Приложения 1.

2. Построение расчетной схемы.
3. Построение математической модели.
4. Реализация математической модели.

Первые три этапа включает в себя постановка задачи.

Формулировка задачи — это условие (текст) задачи. Она осуществляется руководителем работ совместно с исполнителем.

Расчетная схема — это рисунок, на котором изображены: рационально выбранная система координат; упрощенная схема механической системы в произвольном положении; кинематические характеристики и т.п. (в зависимости от применяемого метода).

Математическая модель — это система алгебраических и/или дифференциальных уравнений (уникальная для каждого применяемого метода), а также начальных условий, описывающих кинематическое поведение механической системы.

Реализация математической модели — это решение поставленной задачи выбранным, на этапе постановки, методом.

В процессе выполнения работы необходимо выработать навыки и умения:

- нахождения геометрических связей наложенных на заданный механизм, а также формулировке их в математическом виде;
- составления уравнений движения произвольной точки механизма и определения ее траектории, скорости, ускорения;
- решения поставленной задачи любым из предложенных методов (аналитическим или графическим);

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.

При выполнении работы требуется:

1. Изобразить механизм в произвольном положении.
2. С помощью аналитического метода составить уравнения геометрических связей механизма, получить зависимости углов поворотов ведомых звеньев от времени или от угла поворота ведущего звена.
3. Получить системы разрешающих уравнений для определения угловых скоростей и ускорений ведомых звеньев, а также линейной скорости и ускорения звена, движущегося поступательно
4. Записать уравнения для вычисления координат, линейных скоростей и ускорений точек, определенных в задании.
5. Используя основные теоремы плоскопараллельного движения твёрдого тела, выполнить расчёт скоростей и ускорений всех звеньев и всех узловых точек (шарниров) механизма для заданного его положения.
6. Используя основные теоремы составного движения точки при вращательном переносном движении, выполнить расчёт скоростей и ускорений всех звеньев и всех узловых точек (шарниров) механизма для заданного его положения.
7. Сравнить решения, полученные разными геометрическими методами

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ И ЗАЩИТЕ³

При защите работы оцениваются следующее:

- Оформление пояснительной записи
- Правильность постановки и решения задачи механики.
- Самостоятельность выполнения задания.

При защите необходимо уметь прокомментировать любой метод решения, уметь определять скорости и ускорения любой точки механизма по требованию преподавателя.

Работа представляется к защите в виде пояснительной записи.

Пояснительная записка, объемом 10-15 листов, аккуратно оформляется на листах формата А4. Каждый лист должен быть пронумерован. Разделы и параграфы должны быть озаглавлены и пронумерованы. Формулы, на которые есть ссылки в тексте пояснительной записи, обязательно нумеруются. Листы должны быть скреплены между собой. Пояснительная записка включает в себя:

- Титульный лист.
- Аннотация (Краткое содержание работы).
- Оглавление с нумерацией страниц каждого раздела.
- Схема механизма и необходимые численные данные для выполнения задания (на отдельном листе).
- Постановка задачи. Описание подхода к решению задачи, формулировка математической модели и методов решения, использованных в процессе работы над проектом.
- Анализ результатов.
- Список литературы.

³ Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ.

1. Настоящие методические указания.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1 (Статика и кинематика) – М.: Наука, 1990.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Т.1 – М.: Высшая школа, 1984.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике под редакцией А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1983.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990.
7. Конспект лекций по разделу "Кинематика".

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И СХЕМА МЕХАНИЗМА

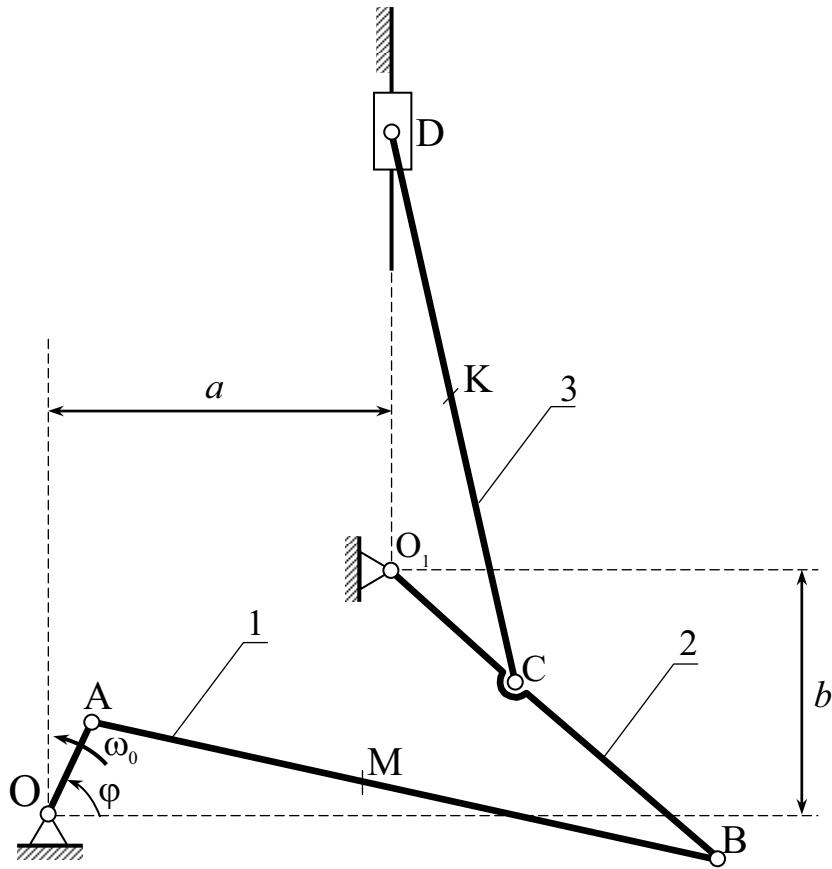
Исследовать движение плоского шарнирного многозвенного механизма с одной степенью свободы (Рис. 1). Размеры механизма известны. Закон движения ведущего звена механизма, определяется уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t.$$

где φ_0 — начальное значение угла поворота; ω_0 — угловая скорость.

Определить, используя разные методы, законы движения всех звеньев механизма, угловые скорости и ускорения ведомых звеньев, а также линейные скорости и ускорения всех узловых точек механизма и звена, движущегося поступательно. Все величины определить при заданном значении угла поворота ведущего звена φ_k .

Вычислить угловые координаты, скорости и ускорения звеньев механизма совершающих вращательные и плоскопараллельные движения, а также законы движения, скорости и ускорения всех узловых точек механизма при заданных значениях угла поворота ведущего звена φ_k .



Дано:

$$OA = 15 \text{ см}$$

$$AB = 97 \text{ см}$$

$$O_1B = 66 \text{ см}$$

$$O_1C = 25 \text{ см}$$

$$CD = 86 \text{ см}$$

$$AM = 42 \text{ см}$$

$$CK = 47 \text{ см}$$

$$a = 50 \text{ см}$$

$$b = 37 \text{ см}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\omega_0 = \pi/18 \text{ c}^{-1}$$

$$\varphi_4 = 65^\circ$$

Определить

$$\varphi_1$$

$$\varphi_2$$

$$\varphi_3$$

$$\bar{r}_D$$

$$\omega_1$$

$$\omega_2$$

$$\omega_3$$

$$\bar{v}_D$$

$$\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_3$$

$$\bar{a}_D$$

$$\bar{r}_M$$

$$\bar{v}_M$$

$$\bar{a}_M$$

$$\bar{r}_K$$

$$\bar{v}_K$$

$$\bar{a}_K$$

Рис. 1 Схема механизма и исходные данные для расчета.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ.

Изобразим плоский механизм в произвольном положении (Рис. 2).

В качестве системы отсчета примем правую декартовую систему координат. Начало системы координат расположим в подшипнике O . Положительные углы поворота в этом случае направлены против часовой стрелки.

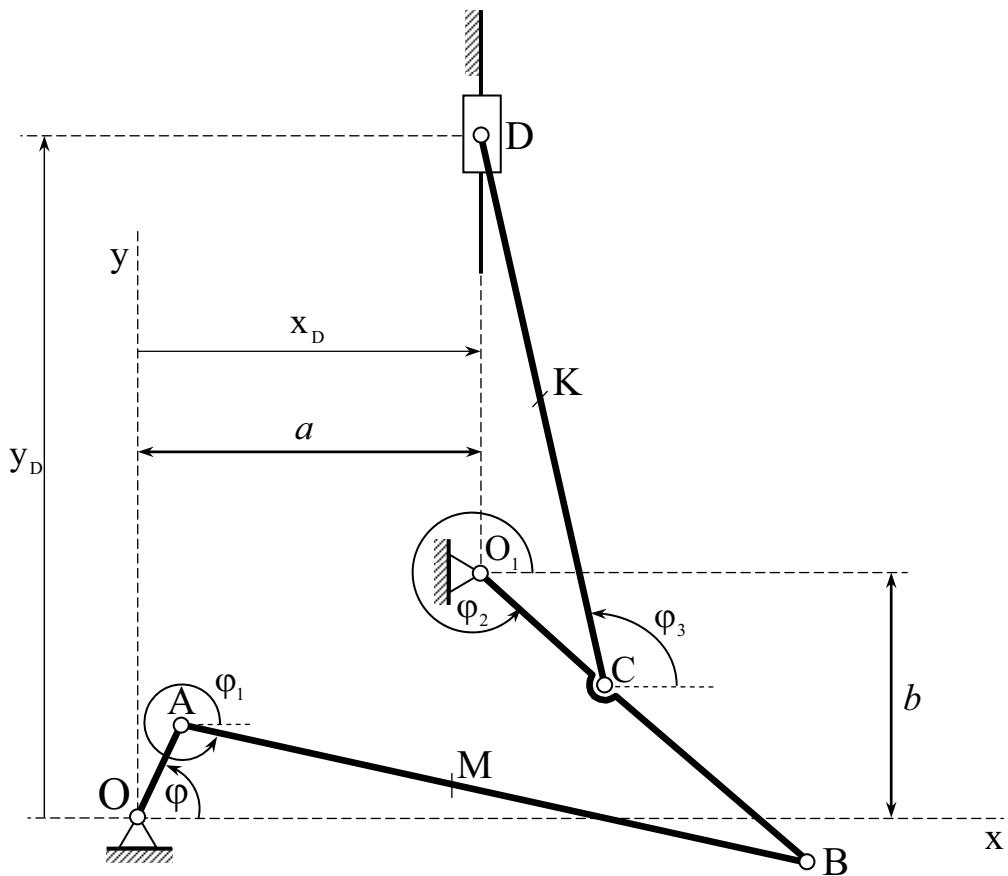


Рис. 2 Расчетная схема механизма

Изобразим углы поворота звеньев φ_k , $k = 1, 2, 3$, отсчитывая их от горизонтальной оси Ox в положительном направлении.

В состав данного многозвенного механизма входят:

- два кривошипа OA и O_1B ;
- два шатуна AB и CD ;

- ползун D ;
- неподвижное звено OO_1 .

Кривошипы OA и O_1B совершают вращательное движение вокруг неподвижных осей перпендикулярных плоскости xOy и проходящих через точки O и O_1 соответственно. Шатуны AB и CD совершают плоскопараллельное движение в плоскости xOy . Ползун D совершает возвратно-поступательное движение вдоль направляющей параллельной оси Oy .

Для составления уравнений геометрических связей найдем точки механизма, траектории которых известны. К этим точкам относятся шарниры A , B , C и D . Точки A , B и C движутся по окружностям радиусов OA , O_1B и O_1C соответственно, а ползун D — по прямолинейной траектории параллельной оси Oy (Рис. 2).

Шарнир A принадлежит одновременно шатуну AB и кривошипу OA , для которого известен закон вращательного движения и, следовательно, закон движения точки A определен. Шарнир B принадлежит одновременно шатуну AB и кривошипу O_1B , а шарнир C — шатуну CD и кривошипу O_1B . Из двух точек C и B , одновременно принадлежащих кривошипу O_1B , одна является зависимой, т.е. определение закона движения одной точки приводит к возможности определения закона движения для другой.

Так как закон плоскопараллельного движения твердого тела можно определить по двум любым точкам этого тела, в качестве базовых точек, при составлении уравнений геометрических связей, примем точки B и D .

Построим для этих точек векторные контуры, с помощью которых можно составить уравнения геометрических связей (Рис. 3).

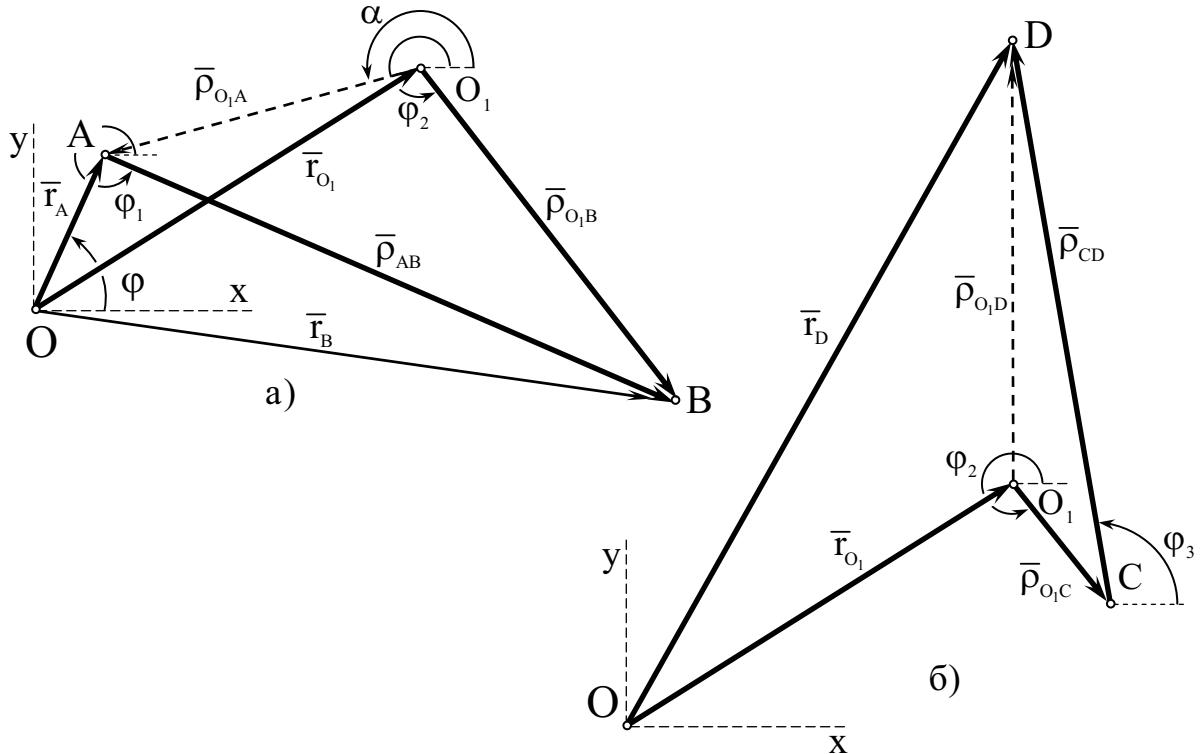


Рис. 3 Векторные контуры для базовых точек механизма

Уравнения геометрических связей в векторной форме будут иметь вид:

для точки B (Рис. 3 а)

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho}_{AB} = \bar{r}_{O_1} + \bar{\rho}_{O_1B}, \quad (1.1)$$

для точки D (Рис. 3 б)

$$\bar{r}_D = \bar{r}_{O_1} + \bar{\rho}_{O_1C} + \bar{\rho}_{CD}. \quad (1.2)$$

Преобразуем (1.1) и (1.2) к виду

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AB} - \bar{\rho}_{O_1B} &= \bar{r}_{O_1} - \bar{r}_A = -\bar{\rho}_{O_1A}, \\ \bar{\rho}_{O_1C} + \bar{\rho}_{CD} &= \bar{r}_D - \bar{r}_{O_1} = \bar{\rho}_{O_1D}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

здесь $\bar{\rho}_{O_1A}$ — вектор, характеризующий положение шарнира A относительно центра O_1 ; $\bar{\rho}_{O_1D}$ — вектор, характеризующий положение шарнира D относительно центра O_1 (Рис. 3).

Проектируя (1.3) на оси декартовой системы координат, получим уравнения геометрических связей в координатной форме (Рис. 2, Рис. 3):

$$x_{AB} - x_{O_1B} = x_{O_1} - x_A = -x_{O_1A},$$

$$y_{AB} - y_{O_1B} = y_{O_1} - y_A = -y_{O_1A},$$

$$x_{O_1C} + x_{CD} = x_D - x_{O_1} = x_{O_1D},$$

$$y_{O_1C} + y_{CD} = y_D - y_{O_1} = y_{O_1D}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} AB \cos(\varphi_1) - O_1B \cos(\varphi_2) &= a - OA \cos(\varphi), \\ AB \sin(\varphi_1) - O_1B \sin(\varphi_2) &= b - OA \sin(\varphi), \\ O_1C \cos(\varphi_2) + CD \cos(\varphi_3) &= 0, \\ O_1C \sin(\varphi_2) + CD \sin(\varphi_3) &= y_D - b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В данных уравнениях учтено, что вектор \bar{r}_{O_1} является постоянным вектором и его проекции на оси декартовой системы координат равны $x_{O_1} = a$, $y_{O_1} = b$; проекция вектора \bar{r}_D на ось Ox не изменяется с течением времени и равна $x_D = a$.

В уравнениях (1.4) задаваемой функцией является закон вращения ведущего звена $\varphi(t)$, а определяемыми функциями времени являются:

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), y_D(t).$$

Система (1.4) представляет замкнутую систему уравнений для определения законов движения всех звеньев многозвенного механизма.

Решение уравнений (1.4) можно найти различными методами, как аналитическими, так и численными..

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМА

Для нахождения законов движения звеньев механизма запишем первые два уравнения системы (1.4) в следующем виде (Рис. 3 а, Рис. 4)

$$\begin{aligned} AB \cos(\varphi_1) - O_1B \cos(\varphi_2) &= a - OA \cos(\varphi) = -x_{O_1A} = -O_1A \cos \alpha, \\ AB \sin(\varphi_1) - O_1B \sin(\varphi_2) &= b - OA \sin(\varphi) = -y_{O_1A} = -O_1A \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $x_{O_1A} = O_1A \cos \alpha$, $y_{O_1A} = O_1A \sin \alpha$ — проекции вектора \bar{r}_{O_1A} на оси ко-

ординат; O_1A — модуль этого вектора

$$O_1A = \sqrt{x_{O_1A}^2 + y_{O_1A}^2} = \sqrt{OO_1^2 + OA^2 - 2 \cdot OA \cdot OO_1 \cos(\varphi - \beta)};$$

α — угол, характеризующий его направление

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{OA \sin(\varphi) - b}{OA \cos(\varphi) - a} \right], \quad \cos \alpha = \frac{OA \cos(\varphi) - a}{O_1A}, \quad \sin \alpha = \frac{OA \sin(\varphi) - b}{O_1A}$$

здесь $OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$ — модуль и направление вектора \bar{r}_{O_1} .

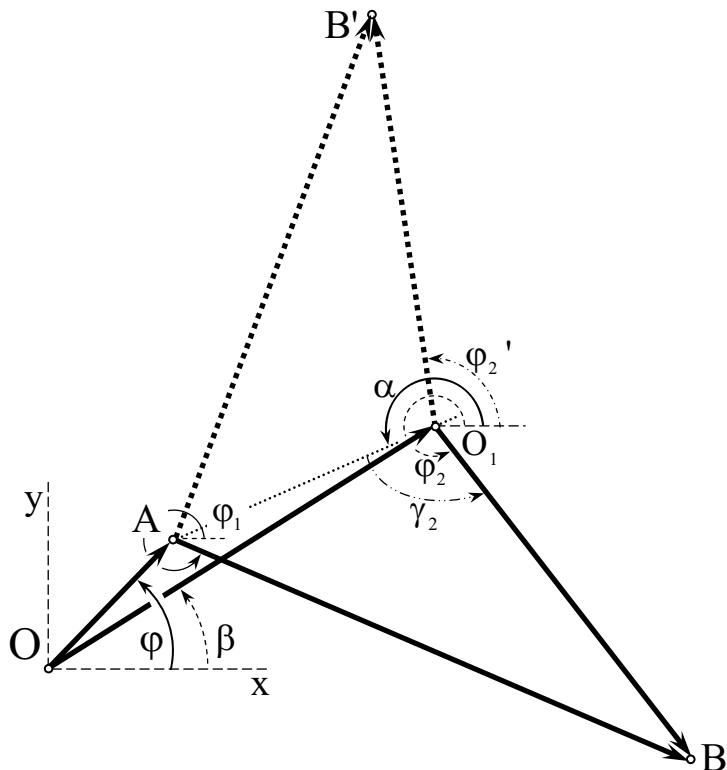


Рис. 4 Определение угловых координат звеньев

Для нахождения угловой координаты φ_2 перепишем уравнения (1.5) в следующем виде

$$\begin{aligned} AB \cos(\varphi_1) &= O_1B \cos(\varphi_2) - O_1A \cos \alpha, \\ AB \sin(\varphi_1) &= O_1B \sin(\varphi_2) - O_1A \sin \alpha, \end{aligned}$$

и воспользовавшись известной тригонометрической формулой

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

получим

$$AB^2 = O_1B^2 + O_1A^2 - 2O_1B \cdot O_1A [\cos(\varphi_2) \cos \alpha + \sin(\varphi_2) \sin \alpha],$$

Тогда, учитывая тригонометрическую формулу приведения

$$\cos(\varphi_2) \cos \alpha - \sin(\varphi_2) \sin \alpha = \cos(\varphi_2 - \alpha),$$

найдем

$$\cos(\varphi_2 - \alpha) = \frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2O_1B \cdot O_1A} = \cos \gamma_2$$

Так как $\cos \gamma_2$ является четной функцией углового аргумента, то угол φ_2 может иметь два значения

$$\varphi_2 = \gamma_2 + \alpha \text{ или } \varphi_2 = \gamma_2 - \alpha,$$

что соответствует двум положением четырехзвенника $OABO_1$ относительно O_1A при одной и той же угловой координате ведущего звена φ (Рис. 4).

Учитывая начальное положение механизма (Рис. 2) принимаем

$$\varphi_2 = \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2O_1B \cdot O_1A}\right) \quad (1.6)$$

Для нахождения угловой координаты φ_1 уравнения (1.5) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} AB \cos(\varphi_1) + O_1A \cos \alpha &= O_1B \cos(\varphi_2), \\ AB \sin(\varphi_1) + O_1A \sin \alpha &= O_1B \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

и используя процедуру, изложенную выше, получим

$$AB^2 + O_1A^2 + 2AB \cdot O_1A [\cos(\varphi_1) \cos \alpha + \sin(\varphi_1) \sin \alpha] = O_1B^2$$

или

$$\cos(\varphi_1 - \alpha) = \frac{O_1B^2 - O_1A^2 - AB^2}{2AB \cdot O_1A} = \cos \gamma_1$$

Окончательно, угловая координата φ_1 равна

$$\varphi_1 = \alpha + \arccos \left(\frac{O_1B^2 - O_1A^2 - AB^2}{2AB \ O_1A} \right) \quad (1.7)$$

Для нахождения остальных неизвестных величин используем оставшиеся два уравнения системы (1.4). Из третьего уравнения (1.4) найдем угловую координату звена CD

$$\varphi_3 = \arccos \left[-\frac{O_1C}{CD} \cos(\varphi_2) \right], \quad (1.8)$$

а из четвертого — вертикальную координату ползуна D

$$y_D = b + O_1C \sin(\varphi_2) + CD \sin(\varphi_3) \quad (1.9)$$

Уравнения (1.6) — (1.9) позволяют определить угловые координаты звеньев совершающих вращательные и плоскопараллельные движения, а также закон движения звена движущегося поступательно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ

Для определения скоростей звеньев механизма продифференцируем по времени систему уравнений (1.4) или (1.5)⁴

$$\begin{aligned} -AB \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + O_1 B \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 &= OA \sin(\varphi) \dot{\varphi}, \\ AB \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 - O_1 B \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 &= -OA \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \\ -O_1 C \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 - CD \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3 &= 0, \\ O_1 C \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 + CD \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3 &= \dot{y}_D. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Учитывая, что $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, $\dot{\varphi}_3 = \omega_3$, $\dot{y}_D = v_D$ и, перенося слагаемые с неизвестными скоростями в одну сторону, получим

$$\begin{aligned} -AB \sin(\varphi_1) \omega_1 + O_1 B \sin(\varphi_2) \omega_2 &= OA \sin(\varphi) \omega_0, \\ AB \cos(\varphi_1) \omega_1 - O_1 B \cos(\varphi_2) \omega_2 &= -OA \cos(\varphi) \omega_0, \\ -O_1 C \sin(\varphi_2) \omega_2 - CD \sin(\varphi_3) \omega_3 &= 0, \\ O_1 C \cos(\varphi_2) \omega_2 + CD \cos(\varphi_3) \omega_3 - v_D &= 0. \end{aligned}$$

Данная система уравнений является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных скоростей звеньев. Представим эту систему уравнений в матричной форме

$$A \cdot X_v = B \quad (1.11)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -AB \sin(\varphi_1) & O_1 B \sin(\varphi_2) & 0 & 0 \\ AB \cos(\varphi_1) & -O_1 B \cos(\varphi_2) & 0 & 0 \\ 0 & -O_1 C \sin(\varphi_2) & -CD \sin(\varphi_3) & 0 \\ 0 & O_1 C \cos(\varphi_2) & CD \cos(\varphi_3) & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов левых частей уравнений,

⁴ Скорости звеньев можно также найти дифференцированием соотношений (1.6) — (1.9) по времени, однако в силу его громоздкости в данной работе этот способ не применяется.

$$X_v = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_D \end{pmatrix} \text{ — вектор неизвестных скоростей звеньев,}$$

$$B = \begin{pmatrix} OA \sin(\varphi) \omega_0 \\ -OA \cos(\varphi) \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — вектор правых частей уравнений.}$$

Решение уравнений (1.11) будет иметь вид

$$X_v = A^{-1} \cdot B \quad (1.12)$$

Для определения ускорений звеньев механизма продифференцируем по времени систему уравнений (1.10)

$$\begin{aligned} -AB \sin(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - AB \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + O_1 B \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \\ + O_1 B \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 = OA \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2, \\ AB \cos(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - AB \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 - O_1 B \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \\ + O_1 B \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 = -OA \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2, \\ -O_1 C \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - O_1 C \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - CD \sin(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - \\ - CD \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 = 0, \\ O_1 C \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - O_1 C \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + CD \cos(\varphi_3) \ddot{\varphi}_3 - \\ - CD \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 = \ddot{y}_D. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$, $\ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$, $\ddot{\varphi}_3 = \varepsilon_3$, $\ddot{y}_D = a_D$ и, перенося слагаемые с неизвестными скоростями в одну сторону, получим

$$\begin{aligned} -AB \sin(\varphi_1) \varepsilon_1 + O_1 B \sin(\varphi_2) \varepsilon_2 = \\ = AB \cos(\varphi_2) \omega_1^2 - O_1 B \cos(\varphi_2) \omega_2^2 + OA \cos(\varphi) \omega_0^2, \\ AB \cos(\varphi_1) \varepsilon_1 - O_1 B \cos(\varphi_2) \varepsilon_2 = \\ = AB \sin(\varphi_2) \omega_1^2 - O_1 B \sin(\varphi_2) \omega_2^2 - OA \sin(\varphi) \omega_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-O_1C \sin(\varphi_2) \varepsilon_2 - CD \sin(\varphi_3) \varepsilon_3 &= \\
&= O_1C \cos(\varphi_2) \omega_2^2 + CD \cos(\varphi_3) \omega_3^2, \\
O_1C \cos(\varphi_2) \varepsilon_2 + CD \cos(\varphi_3) \varepsilon_3 - a_D &= \\
&= O_1C \sin(\varphi_2) \omega_2^2 + CD \sin(\varphi_3) \omega_3^2,
\end{aligned}$$

или в матричной форме

$$A \cdot X_a = C \quad (1.13)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} AB \cos(\varphi_2) \omega_1^2 - O_1B \cos(\varphi_2) \omega_2^2 + OA \cos(\varphi) \omega_0^2 \\ AB \sin(\varphi_2) \omega_1^2 - O_1B \sin(\varphi_2) \omega_2^2 - OA \sin(\varphi) \omega_0^2 \\ O_1C \cos(\varphi_2) \omega_2^2 + CD \cos(\varphi_3) \omega_3^2 \\ O_1C \sin(\varphi_2) \omega_2^2 + CD \sin(\varphi_3) \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

— вектор правых частей уравнений;

$$X_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ a_D \end{pmatrix} \text{ — вектор неизвестных ускорений звеньев}$$

Решение уравнений (1.13) будет иметь вид

$$X_a = A^{-1} \cdot C \quad (1.14)$$

Таким образом, решения (1.12) позволяют определить скорости всех звеньев механизма, а решения (1.14) — ускорения всех звеньев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК

Узловыми и задаваемыми точками многозвенного шарнирного механизма являются, согласно исходным данным точки: A, B, C, D, M и K. Закон движения, скорость и ускорение точки D определен ранее:

$$\begin{aligned}
y_D &= O_1C \sin(\varphi_2) + CD \sin(\varphi_3) + b, \\
v_D &= O_1C \cos(\varphi_2) \omega_2 + CD \cos(\varphi_3) \omega_3, \\
a_D &= O_1C \cos(\varphi_2) \varepsilon_2 + CD \cos(\varphi_3) \varepsilon_3 - O_1C \sin(\varphi_2) \omega_2^2 - CD \sin(\varphi_3) \omega_3^2.
\end{aligned} \quad (1.15)$$

Для остальных точек законы движения запишем в векторной форме:

$$\text{точка A} \quad \bar{r}_A = \overline{OA},$$

$$\text{точка B} \quad \bar{r}_B = \bar{r}_{O_1} + \bar{\rho}_{O_1 B} = \overline{OO_1} + \overline{O_1 B},$$

$$\text{точка C} \quad \bar{r}_C = \bar{r}_{O_1} + \bar{\rho}_{O_1 C} = \overline{OO_1} + \overline{O_1 C},$$

$$\text{точка M} \quad \bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{\rho}_{AM} = \overline{OA} + \overline{AM},$$

$$\text{точка K} \quad \bar{r}_K = \bar{r}_{O_1} + \bar{\rho}_{O_1 C} + \bar{\rho}_{CK} = \overline{OO_1} + \overline{O_1 C} + \overline{CK}.$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\text{точка A} \quad \text{Ox: } x_A = OA \cos(\varphi),$$

$$\text{Oy: } y_A = OA \sin(\varphi)$$

$$\text{точка B} \quad \text{Ox: } x_B = a + O_1 B \cos(\varphi_2),$$

$$\text{Oy: } y_B = b + O_1 B \sin(\varphi_2)$$

$$\text{точка C} \quad \text{Ox: } x_C = a + O_1 C \cos(\varphi_2),$$

$$\text{Oy: } y_C = b + O_1 C \sin(\varphi_2) \quad (1.16)$$

$$\text{точка M} \quad \text{Ox: } x_M = OA \cos(\varphi) + AM \cos(\varphi_1),$$

$$\text{Oy: } y_M = OA \sin(\varphi) + AM \sin(\varphi_1)$$

$$\text{точка K} \quad \text{Ox: } x_K = a + O_1 C \cos(\varphi_2) + CK \cos(\varphi_3),$$

$$\text{Oy: } y_K = b + O_1 C \sin(\varphi_2) + CK \sin(\varphi_3)$$

Дифференцированием по времени (1.16) определяем проекции скоростей точек механизма на декартовые оси координат, а также модули и направления векторов скоростей точек

$$\text{точка A} \quad \text{Ox: } v_{Ax} = \dot{x}_A = -OA \sin(\varphi) \omega_0,$$

$$\text{Oy: } v_{Ay} = \dot{y}_A = OA \cos(\varphi) \omega_0$$

$$v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = \omega_0 OA,$$

$$\cos(\bar{v}_A, \bar{i}) = \frac{v_{Ax}}{v_A} = -\sin(\varphi), \quad \cos(\bar{v}_A, \bar{j}) = \frac{v_{Ay}}{v_A} = \cos(\varphi)$$

$$\text{точка B} \quad \text{Ox: } v_{Bx} = \dot{x}_B = -O_1 B \sin(\varphi_2) \omega_2,$$

$$\text{Oy: } v_{By} = \dot{y}_B = O_1 B \cos(\varphi_2) \omega_2$$

$$v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \omega_2 O_1 B,$$

$$\cos(\bar{v}_B, \bar{i}) = \frac{V_{Bx}}{V_B} = -\sin(\varphi_2), \quad \cos(\bar{v}_B, \bar{j}) = \frac{V_{By}}{V_B} = \cos(\varphi_2)$$

точка С

$$Ox: \quad v_{Cx} = \dot{x}_C = -O_1 C \sin(\varphi_2) \omega_2,$$

$$Oy: \quad v_{Cy} = \dot{y}_C = O_1 C \cos(\varphi_2) \omega_2$$

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \omega_2 O_1 C, \quad (1.17)$$

$$\cos(\bar{v}_C, \bar{i}) = \frac{V_{Cx}}{V_C} = -\sin(\varphi_2), \quad \cos(\bar{v}_C, \bar{j}) = \frac{V_{Cy}}{V_C} = \cos(\varphi_2)$$

точка М

$$Ox: \quad v_{Mx} = \dot{x}_M = -OA \sin(\varphi) \omega_0 - AM \sin(\varphi_1) \omega_1,$$

$$Oy: \quad v_{My} = \dot{y}_M = OA \cos(\varphi) \omega_0 + AM \cos(\varphi_1) \omega_1$$

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2},$$

$$\cos(\bar{v}_M, \bar{i}) = \frac{V_{Mx}}{V_M}, \quad \cos(\bar{v}_M, \bar{j}) = \frac{V_{My}}{V_M}$$

точка К

$$Ox: \quad v_{Kx} = \dot{x}_K = -O_1 C \sin(\varphi_2) \omega_2 - CK \sin(\varphi_3) \omega_3,$$

$$Oy: \quad v_{Ky} = \dot{y}_K = O_1 C \cos(\varphi_2) \omega_2 + CK \cos(\varphi_3) \omega_3$$

$$v_K = \sqrt{\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2},$$

$$\cos(\bar{v}_K, \bar{i}) = \frac{V_{Kx}}{V_K}, \quad \cos(\bar{v}_K, \bar{j}) = \frac{V_{Ky}}{V_K}$$

Дифференцируя по времени проекции скоростей точек (1.17), определяем ускорения точек механизма:

точка А

$$Ox: \quad a_{Ax} = \ddot{v}_{Ax} = -OA \cos(\varphi) \omega_0^2,$$

$$Oy: \quad a_{Ay} = \ddot{v}_{Ay} = -OA \sin(\varphi) \omega_0^2$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \omega_0^2 OA,$$

$$\cos(\bar{a}_A, \bar{i}) = \frac{a_{Ax}}{a_A} = -\cos(\varphi), \quad \cos(\bar{a}_A, \bar{j}) = \frac{a_{Ay}}{a_A} = -\sin(\varphi)$$

точка В

$$Ox: \quad a_{Bx} = \ddot{v}_{Bx} = -O_1 B \cos(\varphi_2) \omega_2^2 - O_1 B \sin(\varphi_2) \varepsilon_2,$$

$$Oy: \quad a_{By} = \ddot{v}_{By} = -O_1 B \sin(\varphi_2) \omega_2^2 + O_1 B \cos(\varphi_2) \varepsilon_2$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = O_1 B \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2},$$

$$\cos(\bar{a}_B, \bar{i}) = \frac{a_{Bx}}{a_B}, \quad \cos(\bar{a}_B, \bar{j}) = \frac{a_{By}}{a_B}$$

точка С

$$\begin{aligned} \text{Ox: } a_{Cx} &= \dot{v}_{Cx} = -O_1 C \cos(\varphi_2) \omega_2^2 - O_1 C \sin(\varphi_2) \varepsilon_2, \\ \text{Oy: } a_{Cy} &= \dot{v}_{Cy} = -O_1 C \sin(\varphi_2) \omega_2^2 + O_1 C \cos(\varphi_2) \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$a_c = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2} = O_1 C \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}, \quad (1.18)$$

$$\cos(\bar{a}_c, \bar{i}) = \frac{a_{cx}}{a_c}, \quad \cos(\bar{a}_c, \bar{j}) = \frac{a_{cy}}{a_c}$$

точка М

$$\text{Ox: } a_{Mx} = \dot{v}_{Mx} = -\text{OA} \cos(\varphi) \omega_0^2 - \text{AM} \cos(\varphi_1) \omega_1^2 - \text{AM} \sin(\varphi_1) \varepsilon_1,$$

$$Oy: \quad a_{My} = \dot{v}_{My} = - OA \sin(\varphi) \omega_0^2 + AM \sin(\varphi_1) \omega_1^2 - AM \cos(\varphi_1) \varepsilon_1$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2},$$

$$\cos(\bar{a}_M, \bar{i}) = \frac{a_{Mx}}{a_M}, \quad \cos(\bar{a}_M, \bar{j}) = \frac{a_{My}}{a_M}$$

точка K

$$\text{Ox: } a_{Kx} = \dot{v}_{Kx} = -O_1 C \cos(\varphi_2) \omega_2^2 - O_1 C \sin(\varphi_2) \varepsilon_2 - C K \cos(\varphi_3) \omega_3^2 - C K \sin(\varphi_3) \varepsilon_3,$$

$$\text{Oy: } a_{\text{Ky}} = \dot{v}_{\text{Ky}} = -O_1 C \sin(\varphi_2) \omega_2^2 + O_1 C \cos(\varphi_2) \varepsilon_2 - C K \cos(\varphi_3) \omega_3^2 - C K \sin(\varphi_3) \varepsilon_3$$

$$a_K = \sqrt{{a_{Kx}}^2 + {a_{Ky}}^2},$$

$$\cos(\bar{a}_k, \bar{i}) = \frac{a_{Kx}}{a_k}, \quad \cos(\bar{a}_k, \bar{j}) = \frac{a_{Ky}}{a_k}$$

Соотношения (1.6) — (1.18) представляют математическую модель кинематического поведения механизма, которая позволяет определить законы движения всех звеньев механизма, координаты узловых точек, а также скорости и ускорения звеньев и узловых точек.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Расчет скоростей и ускорений точек и звеньев многозвенного шарнирного механизма будем проводить двумя методами:

- с помощью основных теорем кинематики плоского движения твердого тела;
- с помощью основных теорем кинематики составного движения точки при переносном вращательном движении.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Изобразим механизм в заданном положении (Рис. 5), при значении угла поворота ведущего звена $OA = \phi_k = 65^\circ$, в выбранном масштабе длин — M_L .

Определим точки механизма, траектории и возможные направления скоростей которых известны.

Шарнир А принадлежит шатуну АВ и кривошипу OA, совершающему вращательное движение вокруг центра О. Кривошип OA является ведущим звеном, угловая скорость которого известна. Следовательно, траектория точки А — окружность радиуса OA и скорость шарнира равна

$$v_A = \omega_0 OA = \frac{\pi}{18} \cdot 15 = 2.62 \text{ см/с}, \quad \bar{v}_A \perp OA \quad (2.1)$$

Шарнир В принадлежит шатуну АВ и кривошипу O_1B , совершающего вращательное движение вокруг подшипника O_1 . Следовательно, траектория точки В — окружность радиуса O_1B и скорость шарнира $\bar{v}_B \perp O_1B$.

Шарнир С принадлежит шатуну CD и кривошипу O_1B , совершающее вращательное движение вокруг подшипника O_1 . Следовательно, траектория точки С — окружность радиуса O_1C и скорость шарнира $\bar{v}_C \perp O_1B$.

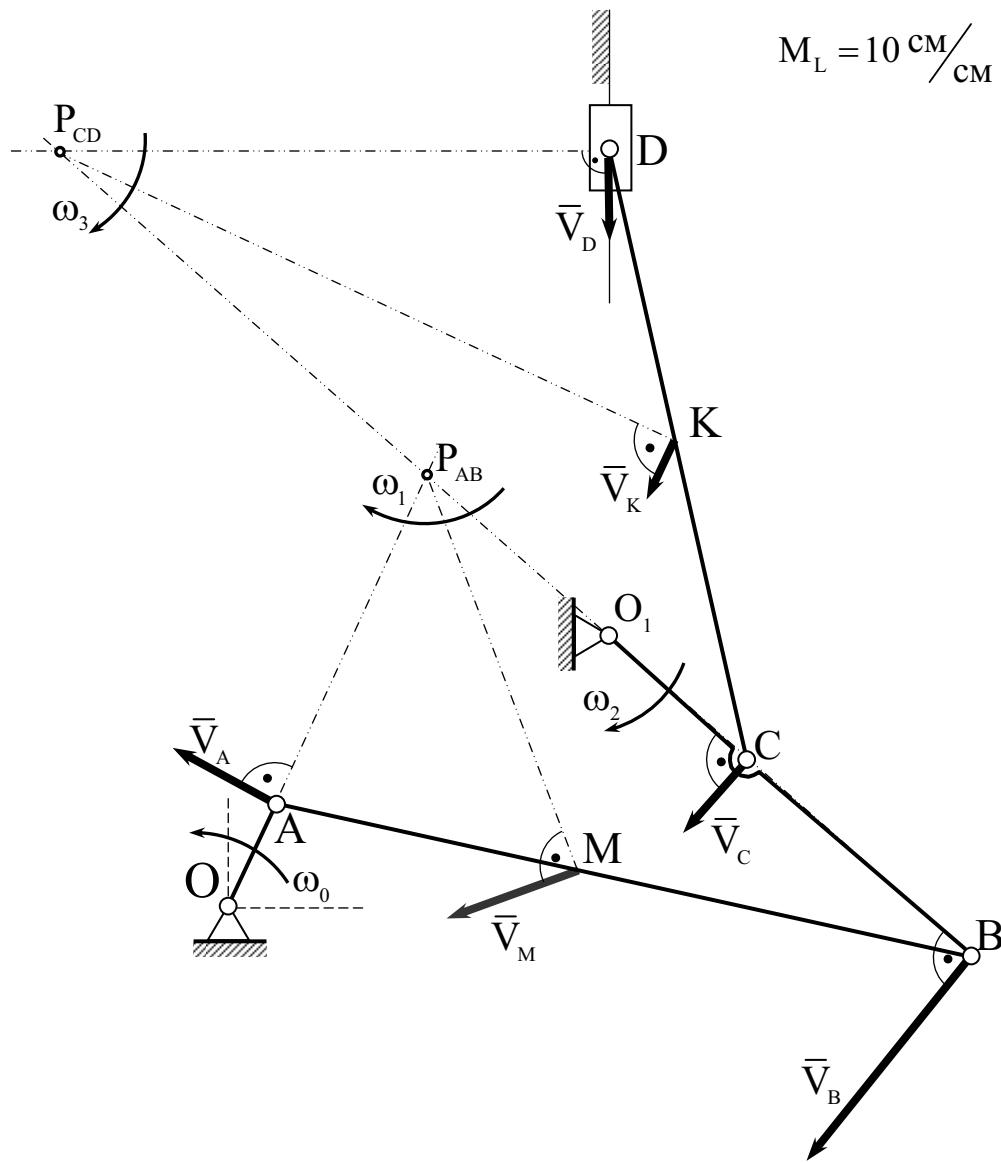


Рис. 5 Определение скоростей точек с помощью МЦС

Точка D принадлежит шатуну CD и ползуну D, совершающему возвратно поступательное движение вдоль вертикальной направляющей. Следовательно, траектория точки D — прямая линия и скорость ползуна $\bar{v}_D \parallel Oy$.

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС)

Определим положение МЦС для звеньев AB и CD, совершающих плоское движение (Рис. 5). Для этого из точки A проведем перпендикуляр

к скорости \bar{v}_A , а из точки В — перпендикуляр к возможному направлению скорости \bar{v}_B . Точка пересечения перпендикуляров — P_{AB} является МЦС звена АВ для заданного положения механизма.

Аналогично определяем положение мгновенного центра скоростей для звена CD — P_{CD} .

Измеряем на чертеже расстояния от узловых точек механизма до МЦС соответствующего звена. В соответствие с выбранным масштабом длин эти расстояния равны

$$AP_{AB} = 48 \text{ см}, \quad MP_{AB} = 55.5 \text{ см}, \quad BP_{AB} = 99 \text{ см}, \\ CP_{CD} = 132.5 \text{ см}, \quad KP_{CD} = 102 \text{ см}, \quad DP_{CD} = 85 \text{ см}$$

Так как скорость точки А известна (2.1), то мгновенную угловую скорость звена АВ вычисляем согласно выражению

$$v_A = \omega_0 OA = \omega_{AB} AP_{AB}$$

Тогда

$$\omega_{AB} = \omega_1 = \omega_0 \frac{OA}{AP_{AB}} = \frac{\pi}{18} \frac{15}{48} = 0.0545 \text{ с}^{-1}$$

Направление мгновенной угловой скорости звена определяем по направлению скорости точки А при мгновенном вращении звена вокруг МЦС.

Модули скоростей точек В и М равны

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = 0.0545 \cdot 99 = 5.400 \text{ см/с}, \quad \bar{v}_B \perp BP_{AB}, \\ v_M = \omega_{AB} MP_{AB} = 0.0545 \cdot 55.5 = 3.027 \text{ см/с}, \quad \bar{v}_M \perp MP_{AB},$$

а направление скоростей определяется направлением вращения звена АВ вокруг МЦС P_{AB} .

Угловую скорость звена O_1B вокруг подшипника O_1 определим из соотношения

$$v_B = \omega_{AB}BP_{AB} = \omega_{O_1B}O_1B \Rightarrow \omega_{O_1B} = \omega_2 = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{5.40}{66} = 0.0818 \text{ c}^{-1}$$

Скорость точки С равна

$$v_C = \omega_{O_1B}O_1C = 0.0818 \cdot 25 = 2.045 \text{ c}^{-1}, \quad \bar{v}_C \perp CP_{CD}$$

Мгновенную угловую скорость звена CD вокруг определим из соотношения

$$v_C = \omega_{CD}CP_{CD} = \omega_{O_1B}O_1C \Rightarrow \omega_{CD} = \omega_3 = \frac{v_C}{CP_{CD}} = \frac{2.045}{132.5} = 0.0154 \text{ c}^{-1},$$

а модули скоростей точек D и K выражениями

$$\begin{aligned} v_D &= \omega_{CD}DP_{CD} = 0.0154 \cdot 85 = 1.309 \text{ cm/s}, \quad \bar{v}_D \perp DP_{CD}, \\ v_K &= \omega_{CD}KP_{CD} = 0.0154 \cdot 102 = 1.571 \text{ cm/s}, \quad \bar{v}_K \perp KP_{CD} \end{aligned}$$

Направление скоростей точек \bar{v}_D , \bar{v}_K определяется направлением мгновенного вращения звена CD вокруг МЦС — P_{CD} .

На Рис. 5 изображены угловые скорости звеньев и векторы скоростей узловых точек в выбранном масштабе скоростей M_v .

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью теоремы о сложении скоростей

При неизвестной угловой скорости твердого тела совершающего плоскопараллельное движение теорему о сложении скоростей можно применять для тех точек звена, у которого известны: для одной — модуль и направление вектора скорости, а для другой — возможное направление вектора скорости, т.е. траектория движения.

Так как для звена AB вектор скорости шарнира A известен и по модулю и по направлению (2.1), а для шарнира B известна траектория движения, запишем теорему о сложении скоростей для точки B, приняв точку A за полюс:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (2.2)$$

где $v_A = \omega_0 OA = 2.62 \text{ см/с}$, $\bar{v}_A \perp OA$ — скорость полюса,
 $v_{BA} = \omega_{AB} AB = ?$, $\bar{v}_{BA} \perp AB$ — скорость точки В при вращательном движении звена АВ вокруг полюса А. (относительная скорость точки В в поступательном переносном движении)

Изображаем в выбранном масштабе скоростей M_v (Рис. 6) векторный треугольник скоростей, соответствующий уравнению (2.2).

Откладываем в точке В вектор скорости полюса — \bar{v}_A . Из конца вектора \bar{v}_A проводим возможное направление вектора \bar{v}_{BA} — прямую, перпендикулярную звену АВ. Из точки В проводим направление вектора $\bar{v}_B \perp O_1B$ до пересечения с прямой, определяющей направление вектора \bar{v}_{BA} . В точке пересечения данных прямых сходятся концы неизвестных векторов \bar{v}_{BA} и \bar{v}_B .

Измеряя указанные векторы, в соответствии с выбранным масштабом скоростей, получаем

$$v_B = 5.53 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad v_{BA} = 5.47 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

Угловая скорость звена АВ равна

$$\omega_{AB} = \omega_1 = \frac{v_{BA}}{BA} = 0.0603 \text{ с}^{-1}$$

Так как угловая скорость звена найдена, для точки М можно записать теорему о сложении скоростей, приняв точку А за полюс:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$$

где $v_A = \omega_0 OA = 2.62 \text{ см/с}$, $\bar{v}_A \perp OA$,
 $v_{MA} = \omega_{AB} AM = 2.53 \text{ см/с}$, $\bar{v}_{MA} \perp AB$

$$M_V = 1 \frac{\text{см}}{\text{см}}$$

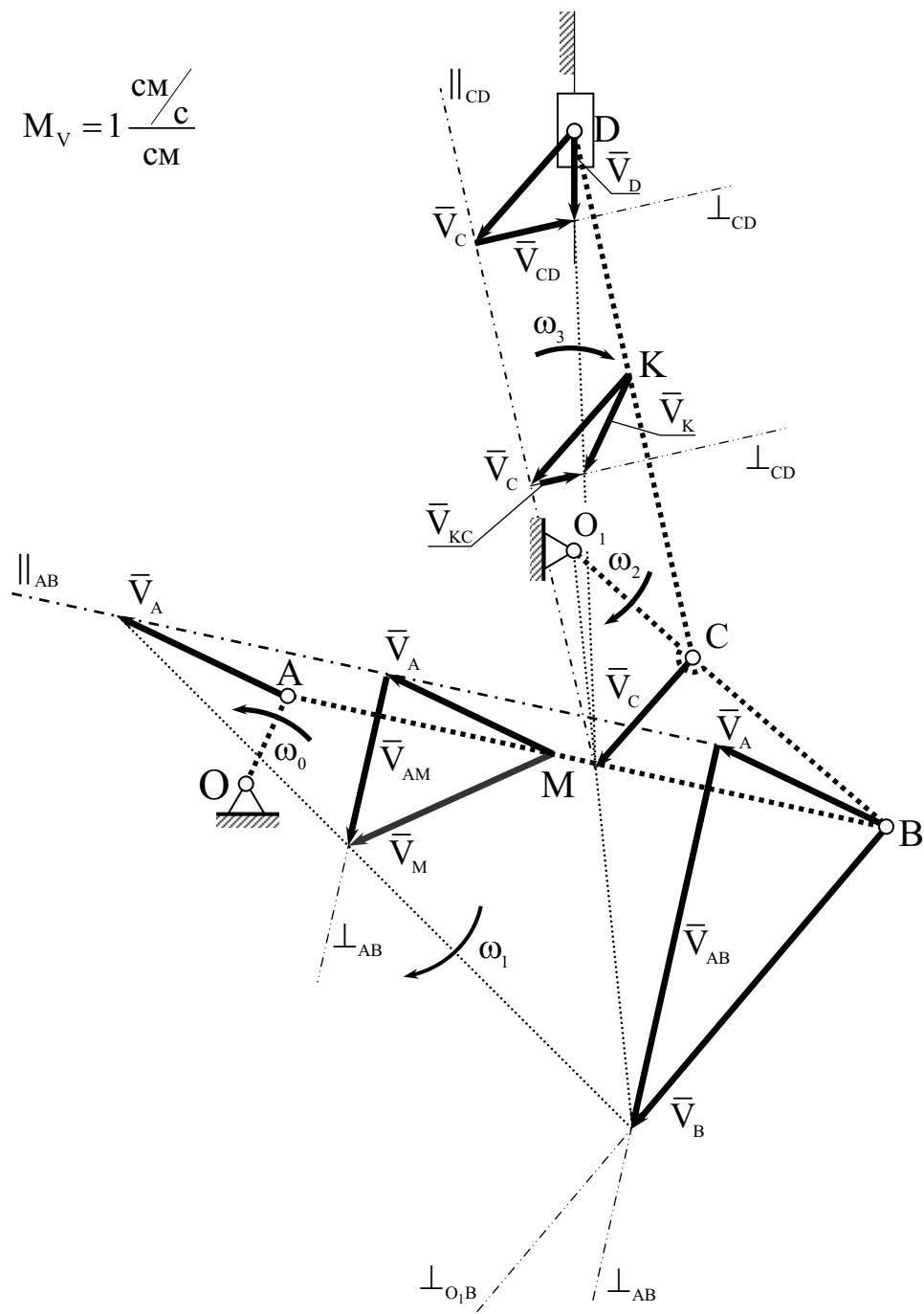


Рис. 6 Определение скоростей с помощью теоремы о сложении скоростей в плоском движении.

Для нахождения скорости \bar{v}_M изображаем в точке М вектор скорости полюса — \bar{v}_A , а из его конца проводим перпендикулярно АВ вектор относительной скорости \bar{v}_{MA} (Рис. 6). Соединяя точку М с концом вектора \bar{v}_{MA} , находим вектор скорости точки М — \bar{v}_M . После измерения получим

$$v_M = 3.13 \text{ см/с}$$

Угловая скорость звена O_1B равна

$$\omega_{O_1B} = \omega_2 = \frac{V_B}{O_1B} = 0.0838 \text{ с}^{-1}$$

Следовательно, скорость точки С равна

$$v_C = \omega_{O_1B} O_1C = 2.07 \text{ см/с}, \quad \bar{v}_C \perp O_1B$$

Приняв точку С за полюс, применим теорему о сложении скоростей к точке D звена CD, траектория которой известна

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}$$

здесь $v_{DC} = \omega_{CD} CD = ? \text{ см/с}$, $\bar{v}_{CD} \perp CD$ – относительная скорость точки D.

Скорости \bar{v}_D , \bar{v}_{DC} определяем графически, аналогично методу, изложенному ранее, построив в масштабе треугольник скоростей (Рис. 6)

$$v_D = 1.33 \text{ см/с}, \quad v_{DC} = 1.33 \text{ см/с}$$

Следовательно, угловая скорость звена CD равна

$$\omega_{CD} = \omega_3 = \frac{V_{DC}}{CD} = 0.0155 \text{ с}^{-1}$$

Скорость точки K вычисляем по аналогии с определением скорости точки M.

$$\bar{v}_K = \bar{v}_C + \bar{v}_{KC}$$

где $v_C = 2.067 \text{ см/с}$, $\bar{v}_C \perp O_1B$,
 $v_{KC} = \omega_{CD} CK = 0.73 \text{ см/с}$, $\bar{v}_{KC} \perp CD$

В этом случае (Рис. 6)

$$v_K = 1.60 \text{ см/с}$$

Следующий метод, являющийся графической интерпретацией теоремы о сложении скоростей, называется планом скоростей. Особенностью

метода является возможность быстрого определения скорости любой точки механизма.

Построим план скоростей в масштабе M_{v_i} (Рис. 7).

Из произвольно выбранного полюса O проводим луч Oa , изображающий в выбранном масштабе скорость точки A — \bar{v}_A . Для определения скорости точки B через полюс O проводим прямую, параллельную скорости \bar{v}_B ($\bar{v}_B \perp O_1B$), а через точку "a" — прямую, перпендикулярную AB , т.е. параллельную скорости \bar{v}_{BA} . Получаем точку "b"; отрезок Ob определяет скорость точки B , а отрезок ab — скорость \bar{v}_{BA} . Измеряя длину лучей Ob , ab и, пользуясь масштабом скоростей находим

$$v_B = 5.30 \text{ см/с}, \quad v_{BA} = 5.53 \text{ см/с}$$

Для определения угловой скорости звена AB найдем с учетом выбранного масштаба скоростей отношение

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB} = 0.057 \text{ с}^{-1}$$

Для определения скорости точки M делим отрезок ab плана скоростей в отношении

$$\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB}$$

Луч Om изображает скорость точки M — \bar{v}_M , а отрезок am — относительную скорость \bar{v}_{MA} . Пользуясь масштабом скоростей, получаем

$$v_M = 3.00 \text{ см/с}, \quad v_{MA} = 2.40 \text{ см/с}$$

Продолжая построение плана скоростей на Рис. 7, находим скорости точек \bar{v}_A , \bar{v}_B , \bar{v}_M , \bar{v}_C , \bar{v}_D , \bar{v}_K , а также угловые скорости звеньев $\omega_{AB} = \omega_1$, $\omega_{O_1B} = \omega_2$, $\omega_{CD} = \omega_3$.

$$\begin{aligned}
 v_c &= 2.00 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad \omega_{O_1B} = 0.08 \text{ с}^{-1}, \\
 v_d &= 1.30 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad \omega_{CD} = 0.0151 \text{ с}^{-1}, \\
 v_k &= 1.53 \frac{\text{см}}{\text{с}}.
 \end{aligned}$$

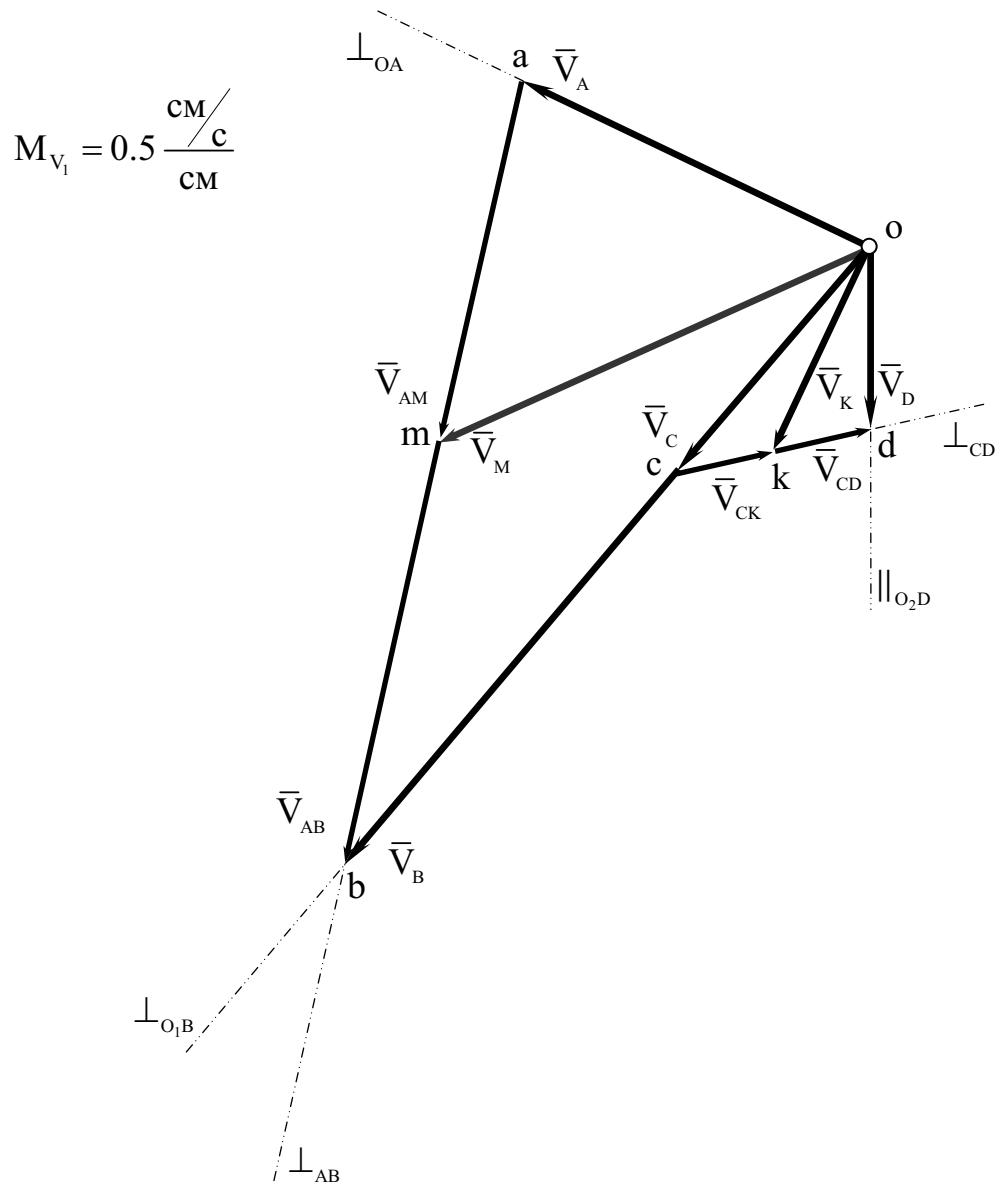


Рис. 7 План скоростей

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью теоремы о сложении ускорений

Ускорения точек и угловые ускорения звеньев, совершающих плоское параллельное движение, будем определять с использованием теоремы о сложении ускорений в плоском движении. Данную теорему реализуем графически, в виде отдельных многоугольников ускорений на схеме механизма (Рис. 8) и с помощью плана ускорений (Рис. 9), построенных в масштабе ускорений M_A .

Вращение ведущего звена OA является равномерным с угловой скоростью $\omega_0 = \pi/18 \text{ c}^{-1}$, поэтому полное ускорение точки A равно ее центробежной составляющей

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\text{II}}, \quad a_A^{\text{II}} = \omega_0^2 OA = \left(\frac{\pi}{18} \right)^2 \cdot 15 = 0.4569 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_A^{\text{II}} \rightarrow (\cdot)O \quad (2.3)$$

Определение ускорений начинаем с точки B, траектория которой известна. Взяв за полюс точку A, применим, с учетом (2.3), теорему о сложении ускорений к точке B звена AB:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A^{\text{II}} + \bar{a}_{BA}^{\text{II}} + \bar{a}_{BA}^{\text{BP}} \quad (2.4)$$

где \bar{a}_{BA} — ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A.

\bar{a}_{BA}^{II} — центробежное ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A.

\bar{a}_{BA}^{BP} — вращательное ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг полюса A.

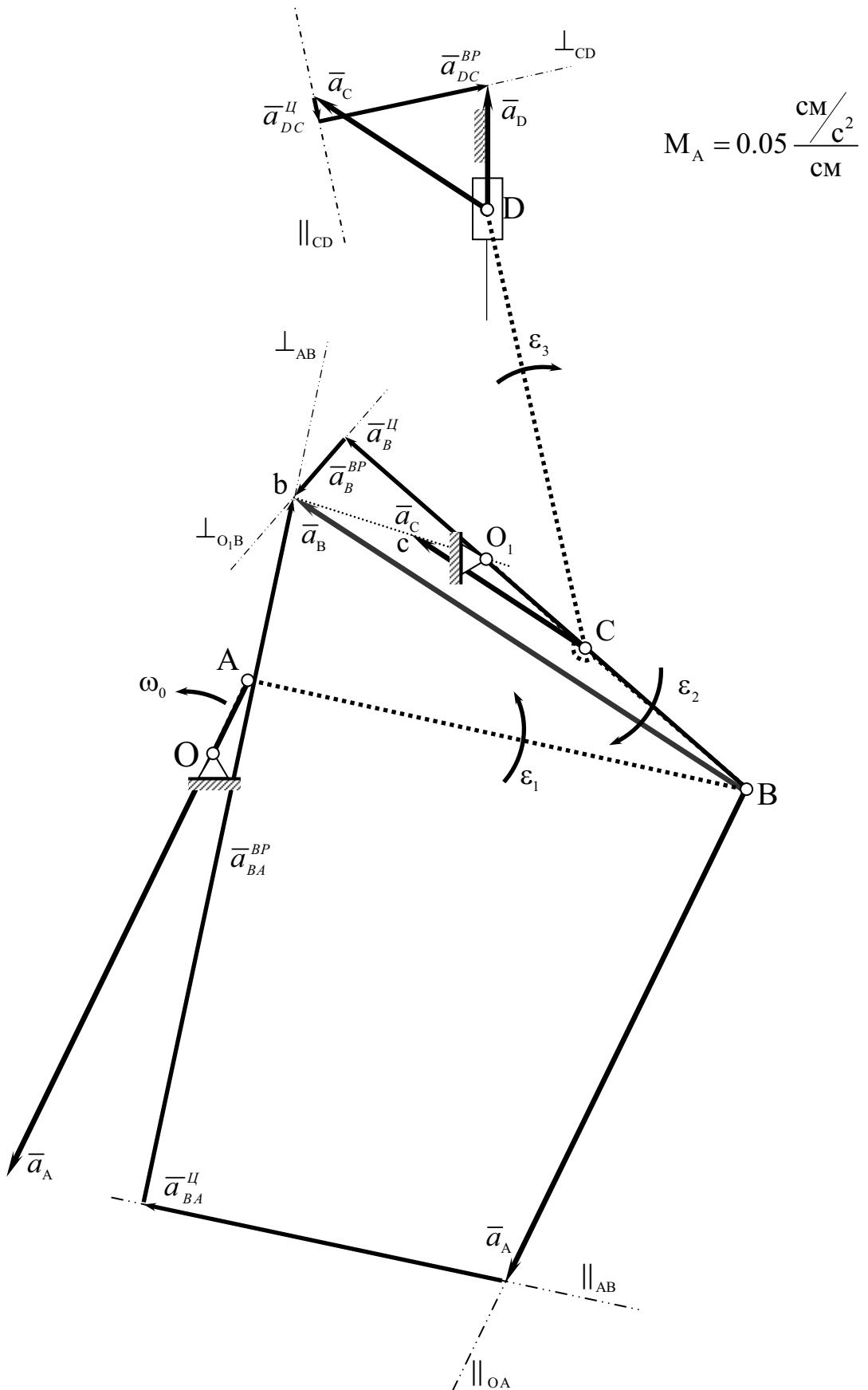


Рис. 8 Определение ускорений.

Для точки В звена О₁В имеем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^{\text{II}} + \bar{a}_B^{\text{BP}} \quad (2.5)$$

где \bar{a}_B^{II} — центростремительное ускорение точки В при вращательном движении звена О₁В.

\bar{a}_B^{BP} — вращательное ускорение точки В при вращательном движении звена О₁В.

Приравнивая (2.4) и (2.5), получим векторное уравнение, которое решаем графически с учетом выбранного масштаба ускорений (Рис. 8):

$$\bar{a}_B^{\text{II}} + \bar{a}_B^{\text{BP}} = \bar{a}_A^{\text{II}} + \bar{a}_{BA}^{\text{II}} + \bar{a}_{BA}^{\text{BP}}$$

Здесь $a_{BA}^{\text{II}} = \omega_{AB}^2 AB = 0.3151 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $\bar{a}_{BA}^{\text{II}} \parallel AB \rightarrow (\cdot) A$

$$a_{BA}^{\text{BP}} = \varepsilon_{AB} AB = ? \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_{BA}^{\text{BP}} \perp AB$$

$$a_B^{\text{II}} = \omega_{O_1B}^2 O_1B = 0.4255 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_B^{\text{II}} \parallel O_1B \rightarrow (\cdot) O_1$$

$$a_B^{\text{BP}} = \varepsilon_{O_1B} O_1B = ? \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_B^{\text{BP}} \perp O_1B$$

Построив в точке В механизма замкнутый многоугольник ускорений на Рис. 8 в масштабе ускорений, измеряем значения неизвестных векторов:

$$a_B^{\text{BP}} = 0,0620 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \quad a_{BA}^{\text{BP}} = 0.6078 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \quad a_B = 0.4502 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Построение многоугольника ускорений проводим следующим образом:

Из точки В проводим, в масштабе ускорений, вектор ускорения полюса $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\text{II}}$.

Из конца вектора \bar{a}_A^{II} откладываем параллельно ВА вектор ускорения \bar{a}_{BA}^{II} , из конца которого проводим линию $\perp AB$, определяющую возможное направление вектора \bar{a}_{BA}^{BP} .

Из точки В, в направлении прямой ВО₁, откладываем вектор \bar{a}_B^{II} , а из его конца линию перпендикулярную О₁В, определяющую возможное направление вектора \bar{a}_B^{BP} .

Данная линия проводится до пересечения с прямой, перпендикулярной АВ, характеризующей направление вектора \bar{a}_{BA}^{BP} .

Точка “b” пересечения этих прямых является точкой, в которой сходятся концы векторов \bar{a}_{BA}^{BP} , \bar{a}_B^{BP} и \bar{a}_B .

Угловые ускорения звеньев определяем по формулам

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^{\text{BP}}}{AB} = 0.063 \text{ c}^{-2},$$

$$\varepsilon_{O_1B} = \varepsilon_2 = \frac{a_B^{\text{BP}}}{O_1B} = 0.0009 \text{ c}^{-2}$$

Направления угловых ускорений, которые определяем по направлению векторов \bar{a}_{BA}^{BP} и \bar{a}_B^{BP} соответственно, показаны на Рис. 8.

Полное ускорение точки С звена О₁В, совершающего вращательное движение, определим по формуле

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^{\text{II}} + \bar{a}_C^{\text{BP}}$$

Здесь $a_C^{\text{II}} = \omega_{O_1B}^2 O_1C = 0.1612 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $\bar{a}_C^{\text{II}} \parallel O_1B \rightarrow (\cdot)O_1$,

$$a_C^{\text{BP}} = \varepsilon_{O_1B} O_1C = 0.0225 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_C^{\text{BP}} \perp O_1B,$$

$$a_C = O_1C \sqrt{\omega_{O_1B}^4 + \varepsilon_{O_1B}^2} = 0.1724 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \gamma_2 = \arctg \left(\frac{\varepsilon_{O_1B}}{\omega_{O_1B}^2} \right) = 8^\circ$$

Изображаем вектор \bar{a}_C в масштабе ускорений M_A на Рис. 8.

Ускорение точки D звена CD определим с использованием теоремы о сложении ускорений, приняв точку С за полюс

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC} = \bar{a}_C^{\text{II}} + \bar{a}_C^{\text{BP}} + \bar{a}_{DC}^{\text{II}} + \bar{a}_{DC}^{\text{BP}}$$

Здесь $a_{DC}^{\text{II}} = \omega_{CD}^2 CD = 0.0196 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $\bar{a}_{DC}^{\text{II}} \parallel CD \rightarrow (\cdot)C$,

$$a_{DC}^{\text{BP}} = \varepsilon_{CD} CD = ? \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_{DC}^{\text{BP}} \perp CD,$$

$$a_D = ? \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \bar{a}_D \parallel Oy.$$

Аналогично способу, изложенному ранее, изображаем многоугольник ускорений для точки D (Рис. 8). Измеряя неизвестные векторы, получаем значения ускорений:

$$a_{DC}^{\text{BP}} = 0.1433 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; a_D = 0.1018 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Затем вычисляем угловое ускорение звена CD

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_3 = \frac{a_{DC}^{\text{BP}}}{CD} = 0.0017 \frac{\text{с}^{-2}}{\text{с}^2},$$

и изображаем его направление на Рис. 8.

Для определения ускорений точек М и К строим план ускорений (Рис. 9).

Построение плана ускорений проводим следующим образом:

Из произвольной точки О проводим, в масштабе ускорений M_A , отрезок oa, определяющий модуль и направление вектора ускорения полюса $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\text{II}}$. Из конца вектора \bar{a}_A^{II} откладываем вектор ускорения \bar{a}_{BA}^{II} , из конца которого проводим линию $\perp AB$, определяющую возможное направление вектора \bar{a}_{BA}^{BP} .

Из точки О, в направлении прямой O_1B , откладываем вектор \bar{a}_B^{II} , а из его конца линию, определяющую возможное направление вектора \bar{a}_B^{BP} .

Данная линия проводится до пересечения с прямой, перпендикулярной AB, характеризующей направление вектора \bar{a}_{BA}^{BP} .

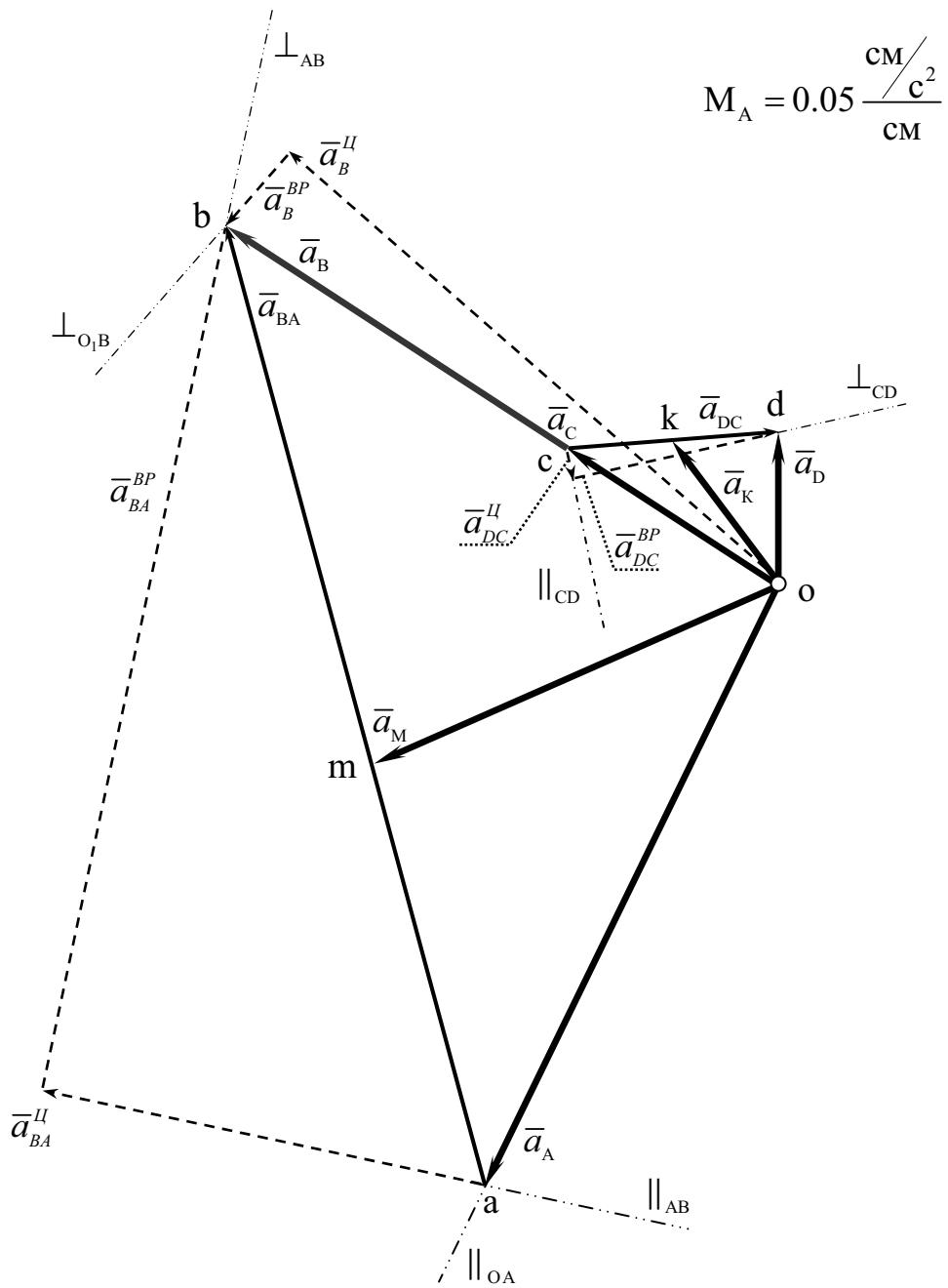


Рис. 9 План ускорений.

Точка пересечения этих прямых “*b*” является точкой, в которой сходятся концы векторов \bar{a}_{BA}^{BP} , \bar{a}_B^{BP} и \bar{a}_B . Отрезок *ob* определяет модуль и направление вектора ускорения точки *B*.

Для нахождения ускорения точки *M* звена *AB* разделим отрезок *ab* точкой “*m*” в соотношении

$$\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB} = \frac{a_{MA}}{a_{BA}}.$$

Измеряя длины отрезков am и om , вычисляем, с использованием масштаба ускорений, ускорения

$$a_{MA} = M_A \cdot am = 0,2923 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad a_M = M_A \cdot om = 0,3029 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Треугольник oam на плане ускорений определяет теорему о сложении ускорений для точки M

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^{II} + \bar{a}_{MA}^{II} + \bar{a}_{MA}^{BP}$$

Ускорение точки C определим, разделив отрезок ob на плане ускорений в соотношении

$$\frac{oc}{ob} = \frac{O_1C}{O_1B} = \frac{a_C}{a_B}.$$

Измеряя длину отрезка oc , получим

$$a_C = M_A \cdot oc = 0,1667 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Для нахождения ускорения точки D проведем из точки C отрезок, задающий, в масштабе ускорений, модуль и направление вектора \bar{a}_{DC}^{II} , а из его конца линию, определяющую направление ускорения \bar{a}_{DC}^{BP} .

Поскольку траектория ползуна D — прямая параллельная оси Oy , ускорение точки D направлено вдоль траектории. Из точки O плана ускорений проводим линию, характеризующую направление ускорения ползуна D .

Точка “ d ”, полученная в результате пересечения проведенных линий определяет концы векторов ускорений \bar{a}_D , \bar{a}_{DC}^{BP} и \bar{a}_{DC} . Измеряя в масштабе ускорений, получим:

$$a_{DC} = M_A \cdot cd = 0,1387 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad a_D = M_A \cdot od = 0,1008 \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

$$a_{DC}^{BP} = 0,1373 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \varepsilon_{DC} = \varepsilon_3 = \frac{a_{DC}^{BP}}{CD} = 0,0016 \text{ с}^{-2}$$

Ускорение точки К получим по аналогии с определением ускорения точки М звена АВ. Имеем

$$\frac{ck}{cd} = \frac{CK}{CD} = \frac{a_{KC}}{a_{DC}}.$$

Измеряя длины отрезков ck и ok, вычисляем, с использованием масштаба ускорений, ускорения

$$a_{KC} = M_A \cdot ck = 0,0758 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad a_K = M_A \cdot ok = 0,1167 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СОСТАВНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Изобразим механизм в заданном положении (Рис. 10), при значении угла поворота ведущего звена $OA = \varphi_k = 65^\circ$, в выбранном масштабе длин — M_L . Изображенный на рисунке механизм составлен из двух базовых механизмов: шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ и кривошипно-шатунного механизма O_1CD , в каждом из которых шатуны AB и CD совершают плоское движение, а кривошипы OA и O_1C вращательное движение вокруг неподвижных осей Oz и O_1z соответственно.

Определим, измерив в масштабе длины M_L , положения узловых точек базовых механизмов:

$$OA = 15 \text{ см}, \quad OM = 48 \text{ см}, \quad OB = 102 \text{ см}, \\ O_1C = 25 \text{ см}, \quad O_1K = 35.5 \text{ см}, \quad O_1D = 68 \text{ см}.$$

Для определения скоростей и ускорений этих точек, а также угловых скоростей и ускорений звеньев представим плоское движение шатунов AB и CD в виде двух вращений.

В качестве переносного вращения примем:

для шатуна AB — вращение вместе с кривошипом OA вокруг неподвижной оси Oz с переносной угловой скоростью

$$\omega_{AB}^e = \omega_0 = \frac{\pi}{18} \text{ с}^{-1};$$

для шатуна CD — вращение вместе с кривошипом O_1C вокруг неподвижной оси O_1z с неизвестной пока переносной угловой скоростью

$$\omega_{CD}^e = \omega_2.$$

Относительным вращением в этом случае является:

для шатуна AB — вращение звена вокруг подвижной оси Az с относительной угловой скоростью ω_{AB}^r ;

для шатуна CD — вращение звена вокруг подвижной оси Cz с относительной угловой скоростью ω_{CD}^r ;

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью теоремы о сложении скоростей при переносном вращательном движении

Так как закон движения кривошипа OA задан, а для шарнира B известна траектория движения, вычисление скоростей начинаем с точки B, вектор скорости которой, определим согласно теореме о сложении скоростей при составном движении:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_B^e + \bar{v}_B^r \quad (2.6)$$

где $v_B^e = \omega_{AB}^e OB = \omega_0 OB = 17.8 \text{ см/с}$, $\bar{v}_B^e \perp OB$ — переносная скорость точки B,
 $v_B^r = \omega_{AB}^r OB = ?$, $\bar{v}_B^r \perp AB$ — относительная скорость точки B,
 $v_B = ?$, $\bar{v}_B \perp O_1B$ — абсолютная скорость точки B.

Направление переносной скорости \bar{v}_B^e , определяется направлением угловой переносной скорости и показано на Рис. 10.

Решение уравнения (2.6) найдем графически, построив векторный треугольник скоростей (Рис. 10).

Для этого, из точки B проводим вектор переносной скорости — \bar{v}_B^e .

Из конца вектора \bar{v}_B^e проводим линию, перпендикулярную звену AB, характеризующую возможное направление вектора относительной скорости \bar{v}_B^r .

Из точки В проводим перпендикуляр к кривошипу O_1B , который определяет возможное направление абсолютной скорости шарнира В, до пересечения с прямой, характеризующей направление вектора \bar{V}_B^r .

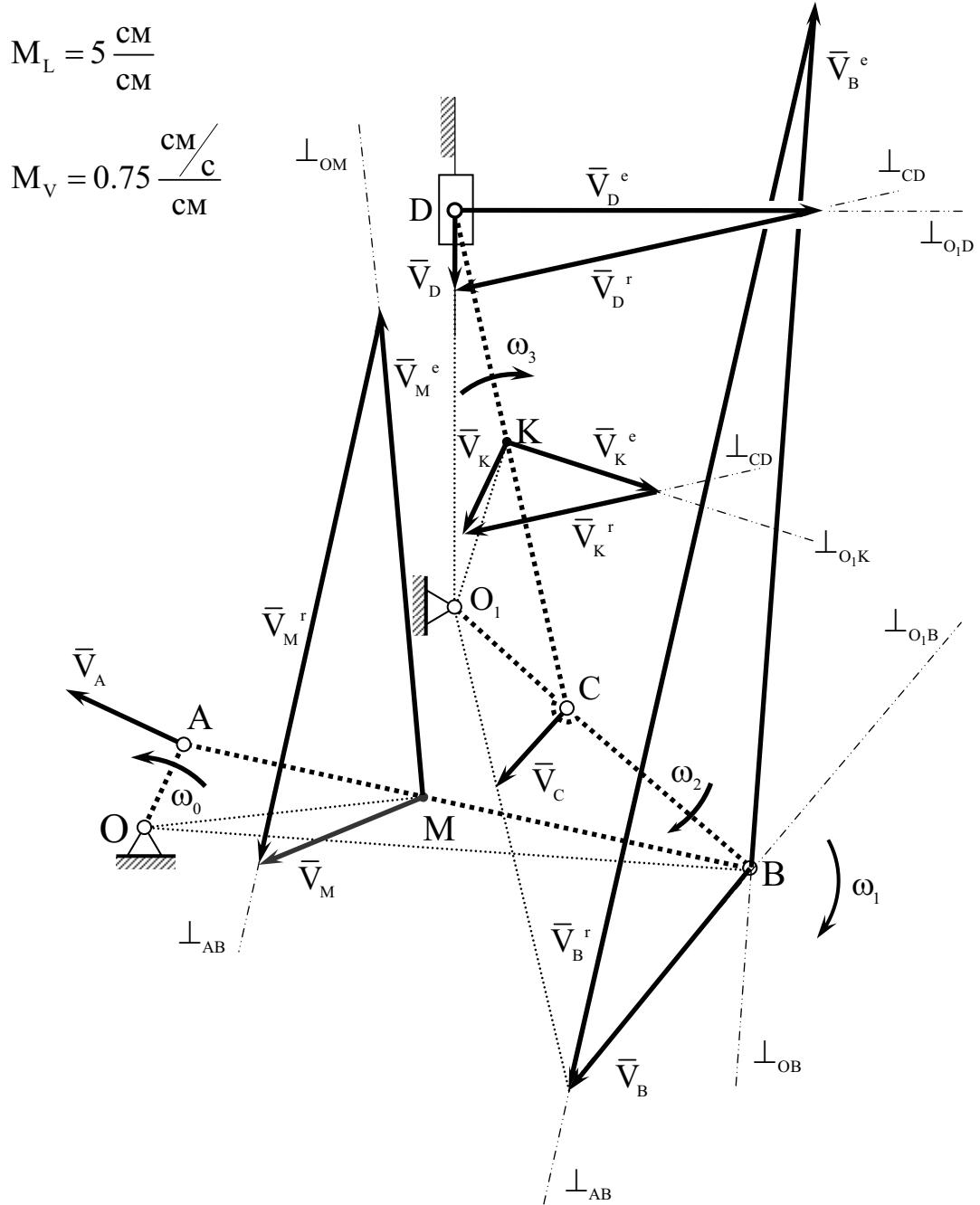


Рис. 10 Определение скоростей точек механизма.

Точка пересечения данных прямых определяет концы неизвестных векторов относительной \bar{V}_B^r и абсолютной \bar{V}_B скорости шарнира В

Измеряя указанные векторы, в соответствии с выбранным масштабом скоростей, получаем

$$v_B = 5.4 \text{ см/с}, \quad v_B^r = 22.4 \text{ см/с}, \quad \omega_{AB}^r = \frac{v_B^r}{AB} = 0.2306 \text{ с}^{-1}$$

Направление относительной угловой скорости шатуна АВ, определяемое направлением относительной скорости точки В — \bar{v}_B^r , показано на Рис. 10. Так как относительная ω_{AB}^r и переносная ω_{AB}^e угловые скорости направлены в разные стороны, то абсолютная угловая скорость ω_{AB} звена АВ равна

$$\omega_{AB} = \omega_1 = \omega_{AB}^e - \omega_{AB}^r = -0.056 \text{ с}^{-1}.$$

Знак “–” у величины угловой скорости шатуна АВ показывает, что ω_{AB} направлено по часовой стрелке. Мгновенный центр вращения звена АВ лежит на прямой ОА и его положение определяется соотношением

$$OP \cdot \omega_{AB}^e = (OA + AP) \cdot \omega_{AB}^e = AP \cdot \omega_{AB}^r.$$

Разрешая данное уравнение относительно неизвестной AP, получим

$$AP = \frac{OA}{\frac{\omega_{AB}^r}{\omega_{AB}^e} - 1} = 47 \text{ см}.$$

Величина AP определяет положение мгновенного центра вращения звена АВ (МЦС) при заданном положении механизма.

Зная величину и направление относительной угловой скорости звена АВ, скорость точки М найдем из уравнения

$$\bar{v}_M = \bar{v}_M^e + \bar{v}_M^r \quad (2.7)$$

где $v_M^e = \omega_{AB}^e OM = 8.38 \text{ см/с}$, $\bar{v}_M^e \perp OM$ — переносная скорость,

$v_M^r = \omega_{AB}^r AM = 9.68 \text{ см/с}$, $\bar{v}_M^r \perp AM$ — относительная скорость,

$$\bar{v}_M = ?, \quad -\text{абсолютная скорость.}$$

Направление векторов переносной \bar{v}_M^e и относительной \bar{v}_M^r скоростей точки М показано на Рис. 10. Решение уравнения (2.7) найдем, построив векторный треугольник скоростей. Измерением получено

$$v_M = 3.05 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Угловую скорость звена O_1B найдем по формуле

$$\omega_2 = \omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = 0.0819 \frac{1}{\text{с}}.$$

Скорости точек D и K, а также относительную и абсолютную угловые скорости звена CD найдем аналогично. Построив треугольники скоростей для этих точек (Рис. 10) и измеряя неизвестные векторы, получим

$$\begin{aligned} v_D^r &= 5.74 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad v_D^e = 5.59 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad v_D = 1.31 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \\ \omega_{CD}^r &= 0.0667 \frac{1}{\text{с}}, \\ v_K^r &= 2.58 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad v_K^e = 3.14 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad v_K = 1.55 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \\ \omega_3 &= \omega_{CD} = \omega_{CD}^e - \omega_{CD}^r = -0.0152 \frac{1}{\text{с}} \end{aligned}$$

Знак “–” у величины угловой скорости шатуна CD показывает, что ω_{CD} направлено по часовой стрелке. Мгновенный центр вращения звена CD лежит на прямой O_1C и его положение определяется соотношением

$$O_1P \cdot \omega_{CD}^e = CP \cdot \omega_{CD}^r = (O_1C + O_1P) \cdot \omega_{CD}^r.$$

Разрешая данное уравнение относительно неизвестной O_1P , получим

$$O_1P = \frac{O_1C}{\frac{\omega_{CD}^e}{\omega_{CD}^r} - 1} = 109.7 \text{ см}.$$

Величина O_1P определяет положение мгновенного центра вращения звена CD (МЦС) при заданном положении механизма.

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью теоремы о сложении ускорений при переносном вращательном движении

Так как для шарнира В известна траектория движения, а закон движения кривошипа ОА задан, вычисление ускорений начинаем с точки В. Абсолютное ускорение точки В определим согласно теореме о сложении ускорений при непоступательном переносном движении:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^e + \bar{a}_B^r + \bar{a}_B^c = \bar{a}_B^{eII} + \bar{a}_B^{eBP} + \bar{a}_B^{rII} + \bar{a}_B^{rBP} + \bar{a}_B^c \quad (2.8)$$

где $\bar{a}_B^e = \bar{a}_B^{eII} + \bar{a}_B^{eBP}$ – переносное ускорение точки,

$\bar{a}_B^r = \bar{a}_B^{rII} + \bar{a}_B^{rBP}$ – относительное ускорение точки,

$\bar{a}_B^c = 2 \bar{\omega}_{AB}^e \times \bar{v}_B^r$ $\bar{a}_B^c \perp \bar{v}_B^r$ – ускорение Кориолиса,

$$a_B^c = 2 \omega_{AB}^e v_B^r = 7.81 \text{ см/с}^2,$$

$$a_B^{eII} = (\omega_{AB}^e)^2 OB = 3.10 \text{ см/с}^2 \quad \bar{a}_B^{eII} \Rightarrow (\cdot) O \parallel OB \quad \text{– переносное}$$

центробежительное ускорение точки,

$$a_B^{eBP} = \varepsilon_{AB}^e OB = 0, \text{ т.к.} \quad \omega_{AB}^e = \text{const} \quad \text{– переносное}$$

вращательное ускорение точки,

$$a_B^{rII} = (\omega_{AB}^r)^2 AB = 5.16 \text{ см/с}^2 \quad \bar{a}_B^{rII} \Rightarrow (\cdot) A \parallel AB \quad \text{– относительное}$$

центробежительное ускорение точки,

$$a_B^{rBP} = \varepsilon_{AB}^r AB = ? \quad \bar{a}_B^{rBP} \perp AB \quad \text{– относительное}$$

вращательное ускорение точки.

Направление ускорения Кориолиса \bar{a}_B^c , которое можно определить по правилу векторного произведения векторов или методом Жуковского, показано на Рис. 11.

В уравнении (2.8) учтено, что переносное и относительное движения шатуна АВ являются вращениями вокруг осей Oz и Az соответственно.

Поскольку абсолютное движение кривошипа O_1B — вращение вокруг оси O_1Z , то абсолютное ускорение точки B можно записать в виде

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^{\text{II}} + \bar{a}_B^{\text{BP}} \quad (2.9)$$

где $\bar{a}_B^{\text{II}} = \omega_2^2 O_1B = 0.443 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ $\bar{a}_B^{\text{II}} \Rightarrow (\cdot)O_1 \parallel O_1B$

— центростремительная составляющая абсолютного ускорения точки,

$$a_B^{\text{BP}} = \varepsilon_2 O_1B = ? \quad \bar{a}_B^{\text{BP}} \perp O_1B$$

— вращательная составляющая абсолютного ускорения точки,

Приравняем правые части уравнений (2.8), (2.9) и учтем коммутативность векторов. Получим

$$\bar{a}_B^{\text{II}} + \bar{a}_B^{\text{BP}} = \bar{a}_B^{\text{rII}} + \bar{a}_B^{\text{eII}} + \bar{a}_B^{\text{c}} + \bar{a}_B^{\text{rBP}} \quad (2.10)$$

Решение уравнения (2.10) найдем, построив векторный многоугольник ускорений (Рис. 11).

Для этого, из точки B проводим параллельно звену AB вектор относительного центростремительного ускорения — \bar{a}_B^{rII} .

Из конца вектора \bar{a}_B^{rII} проводим параллельно отрезку OB по направлению к точке O , вектор переносного центростремительного ускорения — \bar{a}_B^{eII} .

Из конца вектора \bar{a}_B^{eII} откладываем вектор ускорения Кориолиса \bar{a}_B^{c} , из конца которого проводим линию $\perp AB$, определяющую возможное направление вектора \bar{a}_B^{rBP} .

Из точки B , в направлении прямой O_1B , откладываем вектор \bar{a}_B^{II} , а из его конца линию, определяющую возможное направление вектора \bar{a}_B^{BP} , которая проводится до пересечения с прямой, характеризующей направление вектора \bar{a}_B^{rBP} .

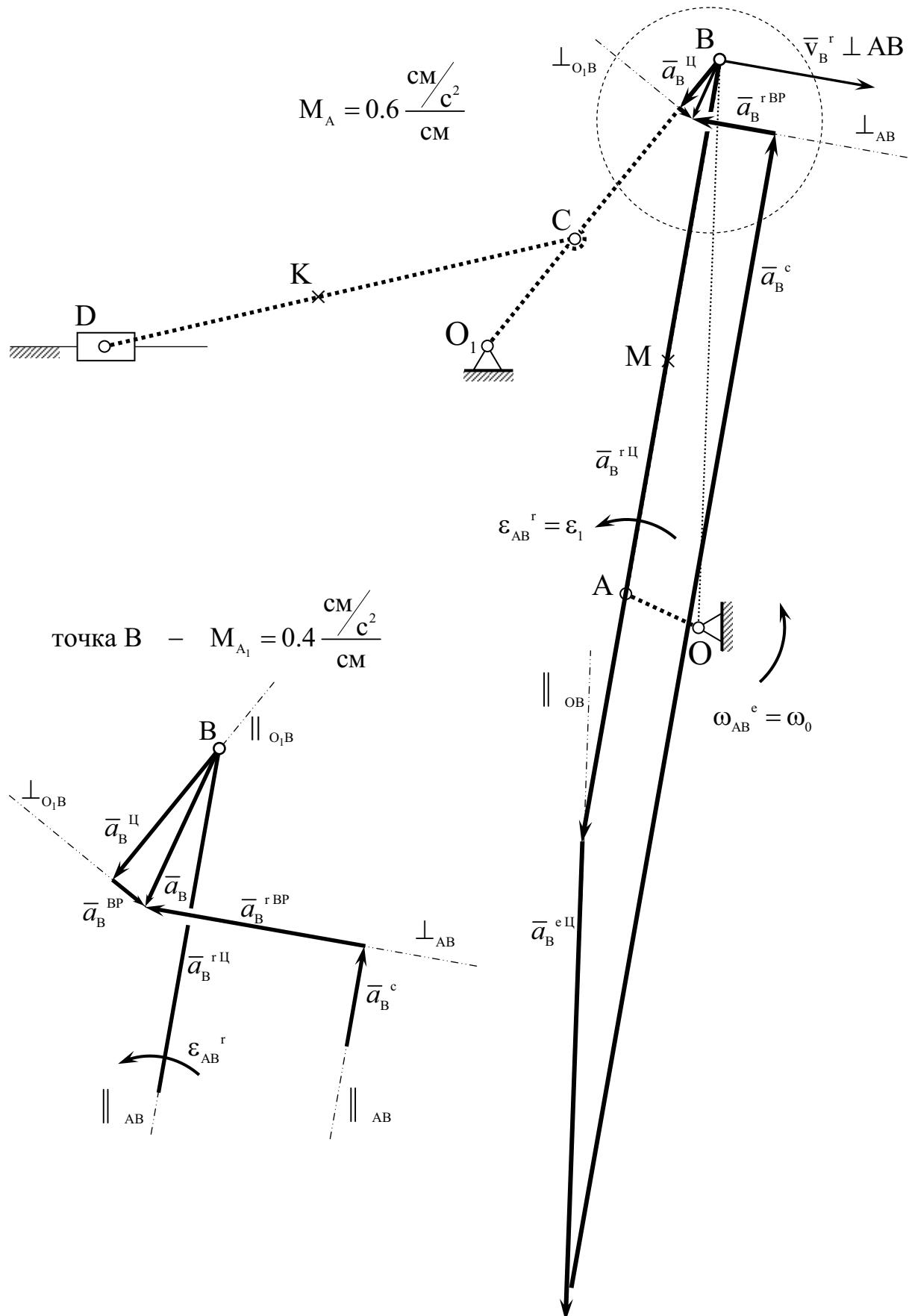


Рис. 11 Определение ускорений точки В.

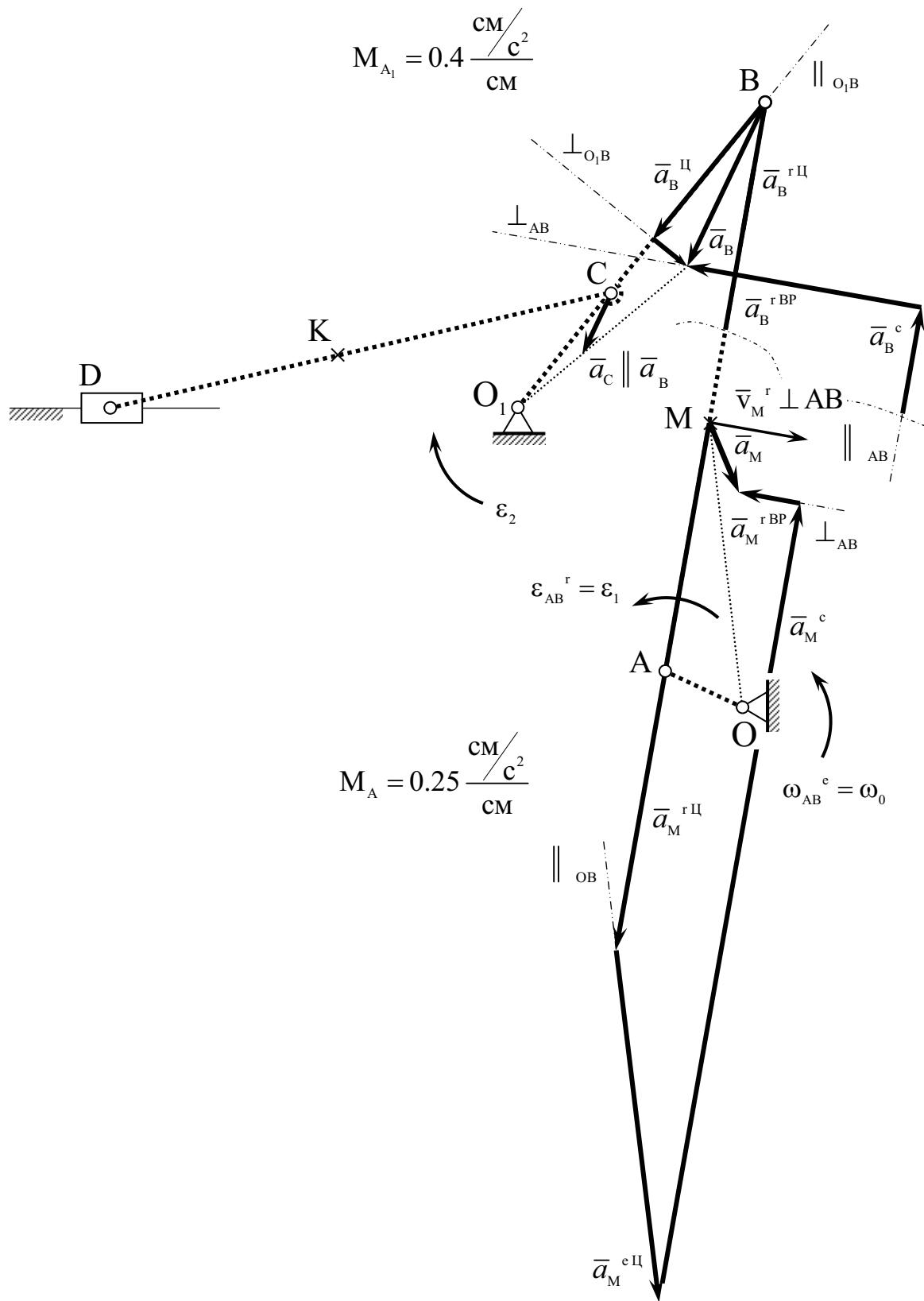


Рис. 12 Определение ускорений точек М и С

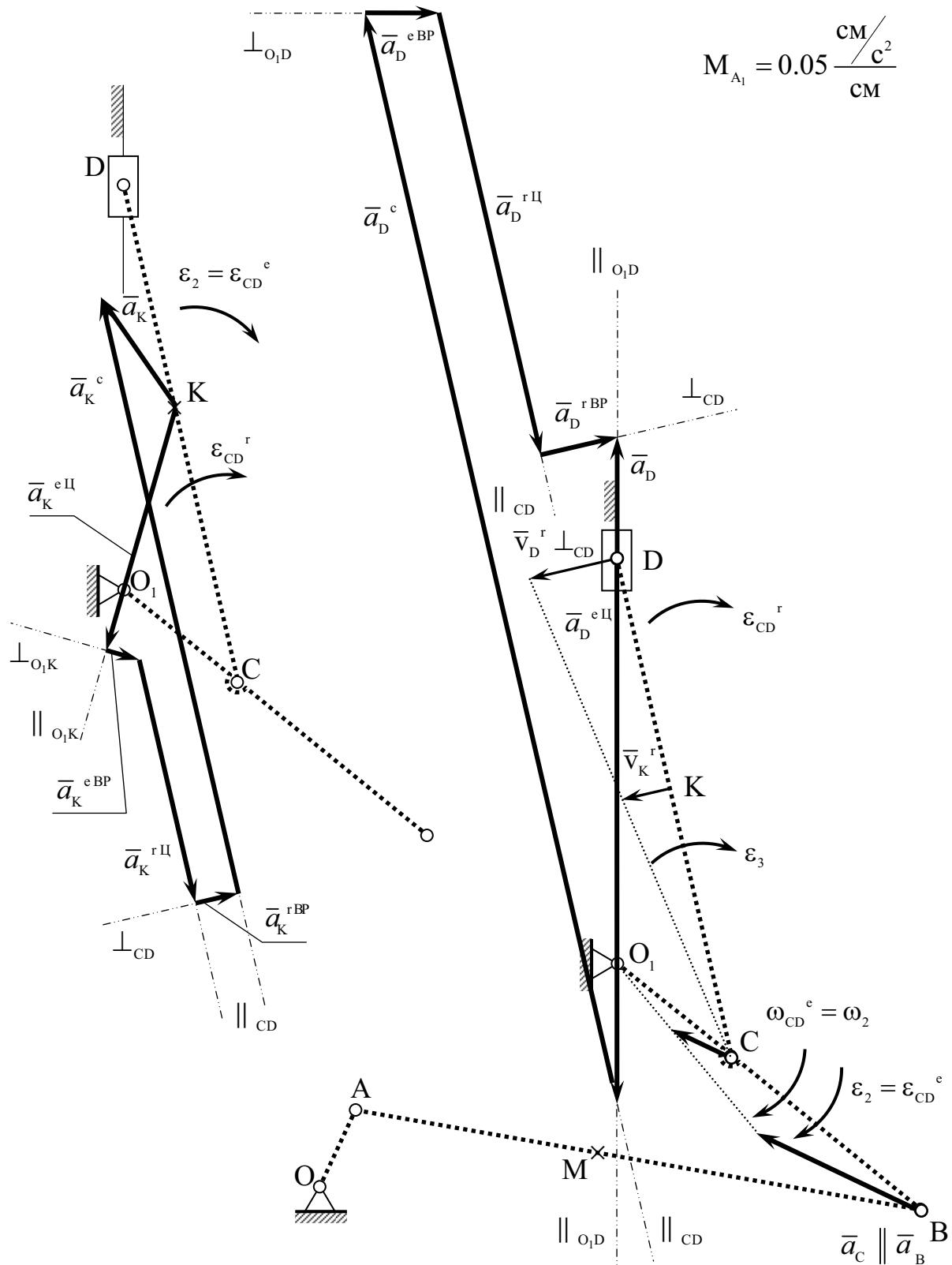


Рис. 13 Определение ускорений точек D и K

В точке пересечения этих прямых сходятся концы векторов \bar{a}_B^{rBP} ,

\bar{a}_B^{BP} и \bar{a}_B^c . Измеряя данные векторы в масштабе ускорений, получим

$$a_B^{rBP} = 0.597 \text{ см/с}^2, \quad a_B^{BP} = 0.06 \text{ см/с}^2, \quad a_B = 0.45 \text{ см/с}^2.$$

Угловые ускорения звеньев определяем по формулам

$$\varepsilon_{AB}^r = \varepsilon_1 = \frac{a_B^{rBP}}{AB} = 0.0063 \text{ с}^{-2},$$

$$\varepsilon_{O_1B} = \varepsilon_2 = \frac{a_B^{BP}}{O_1B} = 0.0009 \text{ с}^{-2}$$

Направления угловых ускорений, которые определяем по направлению векторов \bar{a}_B^{rBP} и \bar{a}_B^{BP} соответственно, показаны на Рис. 11.

Полное ускорение точки С звена O_1B , совершающего вращательное движение, определим из соотношения

$$\frac{a_B}{a_C} = \frac{O_1B}{O_1C}, \text{ тогда } a_C = a_B \frac{O_1C}{O_1B} = 0.172 \text{ см/с}^2.$$

Изображаем вектор \bar{a}_C параллельно вектору \bar{a}_B в масштабе ускорений на Рис. 12.

Так как угловое относительное ускорение шатуна AB определено, найдем ускорение точки M .

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^{eII} + \bar{a}_M^{eBP} + \bar{a}_M^{rII} + \bar{a}_M^{rBP} + \bar{a}_M^c$$

где $a_M^{eII} = (\omega_{AB}^e)^2 OM = 1.46 \text{ см/с}^2$ $\bar{a}_M^{eII} \Rightarrow (\cdot)O \parallel OM$ – переносное

центростремительное ускорение точки,

$$a_M^{eBP} = \varepsilon_{AB}^e OM = 0 \quad \text{т.к.} \quad \omega_{AB}^e = \text{const} \quad - \text{переносное}$$

вращательное ускорение точки,

$$a_M^{rII} = (\omega_{AB}^r)^2 AM = 2.23 \text{ см/с}^2 \quad \bar{a}_M^{rII} \Rightarrow (\cdot)A \parallel AB \quad - \text{относительное}$$

центростремительное ускорение точки,

$$a_M^{rBP} = \varepsilon_{AB}^r AM = 0.26 \text{ см/с}^2 \quad \bar{a}_M^{rBP} \perp AB \quad - \text{относительное}$$

вращательное ускорение точки.

$$\bar{a}_M^c = 2 \bar{\omega}_{AB}^e \times \bar{v}_M^r \quad \bar{a}_B^c \perp \bar{v}_B^r \quad - \text{ускорение Кориолиса:}$$

$$a_M^c = 2 \omega_{AB}^e v_M^r = 3.38 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\bar{a}_M = ? \quad - \text{абсолютное ускорение точки}$$

Изображаем многоугольник ускорений для точки M (Рис. 12). Измеряя неизвестный вектор ускорения \bar{a}_M , получим

$$a_M = 0.31 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Для определения ускорения точки D примем в качестве переносного движения вращение вместе с кривошипом O₁C. В этом случае имеем

$$\bar{a}_D = \bar{a}_D^{e\text{II}} + \bar{a}_D^{e\text{BP}} + \bar{a}_D^{r\text{II}} + \bar{a}_D^{r\text{BP}} + \bar{a}_D^c$$

$$\text{где } a_D^{e\text{II}} = (\omega_{CD}^e)^2 O_1 D = 0.458 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_D^{e\text{II}} \Rightarrow (\cdot) O_1 \parallel O_1 D \quad - \text{переносное}$$

$$\text{центростремительное ускорение точки, } \omega_{CD}^e = \omega_2,$$

$$a_D^{e\text{BP}} = \varepsilon_{CD}^e O_1 D = 0.062 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_D^{e\text{BP}} \perp O_1 D \quad - \text{переносное}$$

$$\text{вращательное ускорение точки, } \varepsilon_{CD}^e = \varepsilon_2,$$

$$a_D^{r\text{II}} = (\omega_{CD}^r)^2 CD = 0.383 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_D^{r\text{II}} \Rightarrow (\cdot) C \parallel CD \quad - \text{относительное}$$

$$\text{центростремительное ускорение точки,}$$

$$a_D^{r\text{BP}} = \varepsilon_{CD}^r CD = ? \quad \bar{a}_D^{r\text{BP}} \perp CD \quad - \text{относительное}$$

$$\text{вращательное ускорение точки.}$$

$$\bar{a}_D^c = 2 \bar{\omega}_{CD}^e \times \bar{v}_D^r \quad \bar{a}_D^c \perp \bar{v}_D^r \quad - \text{ускорение Кориолиса}$$

$$a_D^c = 2 \omega_{CD}^e v_D^r = 0.940 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$a_D = ? \quad \bar{a}_D \parallel O_1 y \quad - \text{абсолютное ускорение точки}$$

Аналогично способу, изложенному ранее, изображаем многоугольник ускорений для точки D (Рис. 13). Измеряя неизвестные векторы, получаем значения ускорений:

$$a_D^{r \text{ BP}} = 0.067 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; a_D = 0.105 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Затем вычисляем угловое относительное ускорение звена CD

$$\varepsilon_{CD}^r = \frac{a_D^{r \text{ BP}}}{CD} = 0.00078 \text{ с}^{-2}.$$

Направление относительного углового ускорения определяем по направлению вектора $\bar{a}_D^{r \text{ BP}}$ и изображаем его на Рис. 13 по часовой стрелке.

Так как относительное и переносное угловые ускорения шатуна CD направлены в одну сторону, направление абсолютного углового ускорения звена совпадает с переносным или относительным угловым ускорением, а его величина равна

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_3 = \varepsilon_{CD}^e + \varepsilon_{CD}^r = 0.00168 \text{ с}^{-2}$$

Ускорение точки K найдем аналогично определению ускорения точки M. Построив многоугольник ускорений для этой точки (Рис. 13)

$$\bar{a}_K = \bar{a}_K^{e \text{ II}} + \bar{a}_K^{e \text{ BP}} + \bar{a}_K^{r \text{ II}} + \bar{a}_K^{r \text{ BP}} + \bar{a}_K^c$$

$$\text{где } a_K^{e \text{ II}} = (\omega_{CD}^e)^2 O_1 K = 0.212 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_K^{e \text{ II}} \Rightarrow (\cdot) O_1 \parallel O_1 K$$

$$a_K^{e \text{ BP}} = \varepsilon_{CD}^e O_1 K = 0.029 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_K^{e \text{ BP}} \perp O_1 K$$

$$a_K^{r \text{ II}} = (\omega_{CD}^r)^2 C K = 0.209 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_K^{r \text{ II}} \Rightarrow (\cdot) C \parallel CD$$

$$a_K^{r \text{ BP}} = \varepsilon_{CD}^r C K = 0.037 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_K^{r \text{ BP}} \perp CD$$

$$a_K^c = 2 \omega_{CD}^e v_K^r = 0.514 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad \bar{a}_K^c \perp \bar{v}_D^r$$

$$\bar{a}_K = ?$$

измерением получим

$$a_K = 0.116 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Сведем результаты вычислений, полученные разными методами в таблицы (см. Табл. 1 — Табл. 3). Точность вычислений проведенных графическими методами будем оценивать положительной величиной относительной погрешности δ , определяемой соотношением

$$\delta = \left| \frac{x - x_T}{x_T} \right|$$

Здесь x — исследуемая величина, полученная одним из графических методов,

x_T — точное значение исследуемой величины.

	Точное значение	Метод 1	δ_1	Метод 3	δ_3
AP_{AB} , см	46,75	48,0	0,0267	47,0	0,0053
CP_{CD} , см	134,74	132,5	0,0169	134,7	0,0003
$\max(\delta)$			0,0267		0,0053

Табл. 1 Оценка точности определения МЦС

	Точное значение	Метод 1	δ_1	Метод 2	δ_2	Метод 3	δ_3
ω_1 , с^{-1}	0,0560	0,0545	0,0268	0,057	0,0179	0,0560	0,0000
ω_2 , с^{-1}	0,0819	0,0818	0,0012	0,080	0,0232	0,0820	0,0012
ω_3 , с^{-1}	0,0152	0,0154	0,0132	0,015	0,0132	0,0152	0,0000
v_A , $\frac{\text{см}}{\text{с}}$	2,6180	2,620	0,0008	2,62	0,0008	2,62	0,0008
v_M , $\frac{\text{см}}{\text{с}}$	3,0486	3,027	0,0071	3,00	0,0159	3,05	0,0005

$v_B, \frac{cm}{c}$	5,4070	5,400	0,0013	5,30	0,0198	5,40	0,0013
$v_C, \frac{cm}{c}$	2,0481	2,045	0,0015	2,00	0,0235	2,05	0,0009
$v_K, \frac{cm}{c}$	1,5537	1,571	0,0113	1,53	0,0153	1,55	0,0024
$v_D, \frac{cm}{c}$	1,3078	1,309	0,0009	1,30	0,0060	1,31	0,0017
$\max(\delta)$		0,0132		0,0235		0,0024	

Табл. 2 Оценка точности определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев

	Точное значение	Метод 1	δ_1	Метод 2	δ_2	Метод 3	δ_3
ε_1, c^{-2}	0,0062	0,0061	0,0161	0,0063	0,0161	0,0063	0,0161
ε_2, c^{-2}	0,0009	0,0009	0,0000	0,0009	0,0000	0,0009	0,0000
ε_3, c^{-2}	0,0017	0,0016	0,0588	0,0017	0,0000	0,0017	0,0000
$a_A, \frac{cm}{c^2}$	0,4569	0,4569	0,0000	0,4569	0,0000	0,4569	0,0000
$a_M, \frac{cm}{c^2}$	0,3076	0,3029	0,0153	—	—	0,310	0,0078
$a_B, \frac{cm}{c^2}$	0,4470	0,4502	0,0072	0,4502	0,0072	0,450	0,0067
$a_C, \frac{cm}{c^2}$	0,1693	0,1667	0,0154	0,1724	0,0183	0,170	0,0041
$a_K, \frac{cm}{c^2}$	0,1148	0,1167	0,0166	—	—	0,116	0,0105
$a_D, \frac{cm}{c^2}$	0,1001	0,1008	0,0070	0,1018	0,0170	0,105	0,0490
$\max(\delta)$		0,0588		0,0183		0,0490	

Табл. 3 Оценка точности определения ускорений точек и угловых ускорений звеньев

Анализ вычисленных значений кинематических параметров много-звенного шарнирного механизма позволяет сделать следующие выводы:

- Все три графических метода с допустимой степенью точности определяют кинематические параметры механизма;
- Увеличение погрешности при вычислении ускорений связано с накоплением ошибок графических методов при определении скоростей точек и угловых скоростей звеньев;
- Наиболее громоздкими и трудоемкими являются графоаналитические и графические методы при исследовании ряда различных положений механизма.
- Данные методы целесообразно использовать в качестве ориентировочных расчетов при отладке программ для численного моделирования системы.

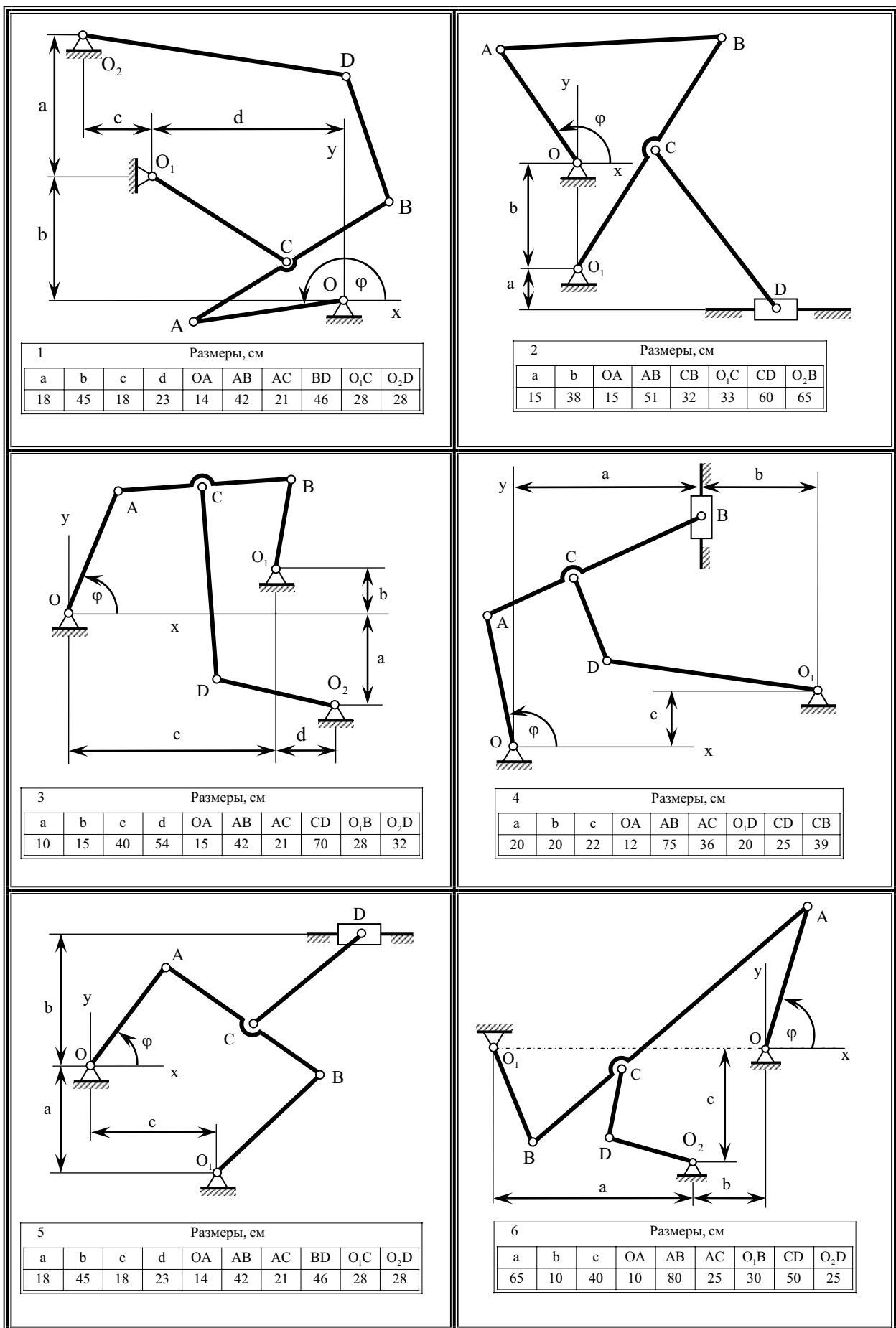
ПРИЛОЖЕНИЕ

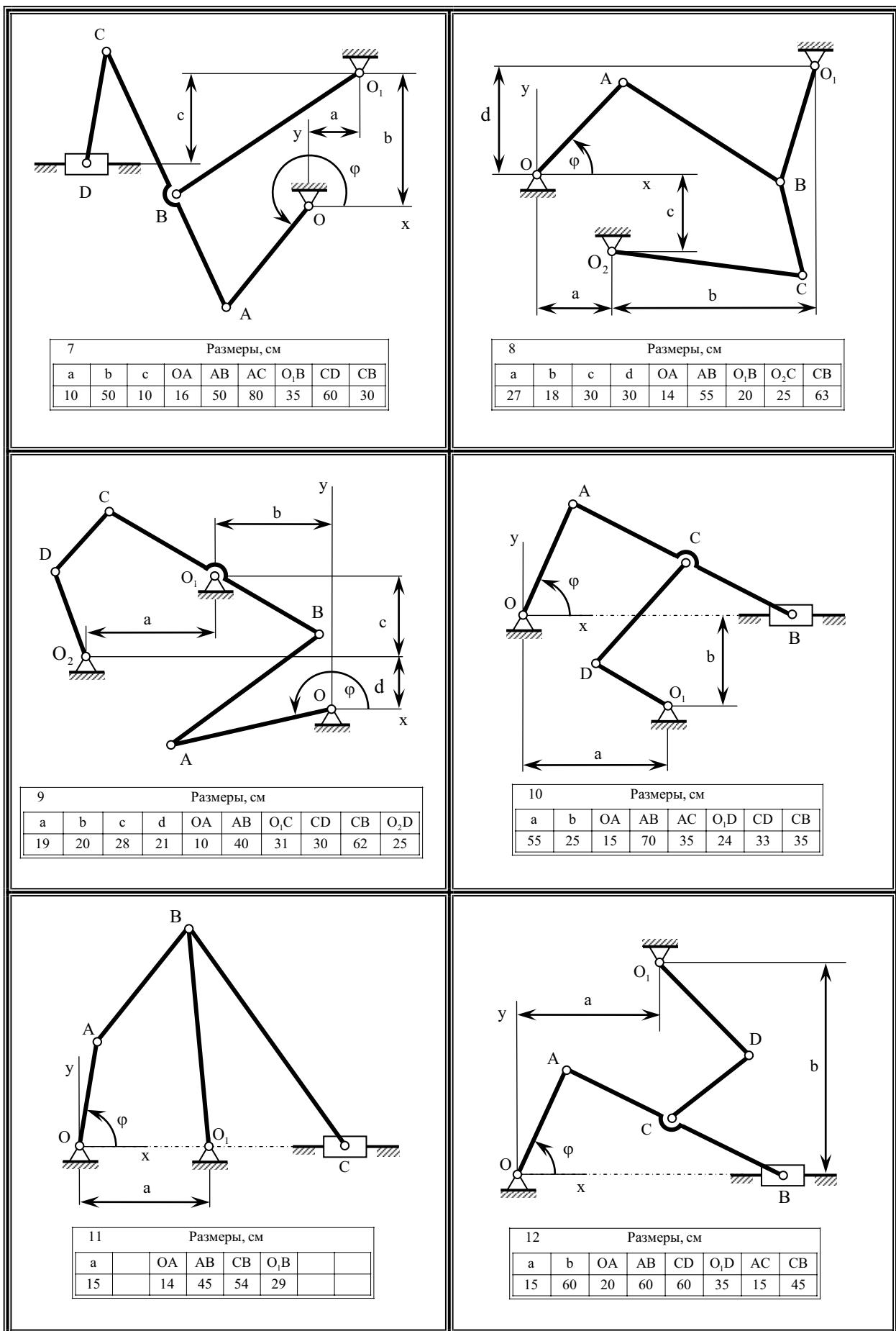
Значение угла поворота ведущего звена при $t = 0$ — ϕ_0 , град.										
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	30	75	210	90	330	135	270	30	15	15
2	195	300	270	0	345	150	345	150	210	135
3	45	45	75	195	0	120	30	330	105	255
4	240	165	285	45	15	240	90	225	345	345
5	120	165	270	75	240	300	345	315	60	180
6	150	210	330	315	15	255	150	255	225	75
7	120	120	60	285	270	135	60	135	225	210
8	210	195	240	0	105	270	195	285	255	135
9	345	240	300	120	135	165	225	90	15	195
10	60	90	285	165	150	0	30	135	105	90
11	75	15	210	90	195	255	45	210	105	315
12	120	300	255	225	195	165	150	45	135	270
13	135	240	315	255	270	285	120	0	270	345
14	105	195	210	195	105	150	270	210	180	300
15	255	300	300	255	255	345	180	60	225	60
16	255	315	240	30	90	15	285	225	300	90
17	225	195	0	90	90	195	315	135	180	150
18	195	45	315	315	300	165	120	270	0	195
19	210	195	315	45	15	120	45	120	15	180
20	285	180	15	285	195	300	300	240	195	90
21	195	90	225	165	105	240	45	315	315	210
22	315	60	225	105	90	135	45	180	240	45
23	60	255	240	225	270	195	90	210	30	165
24	0	90	210	345	0	180	45	300	330	105
25	90	15	210	270	45	75	90	90	255	90
26	150	150	150	300	150	90	60	195	45	30
27	45	15	30	75	120	330	30	0	15	60
28	165	0	240	225	315	75	120	240	315	60
29	330	90	60	120	255	165	330	0	315	0
30	210	15	45	30	150	15	225	150	345	210

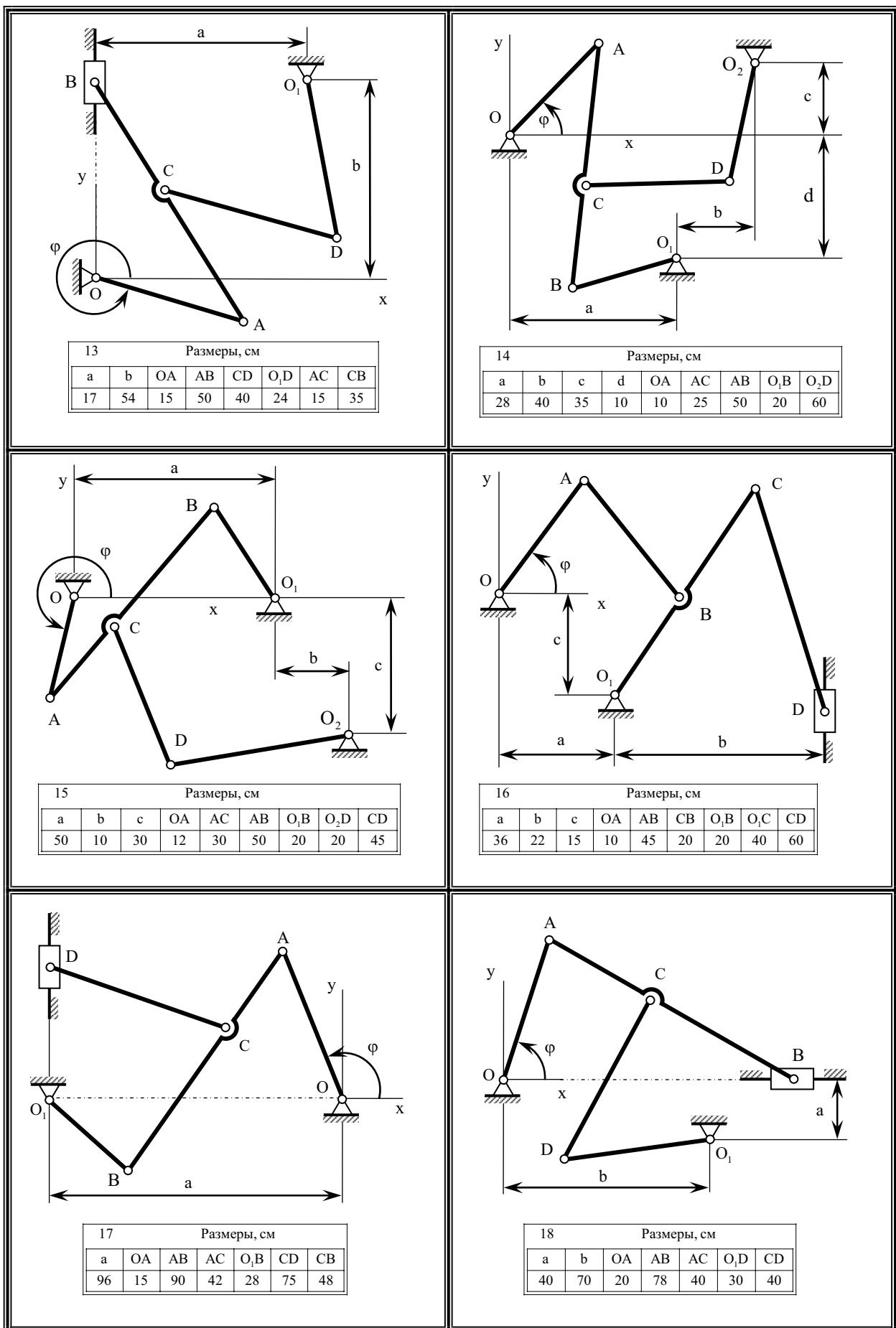
Значение угла поворота ведущего звена при $t = T_k$ — φ_k , град.										
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	330	0	105	300	165	240	210	150	255	330
2	135	75	210	150	90	195	165	75	150	150
3	195	0	165	0	0	300	255	180	120	165
4	255	60	45	30	15	225	225	270	75	180
5	300	285	135	30	15	45	285	90	90	330
6	300	150	105	165	240	60	195	210	270	30
7	210	285	330	75	120	180	30	90	225	75
8	315	330	225	90	90	60	60	105	150	240
9	225	135	165	255	210	180	90	135	315	105
10	270	150	45	210	210	150	240	300	45	210
11	315	45	210	0	105	255	225	300	165	330
12	240	300	210	15	345	75	270	135	240	75
13	345	300	120	180	315	30	45	75	195	225
14	120	120	315	195	105	225	210	135	45	15
15	225	300	135	315	315	345	180	105	45	75
16	330	240	15	195	330	330	285	30	150	150
17	90	165	195	150	165	75	165	150	240	45
18	345	75	45	90	75	105	345	255	135	150
19	240	45	15	90	240	45	240	60	75	315
20	60	285	45	315	0	210	150	345	315	210
21	165	195	105	270	345	270	120	105	285	345
22	135	30	90	330	285	15	135	165	105	225
23	180	285	0	270	0	75	30	15	330	60
24	285	300	30	60	75	285	120	225	15	45
25	90	60	300	60	315	330	120	315	300	195
26	120	195	180	105	60	270	45	60	180	255
27	15	300	255	255	45	90	105	240	120	105
28	195	180	150	210	300	270	135	45	0	30
29	255	135	15	15	45	270	75	60	255	210
30	120	315	210	210	90	90	345	345	345	240

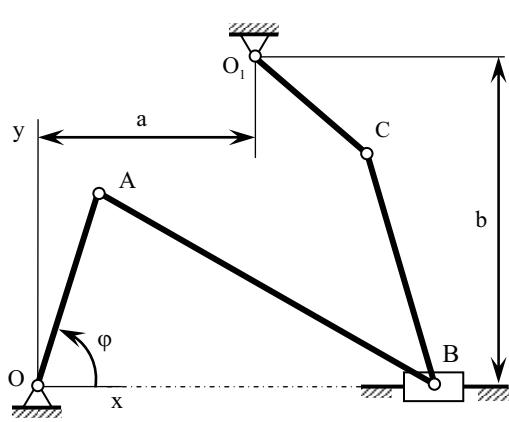
Период вращения ведущего звена — Т, сек.										
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	12	22	28	16	34	18	24	16	18	2
2	22	12	36	12	26	36	2	6	30	22
3	30	30	26	16	34	2	32	28	4	26
4	30	32	12	16	24	30	30	32	2	26
5	2	18	28	26	6	26	2	36	28	14
6	6	36	16	34	24	14	24	4	26	22
7	4	26	26	36	10	20	4	34	24	32
8	12	32	12	14	18	22	16	10	32	6
9	22	14	14	36	32	20	8	20	8	26
10	30	30	2	6	4	6	18	8	2	12
11	10	12	34	10	24	26	8	32	28	20
12	12	20	20	24	24	18	32	28	18	14
13	32	30	34	6	22	34	30	34	4	32
14	26	8	18	30	22	32	20	36	4	6
15	24	16	20	12	22	36	24	28	14	6
16	28	2	20	14	18	20	28	20	24	6
17	2	18	24	8	26	34	4	24	30	22
18	8	26	14	10	28	10	12	18	32	36
19	14	28	6	10	28	32	34	2	14	34
20	12	26	10	20	24	26	30	2	28	10
21	32	12	22	36	14	8	10	18	12	18
22	22	10	16	32	34	18	34	4	14	2
23	32	36	26	12	8	20	2	30	32	4
24	2	34	12	24	8	26	28	26	18	14
25	16	34	16	24	12	28	34	24	24	4
26	24	26	28	14	8	24	28	6	20	6
27	36	2	36	8	10	16	6	24	30	14
28	30	22	4	30	34	36	2	30	12	10
29	28	20	14	16	30	2	20	22	36	24
30	28	4	32	4	22	26	22	8	30	16

Величина отношения АМ/АВ и КД/БД (СК/СВ).										
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,70	0,10	0,65	0,10	0,25	0,40	0,10	0,65	0,85	0,70
2	0,45	0,05	0,85	0,80	0,35	0,45	0,25	0,15	0,70	0,35
3	0,50	0,30	0,05	0,65	0,50	0,05	0,15	0,70	0,20	0,65
4	0,65	0,40	0,20	0,40	0,75	0,50	0,85	0,10	0,10	0,60
5	0,20	0,50	0,05	0,50	0,90	0,65	0,15	0,45	0,05	0,85
6	0,15	0,65	0,80	0,05	0,85	0,55	0,05	0,55	0,50	0,90
7	0,25	0,55	0,75	0,10	0,65	0,15	0,50	0,15	0,50	0,65
8	0,20	0,85	0,15	0,80	0,85	0,10	0,75	0,25	0,40	0,85
9	0,75	0,05	0,70	0,25	0,45	0,70	0,15	0,15	0,85	0,05
10	0,75	0,60	0,35	0,80	0,15	0,05	0,90	0,70	0,80	0,05
11	0,80	0,25	0,80	0,20	0,65	0,45	0,20	0,50	0,30	0,90
12	0,40	0,45	0,05	0,60	0,75	0,35	0,85	0,85	0,85	0,60
13	0,70	0,10	0,70	0,75	0,65	0,60	0,25	0,30	0,05	0,30
14	0,20	0,05	0,10	0,05	0,85	0,55	0,25	0,65	0,35	0,65
15	0,85	0,35	0,65	0,40	0,40	0,35	0,30	0,90	0,15	0,25
16	0,55	0,15	0,45	0,85	0,05	0,05	0,50	0,85	0,70	0,80
17	0,15	0,45	0,60	0,75	0,80	0,10	0,25	0,50	0,35	0,55
18	0,30	0,25	0,25	0,40	0,75	0,45	0,45	0,55	0,15	0,15
19	0,70	0,35	0,40	0,55	0,20	0,50	0,50	0,65	0,80	0,70
20	0,65	0,85	0,35	0,55	0,10	0,20	0,75	0,70	0,55	0,60
21	0,85	0,65	0,80	0,60	0,70	0,05	0,90	0,85	0,40	0,65
22	0,70	0,05	0,65	0,40	0,25	0,50	0,05	0,65	0,90	0,80
23	0,35	0,10	0,30	0,40	0,70	0,90	0,60	0,30	0,40	0,05
24	0,75	0,20	0,85	0,85	0,20	0,75	0,85	0,55	0,55	0,25
25	0,30	0,40	0,80	0,30	0,90	0,65	0,70	0,40	0,40	0,75
26	0,40	0,20	0,20	0,50	0,80	0,65	0,85	0,30	0,25	0,40
27	0,45	0,25	0,50	0,80	0,65	0,25	0,35	0,55	0,15	0,45
28	0,05	0,15	0,90	0,90	0,90	0,15	0,25	0,05	0,55	0,70
29	0,70	0,30	0,40	0,15	0,65	0,80	0,10	0,60	0,70	0,10
30	0,55	0,70	0,90	0,05	0,25	0,75	0,35	0,80	0,70	0,45

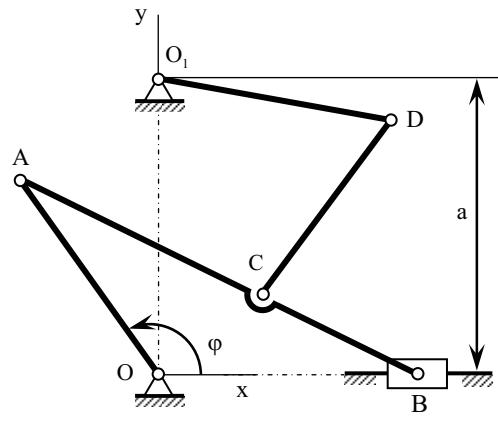




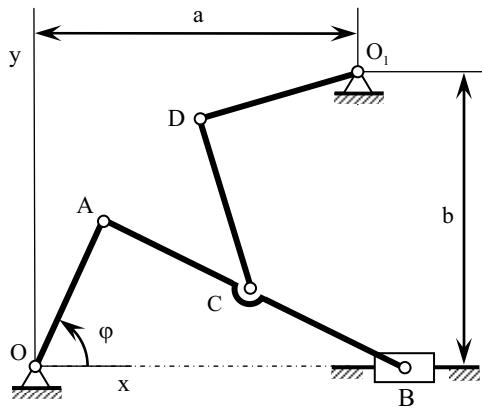




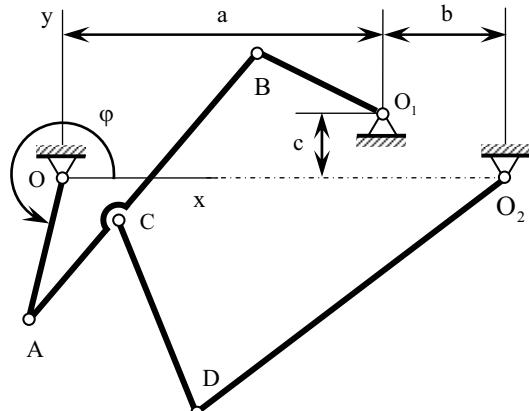
19 Размеры, см					
a	b	OA	AB	CB	O ₁ C
42	40	17	70	40	30



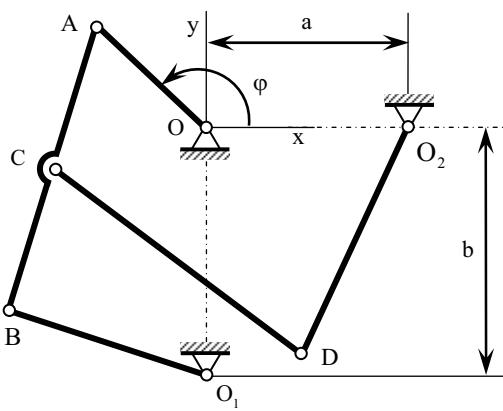
20 Размеры, см						
a	OA	AB	CD	O ₁ D	AC	CB
40	22	60	50	20	30	30



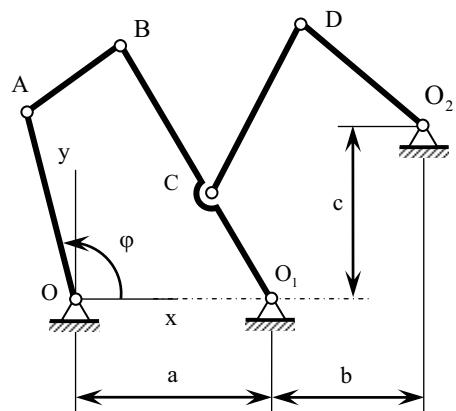
21 Размеры, см							
a	b	OA	AB	CD	O ₁ D	AC	CB
20	60	20	80	50	30	40	40



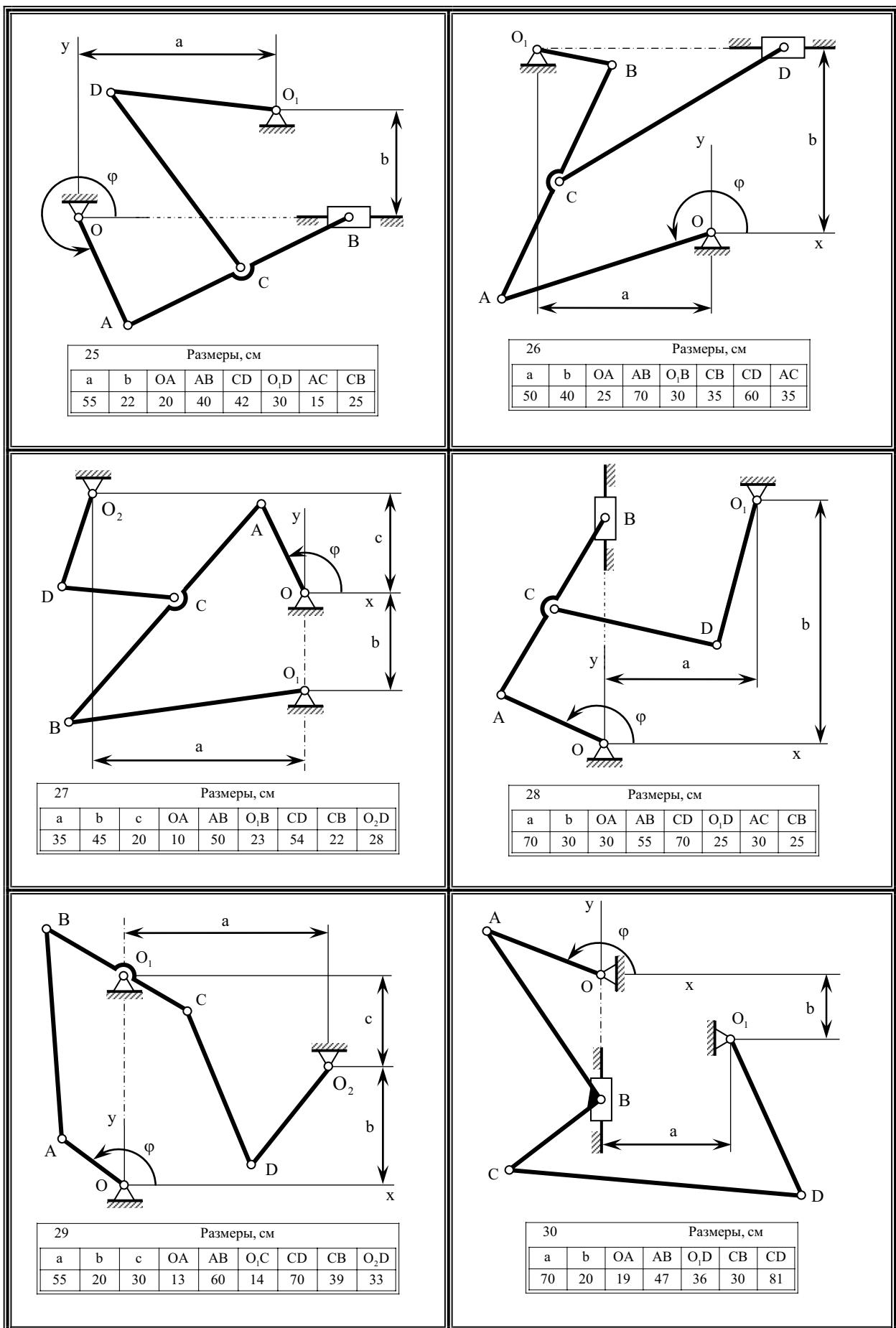
22 Размеры, см								
a	b	c	OA	AC	AB	O ₁ B	O ₂ D	CD
50	25	10	15	22	47	20	45	35



23 Размеры, см							
a	b	OA	AC	AB	O ₁ B	O ₂ D	CD
60	50	12	30	50	30	32	60



24 Размеры, см								
a	b	c	OA	AB	O ₁ C	O ₁ B	O ₂ D	CD
56	40	10	16	50	15	26	20	50



СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ЦЕЛЬ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.....	5
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	5
ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.....	7
ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ И ЗАЩИТЕ.....	8
МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ.....	9
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.....	10
ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И СХЕМА МЕХАНИЗМА.....	10
1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД	12
УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ.	12
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМА	15
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ	19
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК.....	21
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ.....	25
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА	25
<i>Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС).....</i>	26
<i>Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью теоремы о сложении скоростей</i>	28
<i>Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью теоремы о сложении ускорений</i>	34
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СОСТАВНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	42
<i>Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев с помощью теоремы о сложении скоростей при переносном вращательном движении</i>	43
<i>Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев с помощью теоремы о сложении ускорений при переносном вращательном движении</i>	47
3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ	55
ПРИЛОЖЕНИЕ	58
СОДЕРЖАНИЕ	67