ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**МОРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**имени адмирала Г.И. Невельского**

**(МГУ им. адм. Г.И. Невельского)**

Кафедра высшей математики

Ю.В. Дымченко

**Контрольные работы по математике**

**для студентов технических специальностей ФЗДО**

Учебно-методическое пособие

Владивосток 2019

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

[ПРЕДИСЛОВИЕ 3](#_Toc2499815)

[Контрольная работа №1 8](#_Toc2499816)

[Задания для контрольной работы №1. 15](#_Toc2499817)

[Контрольная работа №2 20](#_Toc2499818)

[Задания для контрольной работы №2. 24](#_Toc2499819)

[Контрольная работа №3 29](#_Toc2499820)

[Задания для контрольной работы №3. 41](#_Toc2499821)

[ЛИТЕРАТУРА 46](#_Toc2499822)

# 

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждая контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины.

Решения задач необходимо проводить в той же последовательности, что и в условиях задач. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением.

Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его зачетной книжки.

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ

I. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Трехмерное пространство *R*3. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейно-независимые системы векторов. Базис.

2. Скалярное произведение в *R*3 и его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами. Ортогональный базис. Разложение вектора по базису.

3. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители *n*-го порядка. Векторное произведение и его свойства. Смешанное произведение.

4. Уравнение плоскости в *R*3 (векторная и координатная формы). Уравнение прямой в *R*2 и *R*3 (векторная и координатная формы).

5. Системы двух и трех линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. Правило Крамера. Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными.

6. Матрицы. Действия над матрицами, обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решения.

**II. Введение в математический анализ**

7. Множество вещественных чисел. Числовые последовательности. Предел. Верхние и нижние пределы множеств. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число *е*. Натуральные логарифмы. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Свойства функции, имеющих предел.

8. Непрерывность функции. Непрерывность основных элементарных функций.

9. Бесконечно малые функции и их свойства.

10. Бесконечно большие функции и их свойства. Связь между бесконечно большими функциями и бесконечно малыми.

11. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Их использование при вычислении пределов.

12. Свойства непрерывных в точке функций. Непрерывность суммы, произведения и частного. Предел и непрерывность сложной функции.

13. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация.

14. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

**III. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**

15. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Производная суммы, произведения и частного (обзор теорем школьного курса).

16. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование.

17. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал суммы, произведения и частного. Инвариантность формы дифференциала.

18. Условия возрастания и убывания функции. Точки экстремума. Необходимые условия экстремума. Достаточные признаки существования экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

19. Исследование функции на экстремум с помощью производных высшего порядка. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точка перегиба. Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций.

**IV. Неопределенный интеграл**

20. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственной интегрирование по частям и подстановкой.

21. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Использование таблиц интегралов.

**V. Определенный интеграл**

22. Задачи, приводящие к понятию определенных интегралов. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла.

23. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.

24. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и подстановкой. Приближенное вычисление определенного интеграла: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

25. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла.

26. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций, основные свойства. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости.

**VI. Функции нескольких переменных**

27. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.

28. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

29. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

30. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия. Абсолютный экстремум.

**VII. Кратные интегралы**

31. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Двойные и тройные интегралы, их основные свойства.

32. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах.

33. Применение кратных интегралов для вычисления объемов и площадей, для решения задач механики и физики.

**VIII. Криволинейные интегралы**

34. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода, их основные свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения.

**IX. Обыкновенные дифференциальные уравнения**

35. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие об основных решениях дифференциальных уравнений. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

36. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

37. Линейные дифференциальные уравнения, однородные и неоднородные. Понятие общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

38. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.

39. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения. Векторно-матричная запись нормальной системы. Структура общего решения.

40. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение в случае простых корней характеристического уравнения.

**X. Числовые ряды. Степенные ряды**

41. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.

42. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.

43. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

44. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов.

45. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

**XVI. Теория вероятностей и математическая статистика**

46. Элементы комбинаторики. Размещения, перестановки, сочетания.

47. Основные понятия теории вероятностей. События и их классификация. Относительная частота события и ее свойства. Вероятность события и ее свойства.

48. Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность. Зависимые и независимые события.

49. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа, интегральная теорема Лапласа. Формула Пуассона.

50. Понятие случайной величины. Примеры случайных величин. Дискретная случайная величина. Закон распределения, числовые характеристики дискретной случайной величины и их свойства. Вероятностный смысл математического ожидания. Биноминальное распределение, распределение Пуассона.

51. Непрерывная случайная величина. Функция распределения и ее свойства. Плотность вероятностей. Числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия.

52. Нормальный закон распределения и его параметры. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.

53. Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Способы отбора статистического материала и его группировки. Статистическое распределение. Выборочные характеристики: средняя арифметическая, медиана, мода, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

# Контрольная работа №1

***Аналитическая геометрия. Элементы векторной и линейной алгебры. Введение в анализ, дифференциальное исчисление.***

*Основные теоретические сведения и методические указания*

1. *Определителем* -го порядка называется число , записываемое в виде квадратичной таблицы

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам , которые называются элементами определителя. Индекс указывает номер строки, а – номер столбца квадратной таблицы.

Минором элемента называется определитель порядка, получаемый из определителя -го порядка, вычеркиванием -й строки и -го столбца.

Алгебраическое дополнение элемента определяется равенством

.

Рекуррентная формула для вычисления определителя -го порядка имеет вид

(разложение определителя по элементам -й строки).

2. *Скалярным произведением* двух векторов и называется число, определяемое равенством

,

где – угол между векторами и .

3. *Векторным произведением* векторов и называется вектор , обозначаемый , который удовлетворяет условиям:

1) , ;

2) ;

3) – правая тройка векторов;

– формула для вычисления площади треугольника.

4. *Смешанное произведение* трех векторов , , есть число, равное

.

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах.

5. *Схема полного исследования функции и построение ее графика.*

Для полного исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1. указать область определения;
2. найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат;
3. установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;
4. найти асимптоты графика функции;
5. исследовать функцию на монотонность и экстремум;
6. определить интервалы выпуклости и вогнутости;
7. построить график функции.

6. *Правила дифференцирования.* Если – постоянное число и , – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) . | 2) . | 3) . |
| 4) . | 5) . | 6) . |

7. *Таблица производных основных элементарных функций*

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

7. . 8. .

9. . 10..

11.. 12..

13.. 14..

15.. 16..

**Пример 1.** Дана система линейных алгебраических уравнений:

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: *а)* по формулам Крамера; *б)* методом Гаусса; *в)* с помощью обратной матрицы. Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера - Капелли.

**Решение.** С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

данной системы и ранг расширенной матрицы

Для этого умножим первую строку матрицы *В* на –2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на –3 и сложим с третьей, получим

~ ~ .

Следовательно, *rang A = rang B =* 3 (числу неизвестных), исходная система имеет единственное решение.

*а)* Находим решение системы по формулам Крамера

где

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | | |
|  |  |  |

*б)* *Метод Гаусса.* Составим расширенную матрицу и проведем необходимые элементарные преобразования. Элементы первой строки умножим на –2 и прибавим к соответствующим элементам 2-ой строки, затем элементы первой строки умножим на –3 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки.

~ ~

Последней матрицей соответствует система, эквивалентная исходной:

Из этой системы, двигаясь снизу вверх, последовательно находим:

*в)* *Матричный метод.* Так как *det A =* -16 ≠0, то матрица *А* невырожденная, существует обратная матрица *А*-1, определяемая по формуле:

где являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов матрицы *А*.

Введем в рассмотрение матрицы столбцы для неизвестных и свободных членов:

Тогда данную систему можно записать в матричной форме:, отсюда находим - решение системы в матричной форме.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*Решение системы:*

таким образом,

**Пример 2.** Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(2,1,0),  *B*(3,-1,2),  *C*(13,3,10),  *D*(0,1,4). Найти: 1) угол между ребрами *AB* и *AD*; 2) уравнение плоскости *АВС*; 3) угол между ребром *AD* и гранью *АВС*; 4) площадь грани *АВС*; 5) объем пирамиды; 6) уравнение высоты, опущенной из вершины *AD* на грань *АВС*.

A(2,1,0)

B(3,-1,2)

D(0,1,4)

C(13,3,10)

M

1) Угол между ребрами *AB* и *AD* вычисляем по формуле:

,

где

.

;

.

2) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки имеет вид:

.

Подставляя в данное уравнение координаты точек *А,В* и *С*, получим:

Разложив определитель по элементам первой строки, получим:

,

отсюда находим искомое уравнение плоскости *АВС*:

.

3) Угол между ребром *AD* и гранью *АВС* вычисляем по формуле:

,

где - направляющий вектор ребра *AD*, - нормальный вектор грани *АВС*.

.

4) Площадь грани АВС вычисляется по формуле:

.

.

.

.

Окончательно имеем

5) Объем пирамиды вычисляем по формуле:

.

.

Объем пирамиды равен 24 (куб. ед.).

6) Уравнение высоты *DM*, опущенной из вершины *D* на грань *АВС* составляет по формуле

,

где (*x*0,  *y*0,  *z*0) – координаты точки *D*, - координаты направляющего вектора прямой *DM*. Т.к. *DM* ⊥ *АВС*, то в качестве направляющего вектора можно взять нормальный вектор . Уравнение прямой *Dm* запишется в виде:

.

**Пример 3.** Найти указанные пределы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а) |  | б) |  |
| в) |  | г) |  |

**Решение:**

а)

б) в)

г)

**Пример 4.** Исследовать функцию на непрерывность в точках , .

**Решение:** для точки *x*1 = 3 имеем:

точка – точка разрыва II

При функция определена, следовательно, не является точкой разрыва, .

**Пример 5.** Найти производную функции .

**Решение.** Логарифмируя данную функцию, получаем:

.

Дифференцируем обе части последнего равенства по *х*:

.

Отсюда

.

Далее

.

Окончательно имеем:

.

**Пример 6.** Найти производную функции *y*, если .

Дифференцируем обе части данного уравнения по , считая функцией от :

.

Отсюда находим

.

# Задания для контрольной работы №1.

В задачах **1** – **10** данную систему уравнений исследовать и решить тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) средствами матричного исчисления.

В задачах **11** – **20** даны координаты вершин треугольника *ABC*. Найти: 1) длину стороны *АВ*; 2) уравнение стороны *АВ*; 3) уравнение высоты *СН*; 4) уравнение медианы *АМ*; 5) точку *N* пересечения медианы *АМ* и высоты *СН*; 6) уравнение прямой, проходящей через вершину *С* параллельно стороне *АВ*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **11.** | А (1,-3), | В (0,7), | С (-2,4); |
| **12.** | А (7,0), | В (1,4), | С (-8,-4); |
| **13.** | А (0,2), | В (-7,-4), | С (3,2); |
| **14.** | А (3,-1), | В (11,3), | С (-6,2); |
| **15.** | А (-2,-3), | В (0,7), | С (8,3); |
| **16.** | А (1,2), | В (3,12), | С (11,8); |
| **17.** | А (-4,-1), | В (-2,9), | С (6,5); |
| **18.** | А (5,4), | В (7,11), | С (15,10); |
| **19.** | А (-8,-3), | В (4,-12), | С (8,10); |
| **20.** | А (1,0), | В (13,-9), | С (17,13); |

В задачах **21** – **30** даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: 1) угол между ребрами *AB* и *AD*; 2) уравнение плоскости *ABC*; 3) угол между ребром *AD* и гранью *ABC*; 4) площадь грани *ABC*; 5) объем пирамиды; 6) уравнение высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **21.** | А (4,2,5), | В (0,7,1), | С (0,2,7), | D (1,5,0). |
| **22.** | А (4,6,5), | В (6,9,4), | С (2,10,10), | D (7,5,9). |
| **23.** | А (7,7,3), | В (6,5,8), | С (3,5,8), | D (8,4,1). |
| **24.** | А (2,-3,1), | В (6,1,-1), | С (4,8,-9), | D (2,-1,2). |
| **25.** | А (1,-4,0), | В (5,0,-2), | С (3,7,-10), | D (1,-2,1). |
| **26.** | А (-3,4,-3), | В (-2,2,-1), | С (8,6,7), | D (5,8,3). |
| **27.** | А (3,1,-2), | В (4,-1,0), | С (14,3,8), | D (11,5,6). |
| **28.** | А (-2,0,-2), | В (2,4,-4), | С (0,11,-12), | D (-2,2,-1). |
| **29.** | А (0,4,5), | В (3,-2,1), | С (4,5,6), | D (3,3,2). |
| **30.** | А (2,-1,7), | В (6,3,1), | С (3,2,8), | D (2,-3,7). |

В задачах **31** – **40** найти указанные пределы (не пользуясь правилом Лопиталя):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **31.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **32.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **33.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **34.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **35.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **36.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **37.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **38.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **39.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **40.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |

В задачах **41** – **50** даны функции и два значения аргумента и . Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента; 2) найти односторонние пределы в точках разрыва; 3) построить график данной функции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **41.** |  |  |  |
| **42.** |  |  |  |
| **43.** |  |  |  |
| **44.** |  |  |  |
| **45.** |  |  |  |
| **46.** |  |  |  |
| **47.** |  |  |  |
| **48.** |  |  |  |
| **49.** |  |  |  |
| **50.** |  |  |  |

В задачах **51** – **60** найти производные данных функции.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **51.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **52.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **53.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **54.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **55.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **56.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **57.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **58.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **59.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |
| **60.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
|  | д) |  |  |  |

В задачах **61** – **70** исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить ее график.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **61.** |  | **62.** |  |
| **63.** |  | **64.** |  |
| **65.** |  | **66.** |  |
| **67.** |  | **68.** |  |
| **69.** |  | **70.** |  |

# Контрольная работа №2

***Интегральное исчисление функции одной переменной*. *Функции многих переменных, дифференциальное исчисление функций многих переменных. Кратные и криволинейные интегралы.***

*Основные теоретические сведения и методические указания*

1. *Таблица простейших интегралов*

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

7. . 8. .

9. . 10..

11.. 12..

2. *Формула Ньютона–Лейбница* для вычисления определенного интеграла имеет вид

,

если и первообразная непрерывна на отрезке .

3. *Частной производной* первого порядка функции двух переменных по аргументу называется предел

.

Обозначение: , . Нахождение сводится к дифференцированию функции одной переменной , полученной при фиксировании аргумента

4. Вычисление двойного интеграла от функции , определенной в области , сводится к вычислению двукратного интеграла вида

, (1)

где область  определяется условиями ,  или вида

, (2)

если область  определяется условиями , .

Переход от равенства (1) к (2) или обратно называется *изменением порядка интегрирования.*

**Пример 1.** Вычисляем .

**Решение.**

**Пример 2.** Вычислить .

**Решение.** Интеграл вычисляется по формуле интегрирования по частям: .

.

Делаем замену переменной:

.

получим:

.

**Пример 3.** Вычислить: .

**Решение.**

**Пример 4.** Вычислить: .

**Решение.**

.

Делая замену переменной:

.

получаем:

.

**Пример 5.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции в треугольнике, ограниченном прямыми , , .

**Решение.** Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника:

Y

X

0

4

2

2

4

6

6

(4, 2)

P0

Приравнивая частные производные нулю, можно на и сократить, так как внутри треугольника , тогда

.

*Решение этой системы*: . Стационарная точка лежит внутри треугольника, . На сторонах треугольника и значение функции *z* равно нулю. Найдем наибольшее и наименьшее значения на стороне . На ней и

.

Стационарные точки находим из уравнения .

.

(т.к. *х* = 0 – граничная точка).

.

На концах интервала .

Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции *z* в данном треугольнике надо искать среди следующих ее значений:

в точке на стороне в точке (4, 2).

Сравнивая полученные значения видно, что наибольшее значение функция принимает внутри треугольника в точке ; наименьшее значение *z* = - 128 – границе, в точке (4, 2).

**Пример 6.** Вычислим работу силы вдоль отрезка прямой *АВ*, если *А* (1, 1, 1) и (2, 3, 4).

**Решение.** Запишем параметрические уравнения прямой *АВ*:

.

Тогда работа *А* силы на пути *АВ* вычисляется по формуле

.

# Задания для контрольной работы №2.

В задачах **1** – **10** найти неопределенные интегралы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **2.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **3.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **4.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **5.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **6.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **7.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **8.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **9.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |
| **10.** | а) |  | б) |  |
|  | в) |  | г) |  |

В задачах **11** – **20** вычислить определенный интеграл.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **11.** |  | **12.** |  |
| **13** |  | **14.** |  |
| **15.** |  | **16.** |  |
| **17.** |  | **18.** |  |
| **19.** |  | **20.** |  |

В задачах **21** – **30** вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **21.** |  | **22.** |  |
| **23.** |  | **24.** |  |
| **25.** |  | **26.** |  |
| **27.** |  | **28.** |  |
| **29.** |  | **30.** |  |

**31.** Дана функция . Показать, что

**32.** Дана функция . Показать, что

**33.** Дана функция . Показать, что

**34.** Дана функция . Показать, что

**35.** Дана функция . Показать, что

**36.** Дана функция . Показать, что

**37.** Дана функция . Показать, что

**38.** Дана функция . Показать, что

**39.** Дана функция . Показать, что

**40.** Дана функция . Показать, что

В задачах **41** – **50** найти наименьшее и наибольшее значения функции в заданной замкнутой области.

**41.** в треугольнике, ограниченном прямыми .

**42.** в треугольнике, ограниченном прямыми .

**43.** в квадрате .

**44.** в треугольнике, ограниченном прямыми .

**45.** в треугольнике, ограниченном прямыми .

**46.** в прямоугольнике .

**47.** в квадрате .

**48.** в области, ограниченной линиями .

**49.** в квадрате .

**50.**  в области, ограниченной линиями , , .

В задачах **51** – **60** требуется: 1) построить на плоскости область интегрирования заданного интеграла; 2) изменить порядок интегрирования и вычислить площадь области при заданном и измененном порядке интегрирования.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **51.** |  | **52.** |  |
| **53.** |  | **54.** |  |
| **55.** |  | **56.** |  |
| **57.** |  | **58.** |  |
| **59.** |  | **60.** |  |

В задачах **61** – **70** найти работу силы при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **61.** |  | **62.** |  |
| **63.** |  | **64.** |  |
| **65.** |  | **66.** |  |
| **67.** |  | **68.** |  |
| **69.** |  | **70.** |  |

# Контрольная работа №3

***Дифференциальные уравнения*. *Ряды.***

***Теория вероятностей и математическая статистика***

*Основные теоретические сведения и методические указания*

1. Уравнение вида называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.* Его общим интегралом будет

.

2. Дифференциальное уравнение называется *однородным* относительно переменных и , если – однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е. . данное уравнение с помощью замены сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

3. Уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением.* Общее решение уравнения находим по формуле

.

4. Уравнение вида

, (1)

где и – постоянные числа называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка*. Квадратное уравнение называется характеристическим уравнением.

Если корни , характеристического уравнения действительны и различны, то общий интеграл уравнения (1) выражается формулой

.

Если , то общий интеграл уравнения (1) находится по формуле

.

Если , то общее решение уравнения (1) находится по формуле

.

5. Уравнение вида

, (2)

называется *неоднородным линейным уравнением второго порядка*. Если – общее решение соответствующего однородного уравнения, – частное решение уравнения (2), то общее решение уравнения (2) имеет вид .

Укажем правило нахождения частного решения уравнения (2) методом неопределенных коэффициентов.

Пусть , тогда:

1) , если не является корнем характеристического уравнения;

2) , если является простым корнем характеристического уравнения;

3) , если является двукратным корнем характеристического уравнения.

Пусть , тогда:

1) , если число не является корнем характеристического уравнения;

2) , если число не является корнем характеристического уравнения.

6. Ряд вида

(3)

называется *степенным рядом*, – коэффициенты ряда. Число называется *радиусом сходимости* ряда, если ряд (3) сходится при и расходится при .

При ряд может как сходиться, так и расходиться. Интервал называется *интервалом сходимости* ряда. Радиус сходимости находится по формуле

.

1. *Математическое ожидание* *дискретной случайной величины* – это сумма произведений значений случайной величины на вероятности их наступления. Обозначают М*(Х),* т.е. по определению

.

*Математическое ожидание непрерывной случайной величины:*



*Дисперсия* – это математическое ожидание квадратов отклонений ДСВ от ее математического ожидания. Обозначают . Итак, по определению

.

Используя свойства математического ожидания, для дисперсии можно получить следующую формулу

.

*Среднее квадратическое отклонение -* корень квадратный из ее дисперсии

.

Среднее квадратическое отклонение, также, как и дисперсия, характеризует рассеяние случайной величины от ее математического ожидания, но имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

1. *Выборочное среднее* является точечной оценкой математического ожидания генеральной совокупности:

;

*Выборочная дисперсия* является точечной оценкой дисперсии генеральной совокупности:

;

*Выборочное среднее квадратичное отклонение* является точечной оценкой среднего квадратичного отклонения генеральной совокупности:

.

**Пример 1.** Найти решение системы дифференциальных уравнений методом характеристического уравнения.

**Решение.** Частное решение системы будем находить в следующем виде . Требуется определить постоянные *К*1, *К*2 и *λ* так, чтобы функции *x*(*t*), *y*(*t*) удовлетворяли заданной системе уравнений. Подставляя их в систему и сокращая на , получим систему уравнений:

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

, – корни характеристического уравнения.

Корню соответствует система

или .

Полагаем , тогда . Получаем решение системы:

.

Корню соответствует система

или .

Получаем , тогда . Получим решение системы:

.

Общее решение исходной системы имеет вид

**Пример 2.** Исследовать ряд на сходимость.

1. 

Применим признак сравнения. Для сравнения выбираем сходящийся

() геометрический ряд  Замечаем, что для всех n. Следовательно, и исходный ряд сходится.

2.  Применим признак Даламбера:

a) запишем общий член  и последующий  (вместо n в подставляем n+1);

б) находим отношение  и предел этого отношения.

 исходный ряд сходится.

3.  Удобно применить радикальный признак Коши.

исходный ряд расходится.

4. . Для исследования применим интегральный признак Коши.

Заменим в выражении общего члена  индекс ”n“ на аргумент ”x“, т. е. запишем функцию  которая непрерывна на интервале [2,). Вычислим

 т. е. интеграл расходится. Из его расходимости следует расходимость исходного ряда.

5. – это знакочередующийся ряд, применим признак Лейбница. Проверим два условия:

a) 1> члены ряда, взятые по модулю, убывают;

б) 

Оба условия выполняются, т. е. исходный ряд сходится. Но так как ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится, как гармонический, то исходный ряд сходится условно.

**Пример 3.** Найти область сходимости степенного ряда .

**Решение.** Радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле:

.

Так как

,

то

.

Степенной ряд сходится абсолютно в интервале .

Исследуем поведение ряда на концах интервала.

При имеем , данный ряд расходится.

При имеем , ряд сходится по признаку Лейбница, причем сходится условно. Следовательно, область сходимости

ряда является полуинтервал .

**Пример 4.** В первом ящике 6 белых и 4 зеленых шара, во втором ящике 5 белых и 3 зеленых шара. Из 1-го ящика во 2-й переложили один шар. После этого из 2-го ящика берут два шара. Найти вероятность того, что будет взят один белый шар и один зеленый.

***Решение*.** Изобразим схематически ситуацию примера.

1-й ящик 2-й ящик

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 6бел+ 4зел | ⇒ 1 шар | 5бел + 3зел | ⇒ 2 шара = 1бел + 1зел |

10 шаров 8 шаров

Пусть событие *А* – из 2-го ящика берут 1 белый и 1 зеленый шары. Из 1-го ящика во второй можно переложить 1 белый или 1 зеленый шар. Поэтому введем две гипотезы

 – из 1-го ящика во 2-й переложен 1 белый шар;

 – из 1-го ящика во 2-й переложен 1 зеленый шар.

Найдем вероятности этих гипотез. , где  – число всех вариантов, т.е. сколькими способами можно взять 1 шар из 1-го ящика, имеющего 10 шаров, следовательно ,  – число благоприятных вариантов, т.е. сколькими способами можно извлечь 1 зеленый шар из 6 зеленых, значит . Поэтому

.

Аналогично находим вероятность второй гипотезы

.

По формуле полной вероятности имеем

.

Найдем условные вероятности события *А* при гипотезах Н1 и *Н*2.

При 1-й гипотезе из 1-го ящика во 2-й перекладывается 1 белый шар. Значит во 2-м ящике белых станет 6, зеленых 3, а всего шаров будет 9. Условная вероятность события *А* при 1-й гипотезе равна , где  – число всех вариантов, которыми можно взять 2 шара из 9, значит ,

 – число вариантов взять из 2-го ящика 1 белый (из 6 белых) и 1 зеленый шар (из 3 зеленых). Поэтому . Тогда условная вероятность события А при 1-ой гипотезе равна .

При 2-й гипотезе из 1-го ящика во 2-й перекладывается 1 зеленый шар. Значит во 2-м ящике зеленых станет 4, белых шаров 5, а всего шаров будет 9 и

.

Подставляем найденные значения в формулу полной вероятности

 = .

*Ответ*: 0,522.

**Пример 5.** Пусть в условии предыдущего примера из 2-го ящика извлекли два шара и оказалось, что это 1 белый и 1 зеленый. Найти вероятность того, что из 1-го ящика во 2-й был переложен 1 белый шар.

***Решение*.** Согласно прежним обозначениям, нам надо найти  – вероятность первой гипотезы, если событие А произошло. По формуле Байеса искомая вероятность равна

.

*Ответ*: 0,574.

**Пример 6.** Закон распределения дискретной случайной величины имеет вид

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | Σ |
| *р* | 0,024 | 0,188 | 0,452 | 0,336 | 1 |

Найдем числовые характеристики и построим график функции распределения.

1. Математическое ожидание:

.

2. Дисперсия: .



.

.

3. Среднее квадратическое отклонение:

.

Итак, .

*Функция распределения F(x) и ее график*

По определению функции распределения вероятностей

.

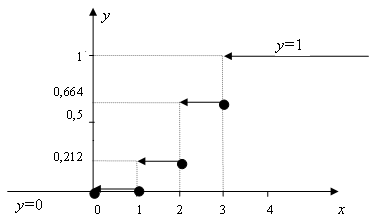
Последовательно находим



Графиком этой функции будет кусочно-постоянная линия, лежащая в полосе между прямыми , что следует из определения функции.

Теперь строим график этой функции. Для значений  значение функции равно нулю, график совпадает с осью . Для  графиком будет прямая .

При строгом неравенстве точку не включаем и отмечаем ее стрелкой. При наличии равенства точку включаем и отмечаем ее жирной точкой.



**Пример 7.** Дана функция распределения *F(x)* случайной величины Х



Найти: 1. Плотность распределения вероятностей .

1. Числовые характеристики распределения – математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение – .
2. Построить графики функции распределения и плотности распределения .

***Решение*.** 1. По определению, плотность распределения вероятностей равна производной от функции распределения, т.е.



1. Теперь найдем числовые характеристики. Так как плотность распределения *f(x)* не равна нулю только на промежутке от нуля до единицы, то везде интегрирование будет вестись по этому промежутку. Находим:

*а*) ***Математическое ожидание*:**

=

=.

*b*) ***Дисперсия*:** .



.

.

*с)* ***Среднее квадратическое отклонение*:**

.

3. Строим график функции  – функции распределения вероятностей и график функции  – плотности распределения вероятностей.

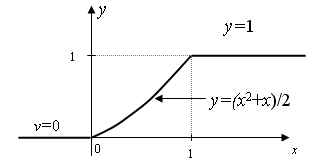


График функции 

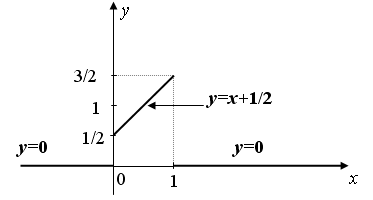


График функции 

**Пример 8.** Определим статистические числовые характеристики случайной величины Х

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| *ni* | 3 | 5 | 6 | 2 | 1 |

Рассчитаем выборочное среднее. Объем выборки *n* = 17, значит:



Рассчитаем выборочную дисперсию:



Выборочное среднее квадратичное отклонение:



# Задания для контрольной работы №3.

В задачах **1** – **10** найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** |  | **2.** |  |
| **3.** |  | **4.** |  |
| **5.** |  | **6.** |  |
| **7.** |  | **8.** |  |
| **9.** |  | **10.** |  |

В задачах **11** – **20** найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **11.** |  | **12.** |  |
| **13.** |  | **14.** |  |
| **15.** |  | **16.** |  |
| **17.** |  | **18.** |  |
| **19.** |  | **20.** |  |

В задачах **21** – **30** найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **21.** |  |  |  |
| **22.** |  |  |  |
| **23.** |  |  |  |
| **24.** |  |  |  |
| **25.** |  |  |  |
| **26.** |  |  |  |
| **27.** |  |  |  |
| **28.** |  |  |  |
| **29.** |  |  |  |
| **30.** |  |  |  |

В задачах **31** – **40** найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям, двумя способами: а) с помощью характеристического уравнения; б) методом операционного исчисления.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **31.** |  | **32.** |  |
| **33.** |  | **34.** |  |
| **35.** |  | **36.** |  |
| **37.** |  | **38.** |  |
| **39.** |  | **40.** |  |

В задачах **41** – **50** исследовать сходимость числового ряда.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **41.** |  | **42.** |  |
| **43.** |  | **44.** |  |
| **45.** |  | **46.** |  |
| **47.** |  | **48.** |  |
| **49.** |  | **50.** |  |

В задачах **51** – **60** найти область сходимости степенного ряда .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **51.** |  | **52.** |  |
| **53.** |  | **54.** |  |
| **55.** |  | **56.** |  |
| **57.** |  | **58.** |  |
| **59.** |  | **60.** |  |
|  |  |  |  |

**61-70.** Решить задачи.

**61.** Электролампы изготовляются на 3 заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй – 40%, третий – 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второй – 80%, третий – 81%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность, что купленная в магазине лампа окажется стандартной.

**62.** Вероятность выхода из строя за время *Т* одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время *Т* из 100 конденсаторов, работающих независимо, выйдут из строя от 14 до 26 конденсаторов.

**63.** Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равно 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

**64.** Электрическая схема состоит из трех блоков, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что каждый из них работает исправно, соответственно равна *р*1=0,8, *р*2=0,4, *р*3=0,7. Схема годна к эксплуатации при наличии двух исправных блоков из трех. Определить вероятность того, что схема будет работать.

**65.** У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом №1 и 4 детали – заводом №2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом №1.

**66.** Вероятность появления бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 600 случайно отобранных деталей окажется 4 бракованных.

**67.** В партии из 1000 изделий имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 50 изделий, взятых наудачу из этой партии, ровно три окажутся дефектными.

**68.** Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: *а*) только один из стрелков попал в цель; *б*) только два стрелка попали в цель; *в*) все три стрелка попали в цель.

**69.** При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760?

**3070.** Имеются три машины, которые изготавливают соответственно 35%, 20% и 45% некоторых однотипных деталей. Причем первая машина дает 6% брака, вторая – 4%, третья – 2%. Случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что бракованное изделие изготовлено на первой машине.

В задачах 7**1** – **75** задан закон распределения случайной величины (в первой строке таблицы даны возможные значения величины , а во второй строке указаны вероятности этих возможных значений). Найти: 1) математическое ожидание ; 2) дисперсию ; 3) среднее квадратическое отклонение .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **71.** |  | **72.** |  |
| **73.** |  | **74.** |  |
| **75.** |  |  |  |

В задачах **76** – **80** задана случайная величина функцией распределения *F*(*x*). Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **76.** |  | **77.** |  |
| **78.** |  | **79.** |  |
| **80.** |  |  |  |

В задачах **81** – **90** найти: а) выборочную среднее ; б) выборочную дисперсию ; в) выборочное средне квадратическое отклонение по данному статистическому распределению выборки. Построить полигон частот данного признака .

|  |  |
| --- | --- |
| **81.** |  |
| **82.** |  |
| **83.** |  |
| **84.** |  |
| **85.** |  |
| **86.** |  |
| **87.** |  |
| **88.** |  |
| **89.** |  |
| **90.** |  |

# ЛИТЕРАТУРА

1. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика.

М.: Юрайт, 2014. 2014. 479 с.

1. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Юрайт, 2013. 404 с.
2. **Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.** Краткий курс высшей математики. М.: АСТ, Астрель, 2001. 656 с.
3. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. в 2 т.

М.: Интеграл-Пресс, 2006. Т 1. 416 с.

1. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. в 2 т.

М.: Интеграл-Пресс, 2006. Т 2. 544 с.

1. **Шипачев В.С.** Высшая математика. М.: Юрайт, 2014. 447 с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математики: в 3ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть.. Минск: Высшэйш. шк., 1990. Ч. 1. 270 с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математики: в 3ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. Минск: Высшэйш. шк. 1991. Ч. 2. 352 с.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математики: в 3ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. Минск: Высшэйш. шк. 1991. Ч. 3. 288 с.