**1 РАЗДЕЛ**

Методы решения СЛАУ:

1) **Прямой**

-Метод Гаусса

-Метод Крамера

-Метод прогонки

2**) Иттерационный**

-Метод Якоби

-Метод Гаусса-Зейделя

-Метод релаксации

-Многосеточный метод

**Метод Крамера** — способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы.Не может быть использован при определителе равном нулю.

**Достоинства метода Крамера**: Простой метод,независимость вычисления определителей.

**Недостатки метода Крамера**: Из-за высокой вычислительной сложности метода не применяется для машинного решения больших СЛАУ, высокая чувсвительность к ошибкам округления.

**Особенности метода Гаусса**: может быть использован с любым числом уравнений.

**Достоинства метода Гаусса**: менее трудоёмкий по сравнению с другими методами; позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение; позволяет найти максимальное число линейно независимых уравнений - ранг матрицы системы.

**Недостатки метода Гаусса**: Одним из основных недостатков является то, что при его реализации накапливается вычислительная погрешность, высокая трудоемкость.

**Метод прогонки** - простой и эффективный алгоритм решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами, является частным случаем метода Гаусса.

Наиболее экономичной системой является метод скалярной прогонки.

**2 РАЗДЕЛ**

-К алгебраическим относят уравнения, в которых функция f(x) является степенным многочленом

-К трансцендентным относят уравнения, содержащие трансцендентные функции, то есть показательную, логарифмическую, тригонометрические функции.

Корень уравнения f(x)=0 –это значение х,которое обращает уравнение в тождество.

Корень уравнения называется простым,если f ’(x)≠0.В случае f ’(x)=0 корень называют кратным

Корень х является простым, если график пересекает ось Ох под ненулевым углом, и кратным, если пересечение происходит под нулевым углом.

Отрезок [а. b], содержащий только один корень уравнения, называют отрезком локализации корня х. Цель этапа локализации считают достигнутой, если для каждого из подлежащих определению корней удалось указать отрезок локализации

1- Локализация или отделение корней ( цель этапа считают достигнутой, если для каждого из подлежащих определению корней удалось указать отрезок локализации )

2- Итерационное уточнение корней

Итерационный метод-численный метод решения математических задач, приближённый метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Суть такого метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным)

Итерация – шаг итерационного процесса

Итерационный процесс -однотипный набор действий с использованием с использованием использованных ранее приближений

Неограниченное продолжение итерационного процесса в теории позволяет построить бесконечную последовательность приближений к решению-итерационную последовательность. Если эта последовательность сходится к решению задачи,то говорят,что итерационный метод сходится

$$\left|x^{n+1}-\overline{x}\right|\leq C\left|x^{n}-\overline{x}\right|^{p}$$

Вычисления не могут продолжаться бесконечно долго и должны быть прерваны в соответствии с некоторым критерием.Для формирования критерия окончания при достижении заданной точности, используют апостериорные оценки погрешности-неравенства,в которых величина погрешности оценивается через известные или получаемые в ходе вычислительного процесса величины

Под обусловленностью вычислительной задачи понимают чувствительность ее решения к малым погрешностям входных данных.

Задачу называют хорошо обусловленной, если малым погрешностям входных данных отвечают малые погрешности решения, и плохо обусловленной, если возможны сильные изменения решения.

Метод дихотомии (половинного деления)

Быстрый и достаточно простой численный метод решения уравнений, основанный на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения до того времени, пока не будет достигнута заданная точность

Достоинства – надежность

Недостатки- если на заданном интервале содержится более одного корня, то метод не работает. Медленная сходимость

Метод простой Итерации

(Одношаговый)

Достоинства-простота

Недостатки- медленная сходимость

Метод Ньютона (касательных)

Достоинства- скорость сходимости

Недостаток- приходится вычислять производные на каждой итерации (если производная близка к 0,то сходимость медленная, локальная)

Упрощенный метод Ньютона

(производная считается только в 1 точке)

Достоинства- возможная экономичность

Недостаток- скорость

Метод хорд

(Двухшаговый)

Достоинства-Более высокая скорость сходимости,

Простота метода

Недостатки-для некоторых частных случаев метод не применим

Различия- В упрощенном методе Ньютона нужна посчитать всего одну производную в начальной точке, и далее для всех итераций значения производных полагаются постоянными и равными первой производной.

Сходимость не квадратичная, а линейная

Методы хорд и касательных дают приближения корня с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом, тогда уточнение корня происходит быстрее. (метод хорд применяется со стороны вогнутости, а метод касательных – со стороны выпуклости графика

**3 РАЗДЕЛ**

***Аппроксимацией*** (приближением) функции  называется нахождение такой функции  (*аппроксимирующей функции*), которая была бы близка заданной.

**Задача аппроксимации** состоит в приближенной замене функции f(x) , заданной таблично, на некоторую функцию Ф(x) так, чтобы отклонение Ф(х) от f(x) в некоторой области удовлетворяло заданному условию.

**Особенность аппроксимации**: если для описания табличных данных будет выбрана функция с меньшим количеством коэффициентов(m<n), то нельзя подобрать коэффициенты функции так, чтобы функция проходила через каждую узлоую точку.

Выбор класса аппроксимирующей функции**. Решая эту задачу, необходимо соблюдать требования.**

1) простота функции (в смысле математических операций и реализации на ЭВМ);

2) достаточная точность (ошибка аппроксимации должна быть одного порядка с разбросом параметров характеристик отдельных реализаций в ансамбле реализаций);

3) наглядность, позволяющая судить об изменении коэффициентов аппроксимации при изменении характеристик процесса;

**Интерполяция** - это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. Сущность интерполяции состоит в отыскании значения функции в некоторой промежуточной точке.

**Экстраполяция**- вычисление функции вне того интервала, на котором она задана в виде таблицы,графически или иным способом.

Виды интерполяции:

1) линейная интерполяция

**Недостатки:** Большая погрешность для малых n, функция негладкая, нельзя дифферинцировать

2) интерполяция по Лагранжу

**Достоинство** -метод относится к числу итерационных методов и имеет наибольшую точность интерполяции. Основной **недостаток** метода -медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени.

3) квадратичная

4) сплайн-интерполяция

**Достоинства**: 1. Простые методы 2. Для нахождения коэффициентов используется точный экономичный метод прогонки 3. Сходятся, маленькая погрешность 4. Функция, производная непрерывны 5. Можно использовать для нахождения интегралов и производных

5) тригонометрическая

6) экспоненциальная

7) параболическая

Для **увеличения точности интерполяции** можно: увеличить число узлов, увеличить степень полинома , использовать кусочную аппроксимацию.

**4 РАЗДЕЛ**

**Сплайн** - функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом).

Дефектом сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Стандартные алгоритмы построения сплайнов позволяют по дискретному набору точек строить кривые вида . Однако такой способ представления не работает в ситуациях, когда одному значению аргумента соответствует несколько значений функции, что характерно, например, для замкнутых и самопересекающихся кривых.

Такие ситуации типичны, например, в машиностроении, поскольку кривые инженерных объектов могут иметь вертикальные касательные.В этом случае сплайн строят как параметрическую функцию.

Метод прогонки является эффективным методом решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами, возникающими при конечно-разностной аппроксимации задач для ОДУ и одномерных уравнений в частных производных второго порядка, и является частным случаем метода Гаусса.

**5 РАЗДЕЛ**

**Метод наименьших квадратов** обычно используется для статистической обработки результатов эксперимента, когда по заданному набору точек на плоскости получают функцию в виде уравнения (т. е. аналитически заданную), непрерывную в области, заданной этими точками, которая максимально близко соответствует этому заданному набору точек.

Критерий её поиска — минимизация суммы квадратов отклонений данной функции (линии регрессии) от изначально заданных точек, **поэтому и называется «метод наименьших квадратов**.

**Метод наименьших квадратов** **может использоваться для «решения»** переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции.

**Оценить точность** можно при помощи коэффицента детерминации.

**Метод наименьших квадратов не рекомендуется использовать** при аппроксимации многочленов выше 5-го порядка так как система является плохо обусловленной.

**6 РАЗДЕЛ**

Определенный интеграл от неотрицательной функции y = f(x) с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции y = f(x), слева и справа – отрезками прямых x = a и x = b, снизу – отрезком оси Ох.

Повышения точности можно добиться еменьшением шага разбиения либо повышением степени используемых интерполяционных многочленов.

Априорная оценка погрешности - та, которая может быть получена до решения задачи. Она позволяет сначала определить, при каких параметрах математической модели может быть получена удовлетворительная точность и только после этого провести решение поставленной задачи. Такая последовательность действий является наиболее рациональной. Однако на практике получить априорную оценку погрешности удается нечасто.

Апостериорная оценка погрешности - та, которая получается после (в результате) решения задачи. Для этого, как правило, необходимо получить несколько решений задачи с различными параметрами математической модели. Такой подход более трудоемок, но обычно он бывает единственно возможным.

Правило Рунге – это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами h
Суть его также состоит в том, чтобы, организовав вычисления двух значений интеграла по двум семействам узлов, сравнивают результаты вычислений с оценкой погрешности.

В общем случае можно рассматривать апостериорную оценку как коррекцию априорной оценки погрешности. Стремление к достижению максимально возможной точности измерения побуждает перейти от коррекции оценки погрешности к коррекции оценки измеряемой величины (результата измерения). Коррекция результата представляет собой введение в него поправок, найденных на основе всей совокупности данных — априорных и полученных в ходе измерительного эксперимента. В этих условиях апостериорное оценивание сводится к определению совокупной неточности введенных поправок

Погрешность вычилсения ОИ можно вычислить при помощи формулы Рунге.

**7 РАЗДЕЛ**

**Обыкновенное дифференциальное уравне́ние** (ОДУ) — дифференциальное уравнение для функции от одной переменной

**Зада́ча Коши́** — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Мной были освоены такие методы интегрирования ОДУ как :

1) Метод Эйлера

1.1 Простой метод Эйлера

1.2 Усовершенствованный метод Эйлера

1.3 Модифицированный метод Эйлера

2) Методы Рунге-Кутты

3) Многошаговый метод Адамса

Точность решения дифференциального уравнения можно повысить уменьшив шаг.

Методы решения ОДУ можно разделить на три группы:

1)Точные аналитические методы

2) Приближенные аналитические методы

3) Численные методы

 Неявные методы лучше приспособлены для решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, к тому же они более устойчивы. В результате, несмотря на большие затраты машинного времени на каждом шаге интегрирования, связанные с необходимостью решения СЛАУ, общие затраты могут быть значительно меньше за счет увеличения шага интегрирования и уменьшения общего количества шагов

Явными методами решения ОДУ называются такие методы, которые используют в качестве аргумента правйо части ОДУ значение y(t) с предыдущего шага. Явные схемы записываются на каждом шаге интегрирования в виду рекуррентного алгебраического соотношения.Явные методы особенно просты т.к для их реализации следует просто вычислить алгебраическое выражение.

Неявные методы связаны с тем, что на каждом шаге интегрирования искомые значения yi+1входят в разностную форму производной, так и в правую часть уравнения.Основной особенностью неявных методов служит их применимость к решению жестких дифференциальных уравнений.

В многошаговых методах для получения решения дифференциального уравнения используются результаты нескольких предыдущих шагов интегрирования путем использования различных алгоритмов экстраполяции (extra - вне , pole - узел). Многошаговые методы позволяют сократить вычисления за счет использования результатов расчета предыдущих точек, но их недостаток в том, что они требуют «разгонки», т.е. первые шаги необходимо делать одним из одношаговых методов, что усложняет алгоритм

Метод Адамса более экономичен чем РУнге-Кутта при той же точности, но для начала решения требуется разгон.Так же недостатком метода Адамса является то, что он не позволяет изменить шаг h в процессе счета; Этого недостатка лишены одношаговые методы.