# ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть изучается случайная величина $X$ с законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров. *Например*, это параметр $a$ в распределении Пуассона $\left(P\{X=m\}=\dfrac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}\right)$ или параметры $a$ и $\sigma$ для нормального закона распределения.

Требуется по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, полученной в результате $n$ наблюдений (опытов), оценить неизвестный параметр $\theta$.

*Статистической оценкой* $\theta_n$ (далее просто — *оценкой* $\theta$) параметра $\theta$ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора.

Очевидно, что оценка $\widetilde{\theta}$ есть значение некоторой функции результатов наблюдений над случайной величиной, т. е.

$$\widetilde{\theta}=\widetilde{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{7.1}$$

Оценка $\widetilde{\theta}$ является случайной величиной, так как является функцией независимых с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$; если произвести другую выборку, то функция примет, вообще говоря, другое значение.

Оценка $\theta_n$ параметра $\theta$ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\widetilde{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta,$$

т. е. для любого $\varepsilon>0$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{|\widetilde{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\right\}=1.$$

Это означает, что с увеличением объема выборки мы все ближе приближаемся к истинному значению параметра $\theta$, т. е. практически достоверно $\widetilde{\theta}_n\approx\theta$.

Свойство состоятельности обязательно для любого правила оценивания (несостоятельные оценки не используются).

1. Оценка $\tilde{\theta}$ параметра называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру $\theta$:

$$M\left[\tilde{\theta}\right] = \theta.$$

Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра $\theta$ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра $\theta$, т. е. оценка $\tilde{\theta}_n$ эффективна, если ее дисперсия минимальна.

## Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Пусть изучается с. в. $X$ с математическим ожиданием $a = MX$ и дисперсией $DX$; оба параметра неизвестны.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, полученная в результате проведения $n$ независимых наблюдений за с. в. $X$. Чтобы подчеркнуть случайный характер величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перепишем их в виде $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т. е. под $X_i$ будем понимать значение с. в. $X$ в $i$-м опыте.

Можно показать, что $\mathbf{x_{cp} = (1/n)\Sigma(i)\, x_i}$ является ***состоятельной*** точечной оценкой математического ожидания. Можно показать также, что данная оценка является одновременно и ***несмещенной***.

Можно показать, что в случае **дисперсии** состоятельную (но смещенную) оценку величины D(X) (обозначаемой также $\sigma^2$) дает выражение: $\Sigma(i)(x_i - x_{cp})^2/n$.

Полученное число, обозначаемое обычно как $D_{выборочное}$, называется ***выборочной*** дисперсией.

Можно показать, что **несмещенную и состоятельную** оценку величины D(X) дает выражение: $\Sigma(i)(x_i - x_{cp})^2/(n-1)$. - ***исправленная*** дисперсия.

Полученное число (*исправленное* значение дисперсии), обозначаемое обычно как $\mathbf{s^2}$ .

**Пример**.

Пусть дана выборка значений случайной величины $X$ (выборка объема $n = 100$ из генеральной совокупности) (таблица 1).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,88 | 2,78 | 4,90 | 4,41 | 4,86 | 4,46 | 4,76 | 4,48 | 4,71 | 4,70 |
| 2,94 | 5,37 | 7,48 | -3,32 | 5,79 | 8,55 | 8,27 | 5,65 | 7,23 | 7,95 |
| 2,95 | 2,44 | 7,89 | 2,45 | 5,90 | 2,45 | 2,67 | 2,50 | 2,67 | 2,51 |
| 5,16 | 4,40 | 9,12 | 5,52 | 1,56 | 8,46 | 1,34 | 5,69 | 9,57 | -1,07 |
| 5,20 | 4,99 | 9,00 | 8,47 | 6,55 | 2,88 | 6,78 | 5,72 | 6,10 | 0,13 |
| 4,23 | 5,15 | 6,39 | 4,39 | 6,56 | 5,78 | 6,85 | 4,40 | 6,23 | 0,56 |
| 4,23 | 2,99 | 6,46 | 6,88 | 9,63 | 4,22 | 3,58 | 6,57 | 5,83 | 9,35 |
| 4,33 | 3,24 | 9,97 | 6,99 | 5,22 | 8,93 | 3,69 | 6,58 | 7,09 | 5,68 |
| 4,38 | 3,27 | 7,19 | 1,73 | 5,29 | 1,96 | 3,71 | 1,99 | 2,31 | 2,30 |
| 5,67 | 3,90 | 7,38 | 3,94 | 5,33 | 3,98 | 3,79 | 4,08 | 4,12 | 4,12 |

Требуется найти выборочные оценки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины $X$. Указать свойства этих оценок.

Оценкой математического ожидания случайной величины $X$ служит выборочное среднее $\tilde{m}_X = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{100} \cdot 491{,}2900 = 4{,}9129$. Данная оценка $\tilde{m}_X = \bar{x}$ является несмещенной, эффективной и состоятельной.

Оценкой дисперсии случайной величины $X$ служат выборочная дисперсия и модифицированная выборочная дисперсия, вычисляемые по формулам:

$$S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100} \cdot 2985{,}1739 - 4{,}9129^2 = 5{,}7152,$$

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n \cdot S^2}{n-1} = \frac{100 \cdot 5{,}7152}{99} = 5{,}7729.$$

Оценка $S_0^2$ является несмещенной, эффективной, состоятельной, а $S^2$ – смещенная, неэффективная, но состоятельная. Следовательно, $S_0^2$ дает лучшее приближение оцениваемой дисперсии, поэтому в дальнейших расчетах в качестве оценки дисперсии используется $S_0^2$: $\widetilde{D}_X = S_0^2$.

Оценка среднеквадратического отклонения, являющаяся несмещенной, эффективной, состоятельной:

$$\widetilde{\sigma}_X = \sqrt{\widetilde{D}_X} = \sqrt{S_0^2} = S_0 = 2{,}4027.$$

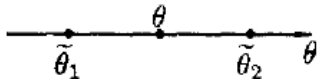
## ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Интервальное оценивание параметров распределения генеральной совокупности состоит в построении доверительных интервалов.

При построении доверительных интервалов вводят в рассмотрение специально подобранную статистику $K$, распределение которой известно. Наиболее распространенными являются статистики, имеющие нормальное, Стьюдента и $\chi^2$ распределения.

Оценка неизвестного параметра называется *интервальной*, если она определяется двумя числами — концами интервала.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью $\gamma$ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра (см. рис. 62).




Интервал $(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2)$, накрывающий с вероятностью $\gamma$ истинное значение параметра $\theta$, называется *доверительным интервалом*, а вероятность $\gamma$ — *надежностью оценки* или *доверительной вероятностью*.

## Интервальная оценка математического ожидания a=M(X) нормально распределенной случайной величины

Имеется случайная величина, распределенная по нормальному закону N(a;σ).

**Пусть a — неизвестное точное значение M(X).**

Обозначим через $\gamma$ вероятность того, то $\mathbf{x_{cp} - \delta < a < x_{cp} + \delta}$ или $|a - x_{cp}| + < \delta$,

т. е. $P(x_{cp} - \delta < a < x_{cp} + \delta) = \gamma$ (вероятность того, что точное значение *a* отличается от приближенного значения меньше, чем на δ).

Доверительный интервал ищется в виде $(x_{cp} - \delta, x_{cp} + \delta)$

где $x_{cp} = (x_1 + x_2 + x_3 ... + x_n)/n$ - точечная оценка параметра a.

Задаем значение $\gamma$. По этому значению рассчитываем значение δ .

## I. Случай известного точного значения σ

Если точное значение σ известно, то для нахождения интервальной оценки для a = M(X) можно воспользоваться стандартным нормальным распределение N(0; 1).

А именно, мы знаем, что величина $X_{cp}$ имеет нормальное распределение N(a; σ/√n).

Поэтому нормированная величина (**статистика**) К = $\mathbf{(X_{cp} - a)/(\sigma/\sqrt{n})}$ имеет простейшее нормальное распределение N(0; 1). Следовательно, мы можем получить выражение для вероятности γ попадания значения К в интервал (**δ** ; - **δ**).

Отсюда можно получить, что для заданного γ :

$$\gamma = P(x_{cp} - \delta < a < x_{cp} + \delta) = 2*\Phi_0(t)$$

где $\delta = t*\sigma/\sqrt{n}$,

или:

$$P(x_{cp} - t*\sigma/\sqrt{n} < a < x_{cp} + t*\sigma/\sqrt{n}) = 2*\Phi_0(t)$$

Таким образом, полуширина **δ** доверительного интервала, содержащего a, равна числу t, (удовлетворяющему уравнению $\Phi_0(t) = \gamma/2$), умноженному на σ/√n .

Здесь $\Phi_0(t)$ - интегральная функция Лапласа (**см. таблицу ниже на следующей странице**).

В 1-м левом столбце приведенной таблицы $\Phi_0(t)$ находятся значения аргумента t с точностью до десятых. В нулевой верхней строке таблицы находятся значения

соответствующих сотых. На пересечении соответствующей строки и столбца находится значение $\Phi_0(t)$.

**(Отметим, что функция распределения F(x) стандартного нормального распределения равна $F_{0,1}(x)=0,5+\Phi_0(x)$ ).**

Для заданного значения **γ** (с помощью таблицы для функции $\Phi_0(t)$) мы можем найти соответствующее значение t. Подставив это значение t в δ = t*σ/ √n, мы получим доверительный интервал для *a*: **$(x_{ср} + t*\sigma/\sqrt{n}\ ;\ x_{ср} + t*\sigma/\sqrt{n})$ ,**

в который число *a* попадает с вероятностью γ.

**Алгоритм таков: (1)** внутри таблицы мы ищем значение максимально близкое к γ/2; (2) в левой части соответствующей строки считываем значение аргумента t с точностью до десятых, в верхней части соответствующего столбца считываем сотые.

**Пример:** γ/2=0,25. Ближайшие значения в таблице — это 0,2486 (t=0,67) и 0,2518 (t=0,68). В качестве решения можно взять любое из этих чисел, или, более точно, среднее арифметическое t=(0,67+0,68)/2.

## Нахождение t с помощью функций Excel

Найти рассматриваемое значение t можно с помощью функции Excel:

t =НОРМСТОБР((1+ γ)/2).

## Приведем примеры нахождения δ по γ.

Пример 3. СВ $\xi$ распределена нормально с $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания $a$ по выборочной средней $\bar{x}_в$, если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0.95$.

Решение. Вычислим $\Phi(t_\gamma) = \gamma = 0.95$. По таблице значений функции Лапласа находим $t_\gamma = 1.96$; следовательно, точность оценки $\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \cdot 3}{6} = 0.98$. Тогда доверительный интервал $(\bar{x}_в - \delta, \bar{x}_в + \delta)$ имеет вид

Следует подчеркнуть, что данную таблицу можно использовать для решения **обратной задачи** — расчету вероятности γ по заданному значению δ. Для этого рассчитывается

значение t: $t = \delta/(\sigma/\sqrt{n})$, Затем в 1-м столбце таблицы находится значение t с точностью до десятых, в нулевой строке таблицы находится значение соответствующих сотых. На пересечении соответствующей строки и столбца находится значение $\Phi_0(t)$.

Затем $\gamma = 2*\Phi_0(t)$.

**Пример 7.5.** Произведено 5 независимых наблюдений над с. в. $X \sim N(a, 20)$. Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25$, $x_2 = 34$, $x_3 = -20$, $x_4 = 10$, $x_5 = 21$. Найти оценку для $a = MX$, а также построить для него 95%-й доверительный интервал.

❍ Находим сначала $\overline{x}_в$: $\overline{x} = \frac{1}{5} \cdot (-25 + 34 - 20 + 10 + 21) = 4$, т. е. $\overline{x} = 4$. Учитывая, что $\gamma = 0{,}95$ и $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$, получаем $\Phi_0(t) = 0{,}475$. По таблице (см. Приложение) выясняем, что $t = t_\gamma = 1{,}96$. Тогда $\varepsilon = \frac{1{,}96 \cdot 20}{\sqrt{5}} \approx 17{,}5$ (формула (7.3)). Доверительный интервал для $a = MX$ (согласно (7.6)) таков: $(4 - 17{,}5; 4 + 17{,}5)$, т. е. $(-13{,}5; 21{,}5)$. ●

**Приложение 2.** Значение функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

| $x$ | Сотые доли $x$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,0000 | 0040 | 0080 | 0112 | 0160 | 0199 | 0239 | 0279 | 0319 | 0359 |
| 0,1 | 0398 | 0438 | 0478 | 0517 | 0557 | 0596 | 0636 | 0675 | 0714 | 0754 |
| 0,2 | 0793 | 0832 | 0871 | 0910 | 0948 | 0987 | 1026 | 1064 | 1103 | 1141 |
| 0,3 | 1179 | 1217 | 1255 | 1293 | 1331 | 1368 | 1406 | 1443 | 1480 | 1517 |
| 0,4 | 1554 | 1591 | 1628 | 1664 | 1700 | 1736 | 1772 | 1808 | 1844 | 1879 |
| 0,5 | 1915 | 1950 | 1985 | 2019 | 2054 | 2088 | 2123 | 2157 | 2190 | 2224 |
| 0,6 | 2258 | 2291 | 2324 | 2357 | 2389 | 2422 | 2454 | 2486 | 2518 | 2549 |
| 0,7 | 2580 | 2612 | 2642 | 2673 | 2704 | 2734 | 2764 | 2794 | 2823 | 2852 |
| 0,8 | 2881 | 2910 | 2939 | 2967 | 2996 | 3023 | 3051 | 3079 | 3106 | 3133 |
| 0,9 | 3159 | 3186 | 3212 | 3238 | 3264 | 3289 | 3315 | 3340 | 3365 | 3389 |
| 1,0 | 3413 | 3438 | 3461 | 3485 | 3508 | 3531 | 3553 | 3577 | 3599 | 3621 |
| 1,1 | 3643 | 3665 | 3686 | 3708 | 3729 | 3749 | 3770 | 3790 | 3810 | 3830 |
| 1,2 | 3849 | 3869 | 3888 | 3907 | 3925 | 3944 | 3962 | 3980 | 3997 | 4015 |
| 1,3 | 4032 | 4049 | 4066 | 4082 | 4099 | 4115 | 4131 | 4147 | 4162 | 4177 |
| 1,4 | 4192 | 4207 | 4222 | 4236 | 4251 | 4265 | 4279 | 4292 | 4306 | 4319 |
| 1,5 | 4332 | 4345 | 4357 | 4370 | 4382 | 4394 | 4406 | 4418 | 4430 | 4441 |
| 1,6 | 4452 | 4463 | 4474 | 4485 | 4495 | 4505 | 4515 | 4525 | 4535 | 4545 |
| 1,7 | 4554 | 4564 | 4573 | 4582 | 4591 | 4599 | 4608 | 4616 | 4625 | 4633 |
| 1,8 | 4641 | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4700 | 4706 |
| 1,9 | 4713 | 4719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4762 | 4767 |

## II. Случай неизвестного точного значения σ

Если точное значение σ неизвестно, то для нахождения интервальной оценки для $a$ = M(X) можно воспользоваться распределением Стьюдента.

А именно, мы знаем, что величина $X_{cp}$ имеет нормальное распределение $N(a; \sigma/\sqrt{n})$.

Можно показать, что величина (**статистика**) К = $(X_{cp} - a)/(s/\sqrt{n})$ имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\kappa = n-1$. Здесь s - точечная оценка среднеквадратического отклонения, а именно, квадратный корень из исправленной дисперсии.

Следовательно, мы можем получить выражение для вероятности γ попадания значения К в интервал (**δ** ; - **δ**).

Отсюда можно получить, что:

$$p\left\{\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

А это значит, что интервал

$$\left(\overline{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает $a = MX$ с вероятностью $\gamma$, т. е. является доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания с. в. $X$.

Здесь $t_\gamma$ – квантиль распределения Стьюдента соответствующий вероятности 1 - γ/2 .

($F(t_\gamma) = 1 - \gamma/2$

Ниже приведена таблица«Таблица значений t=t (n, γ)» распределения Стьюдента, приспособленная для решения рассматриваемой задачи. В 1-м столбце находим значение n, в верхней строке - значение γ. На пересечении — значение t.

И, окончательно, **δ = t*s/√n**

**Определение:** ***Число степеней свободы*** *равно общему числу наблюдений* $x_i$ *минус число связывающих их уравнений.* В рассматриваемом случае число наблюдений ($x_i$ ) равно n.

Уравнение: $x_{cp} = (1/n)*( x_1+x_2+ x_3...+ x_n)$.

## Нахождение t с помощью функций Excel

**t = СТЬЮДРАСПОБР((1- γ); n-1).**

При больших значениях n распределение Стьюдента практически совпадает со стандартным нормальным распределением. Поэтому при n > 30 квантиль t можно с достаточной точностью найти по таблице интегральной функции Лапласа ($\Phi_0(t)=\gamma/2$) или с помощью функции Excel =НОРМСТОБР((1+ γ)/2).

**Пример 7.6.** По условию примера 7.5, считая, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$, построить для неизвестного $MX = a$ доверительный интервал. Считать $\gamma = 0{,}95$.

❍ Оценку $\overline{x}$ для $MX$ уже знаем: $\overline{x} = 4$. Находим значение $S$: $S^2 = \frac{1}{4}\left((-25-4)^2 \cdot 1 + (34-4)^2 + (-20-4)^2 + (10-4)^2 + (21-4)^2\right) = 660{,}5$; $S \approx 25{,}7$. По таблице для $\gamma = 0{,}95$ и $n-1 = 4$ находим $t_\gamma = 2{,}78$. Следовательно, $\varepsilon = 2{,}78 \cdot \frac{25{,}7}{2{,}24} \approx 31{,}9$. Доверительный интервал таков: $(-27{,}9; 35{,}9)$. ●

Пример 5. Количественный признак $\xi$ генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n$=16 найдены $\overline{x}_в = 20.2$ и исправленное среднее квадратичное отклонение $S = 0.8$. Оценить неизвестное математическое ожидание $a$ при помощи доверительного интервала с надежностью $\gamma$=0.95.

Решение. Для нахождения доверительного интервала следует по таблице $t$-распределения Стьюдента по $n$=16, $\gamma$=0.95 найти $t_{\gamma,n}$=2.13. Тогда границы доверительного интервала имеют вид

$$\overline{x}_в - t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}} = 20.2 - \frac{2.13 \cdot 0.8}{4} = 19.774; \ \overline{x}_в + t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}} = 20.2 + \frac{2.13 \cdot 0.8}{4} = 20.626.$$

Таким образом, с надежностью $\gamma$=0.95 неизвестный параметр $a$ заключается в доверительном интервале (19.774, 20.626).

## Таблица t — распределения Стьюдента

*ПРИЛОЖЕНИЕ 3*

**Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$**

| $n$ \ $\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 | $n$ \ $\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,099 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2,78 | 4,60 | 8,61 | 20 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 6 | 2,57 | 4,03 | 6,86 | 25 | 2,064 | 2,797 | 3,745 |
| 7 | 2,45 | 3,71 | 5,96 | 30 | 2,045 | 2,756 | 3,659 |
| 8 | 2,37 | 3,50 | 5,41 | 35 | 2,032 | 2,720 | 3,600 |
| 9 | 2,31 | 3,36 | 5,04 | 40 | 2,023 | 2,708 | 3,558 |
| 10 | 2,26 | 3,25 | 4,78 | 45 | 2,016 | 2,692 | 3,527 |
| 11 | 2,23 | 3,17 | 4,59 | 50 | 2,009 | 2,679 | 3,502 |
| 12 | 2,20 | 3,11 | 4,44 | 60 | 2,001 | 2,662 | 3,464 |
| 13 | 2,18 | 3,06 | 4,32 | 70 | 1,996 | 2,649 | 3,439 |
| 14 | 2,16 | 3,01 | 4,22 | 80 | 1,991 | 2,640 | 3,418 |
| 15 | 2,15 | 2,98 | 4,14 | 90 | 1,987 | 2,633 | 3,403 |
| 16 | 2,13 | 2,95 | 4,07 | 100 | 1,984 | 2,627 | 3,392 |
| 17 | 2,12 | 2,92 | 4,02 | 120 | 1,980 | 2,617 | 3,374 |
| 18 | 2,11 | 2,90 | 3,97 | ∞ | 1,960 | 2,576 | 3,291 |
| 19 | 2,10 | 2,88 | 3,92 | | | | |

В 1-м столбце находим значение n, в верхней строке - γ. На пересечении — значение t.

И, окончательно, **δ = t*s/√n**

## Интервальная оценка дисперсии $\sigma^2$=D(X) нормально распределенной случайной величины

Границы $b_1$ и $b_2$ доверительного интервала для **дисперсии** :

$$b_1 = \frac{s^2}{\beta_2} \cdot (n-1) \qquad b_2 = \frac{s^2}{\beta_1} \cdot (n-1)$$

Здесь $s^2$ — исправленная дисперсия, n — объем выборки.

Числа $\beta_1$ и $\beta_2$ - квантили распределения $\chi^2(l)$ с $l = n-1$ степенями свободы.

для вероятностей $\varepsilon_1$=(1 - γ)/2 и $\varepsilon_2$= (1+ γ)/2 соответственно. Т.е., F($\beta_{\varepsilon 1}$ ) = $\varepsilon_1$ .

В примере ниже квантиль обозначается через $\chi^2_\varepsilon$(γ,n-1).

Квантиль можно найти по таблице распределения $\chi^2$ для числа степеней свободы l=n-1.

**Или с помощью функции Excel:**

β=ХИ2ОБР(1-вероятность γ; n-1)

**Пример 7.7.** Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 30 единиц и вычислено $S = 1{,}5$. Найти доверительный интервал, покрывающий $\sigma$ с вероятностью $\gamma = 0{,}90$.

Имеем $n = 30$, $\gamma = 0{,}9$. По таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ находим

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+0{,}9}{2};30-1} = \chi^2(0{,}95;29) = 17{,}7,$$

$$\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-0{,}9}{2};30-1} = \chi^2(0{,}05;29) = 42{,}6.$$

Доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{30-1}\cdot 1{,}5}{\sqrt{42{,}6}}, \frac{\sqrt{30-1}\cdot 1{,}5}{\sqrt{17{,}7}}\right)$$

или $1{,}238 < \sigma < 1{,}920$.

**Таблица квантилей распределения** $\chi^2_\varepsilon(\gamma,n-1)$.

В 1-м столбце число степеней свободы. В ячейках- значения квантиля β (F(β)= ε).

| | Вероятности ε | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *l* | **0,005** | **0,025** | **0,05** | **0,95** | **0,975** | **0,995** |
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 3,84 | 5,02 | 7,88 |
| 2 | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 5,99 | 7,38 | 10,60 |
| 3 | 0,07 | 0,22 | 0,35 | 7,81 | 9,35 | 12,84 |
| 4 | 0,21 | 0,48 | 0,71 | 9,49 | 11,14 | 14,86 |
| 5 | 0,41 | 0,83 | 1,15 | 11,07 | 12,83 | 16,75 |
| 6 | 0,68 | 1,24 | 1,64 | 12,59 | 14,45 | 18,55 |
| 7 | 0,99 | 1,69 | 2,17 | 14,07 | 16,01 | 20,28 |
| 8 | 1,34 | 2,18 | 2,73 | 15,51 | 17,53 | 21,96 |
| 9 | 1,73 | 2,70 | 3,33 | 16,92 | 19,02 | 23,59 |
| 10 | 2,16 | 3,25 | 3,94 | 18,31 | 20,48 | 25,19 |
| 11 | 2,60 | 3,82 | 4,57 | 19,68 | 21,92 | 26,76 |
| 12 | 3,07 | 4,40 | 5,23 | 21,03 | 23,34 | 28,30 |
| 13 | 3,57 | 5,01 | 5,89 | 22,36 | 24,74 | 29,82 |
| 14 | 4,07 | 5,63 | 6,57 | 23,68 | 26,12 | 31,32 |
| 15 | 4,60 | 6,26 | 7,26 | 25,00 | 27,49 | 32,80 |
| 16 | 5,14 | 6,91 | 7,96 | 26,30 | 28,85 | 34,27 |
| 17 | 5,70 | 7,56 | 8,67 | 27,59 | 30,19 | 35,72 |
| 18 | 6,26 | 8,23 | 9,39 | 28,87 | 31,53 | 37,16 |
| 19 | 6,84 | 8,91 | 10,12 | 30,14 | 32,85 | 38,58 |
| 20 | 7,43 | 9,59 | 10,85 | 31,41 | 34,17 | 40,00 |
| 21 | 8,03 | 10,28 | 11,59 | 32,67 | 35,48 | 41,40 |
| 22 | 8,64 | 10,98 | 12,34 | 33,92 | 36,78 | 42,80 |
| 24 | 9,89 | 12,40 | 13,85 | 36,42 | 39,36 | 45,56 |
| 25 | 10,52 | 13,12 | 14,61 | 37,65 | 40,65 | 46,93 |
| 49 | 27,25 | 31,55 | 33,93 | 66,34 | 70,22 | 78,23 |
| 50 | 27,99 | 32,36 | 34,76 | 67,50 | 71,42 | 79,49 |
| 99 | 66,51 | 73,36 | 77,05 | 123,23 | 128,42 | 138,99 |