# ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задача 1.** Найти области определения следующих функций

21. $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$
22. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$
23. $\zeta = \psi + \sqrt{\xi}$
24. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
25. $\ln(x^2 + y)$
26. $z = x + \sqrt{y}$
27. $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$
28. $z = 4 - x - 2y$
29. $z = \dfrac{1}{3x - y}$
30. $z = \arcsin \dfrac{2y}{x+1}$

**Задача 2.** Найти полный дифференциал функции

1. $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$
2. $z = x^3 + y^4 + 3x^2 y$
3. $z = \sin(x \cdot y)$
4. $z = e^{xy}$
5. $z = x^2 + 2y^2 - xy$
6. $z = \ln(x^3 - y^2)$
7. $z = (x + y - xy)^2$
8. $z = \dfrac{1}{x+y}$
9. $z = e^{x^2 + y^2}$
10. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
11. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$
12. $z = \sin y \cdot \cos x$
13. $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$
14. $z = x^3 \ln y$
15. $z = \dfrac{x+y}{x-y}$
16. $z = x^{\frac{1}{y}}$
17. $z = \sqrt{x^2 - y^3}$
18. $z = \ln(x^2 + 2y^2)$
19. $z = \dfrac{2x + 3y}{x - y}$
20. $z = \arcsin(x^2 + y^2)$
21. $z = \cos \dfrac{x}{y}$
22. $z = \sqrt{x - y^2}$
23. $z = \arccos(2x - 2y)$
24. $z = (x^3 - xy)^3$
25. $z = x^y$
26. $z = \dfrac{2x - 3y}{x + y}$
27. $z = x^{\sqrt{y}}$
28. $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$
29. $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$
30. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

**Задача 3.** Вычислить приближенно $z = f(x, y)$ в точке $A(x, y)$.

| | |
|---|---|
| 21. $z = y^{x}$ | $A(3{,}01;\ 1{,}03)$ |
| 22. $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$ | $A(1{,}08;\ 1{,}94)$ |
| 23. $z = 2xy - 2x + y$ | $A(1{,}93;\ 1{,}05)$ |
| 24. $z = \sqrt{x^y + \ln x}$ | $A(1{,}01;\ 1{,}98)$ |
| 25. $z = x^2 + xy + y^2 + 3$ | $A(1{,}02;\ 2{,}02)$ |
| 26. $z = 2x^2 + y^2 - 3x + y$ | $A(1{,}03;\ 0{,}98)$ |
| 27. $z = x^2 - 2xy + y^2$ | $A(1{,}08;\ 1{,}94)$ |
| 28. $z = \sqrt{y^2 + e^x}$ | $A(0{,}03;\ 2{,}02)$ |
| 29. $z = \sqrt{2y^2 + e^x}$. | $A(0{,}01;\ 1{,}02)$ |
| 30. $z = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$ | $A(1{,}03;\ 0{,}98)$ |

**Задача 4.** Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция $u$.

$\cancel{\partial x \partial y}$ $\cancel{\partial y \partial x}$

22. $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$

$\partial^2 z$ $\partial^2 z$

**Задача 5.** Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$.

15. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$
16. $z = (x+1)^2 - 2y^2$
17. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
18. $z = x_2 + 2y^2 + 6x - 4y + 11$
19. $z = e^{2x}(x + 2y + y^2)$
20. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
21. $z = x^2 + y^2 = xy - 4\ln x - 10\ln y$
22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$
23. $z = x^3 + y^3 - 15xy$
24. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y$
25. $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 5 - 6y$
26. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
27. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y$
28. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
29. $z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$
30. $z = 3x^2 - 2y_2 - 4y - 2$

**Задача 6.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,y)$ в области $D$, ограниченной заданными линиями.

1. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$; $D$: $y = \frac{1}{3}x^2$; $y=3$
2. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$; $D$: $x+y+2=0$; $y=0$; $x=0$
3. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$; $D$: $x=-1$; $x=1$; $y=-1$; $y=1$
4. $z = 4 - 2x^2 - y^2$; $D$: $y=0$; $y = \sqrt{1-x^2}$
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$; $D$: $y=x+2$; $y=0$; $x=2$
6. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$; $D$: $x=0$; $x=1$; $y=0$; $y=2$
7. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$; $D$: $x=3$; $y=0$; $y=x+1$
8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $D$: $x=0$; $x=2$; $y=-1$; $y=2$
9. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $D$: $x=1$; $y=1$; $x+y=1$
10. $z = xy - 3x - 2y$; $D$: $x=0$; $y=1$; $x=4$; $y=4$
11. $z = x^2 + y^2 - xy + y + x$; $D: x = 0,\ y = x,\ x + y = 3$
12. $z = x^2 + y^2 - 3xy$; $D: x = 0,\ y = 0,\ y = 3 - x^2$
13. $z = x^3 + y^2 - 2xy$; $D: x = 0,\ y = x,\ x + y = 4$
14. $z = x^2 - xy + y^2 + 4x$; $D: -1 \le x \le 1,\quad -1 \le y \le 1$
15. $z = x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 11$; $D: x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$
16. $z = x^3 + y^3 - 5xy - 5$; $D: x = 0,\ y = x,\ x + y = 5$
17. $z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$; $D: x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$
18. $z = x^2 + y^2 - 3xy$; $D: -1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2$
19. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1$; $D: -1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2$
20. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $D: x = 0,\ y = x,\ x + y = 3$
21. $z = x^3 + x^2y^3 - 2x^2y^2$; $D: x = 0,\ y = x,\ x + y = 3$
22. $z = 3x^2 + y^2 + 3xy - 6x - 2y + 1$; $D: 0 \le x \le 4,\quad 0 \le y \le 4$

$D: x=0,\ y=x,\ x+y=3$

**Задача 7.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

22. $z = y + \ln\dfrac{x}{z}$; $M_0(1; 1; 1)$
23. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $M_0\left(1; \sqrt{3}; \dfrac{\pi}{3}\right)$
24. $2x^2 + y^2 + 5z^2 - 22 = 0$; $M_0(2; -3; 1)$
25. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$; $M_0(1; 1; -1)$
26. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$; $M_0(0; 1; 0)$
27. $z = xy$; $M_0(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$
28. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 27$; $M_0(4; -2; 1)$
29. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2 = 0$; $M_0(0; 1; -1)$
30. $3x^2 - 2y^2 + 3z + 8 = 0$; $M_0(1; -2; -1)$

**Задача 8.** Найти производную и градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке $M$ по направлению вектора $\bar{l}$.

15. $u = xy - \dfrac{x}{z}$,
$\mathbf{l} = 5\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$M(-4, 3, -1)$.

17. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$,
$\mathbf{l} = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{k}$,
$M(2,1,1)$.

19. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$,
$\lambda = 4\iota - 2\varphi + 4\kappa$,
$M(2, 4, 1\,1)$.

21. $u = \dfrac{1}{4}x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$,
$\lambda = 2\iota + 8\varphi$,
$M\left(-2, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

23. $u = x\sqrt{y} - yz^2$,
$\lambda = 2\iota + 2\varphi - 4\kappa$,
$M(2, 1, -1)$.

25. $u = -\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - 8xyz$,
$\lambda = 2\iota + 2\varphi - 2\kappa$,
$M(2, 2, -1)$.

27. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$,
$\lambda = 2\iota + 2\varphi - 4\kappa$,
$M(3, 4, 1)$.

29. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$,
$\lambda = 2\iota - 2\varphi - \kappa$,
$M(1, 1, 0)$.

16. $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$,
$\mathbf{l} = -2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
$M(1, -3, 4)$.

18. $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$,
$\mathbf{l} = 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$,
$M(1,1,1)$.

20. $u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz$,
$\lambda = 2\iota + 4\varphi - 4\kappa$,
$M(1, 1, 1)$.

22. $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,
$M(2,2,4)$.

24. $u = 7\ln\left(\dfrac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$,
$\lambda = 14\iota - 8\varphi + 8\kappa$,
$M(1, 1, 1)$.

26. $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$,
$\lambda = 8\iota - 2\varphi + 2\kappa$,
$M(1, -2, 4)$.

28. $u = x\sqrt{y} - (z = y)\sqrt{x}$,
$\lambda = 2\iota - 2\varphi + 2\kappa$,
$M(1, 1, -2)$.

30. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$,
$\lambda = 4\iota - 2\varphi + 2\kappa$,
$M(0, -3, 4)$.

**Задача 9.** По данным опыта найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

14.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5,7 | 6,7 | 5,2 | 3,2 | 3,7 |

15.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5,6 | 6,6 | 5,3 | 3,3 | 3,8 |

16.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,6 | 5,6 | 4,1 | 2,1 | 2,6 |

17.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5,3 | 6,3 | 4,8 | 2,8 | 3,3 |

18.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,1 | 5,1 | 3,6 | 1,6 | 2,1 |

19.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,8 | 5,8 | 4,3 | 2,3 | 2,8 |

20.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2,3 | 3,3 | 1,8 | 0,8 | 1,3 |

21.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5,2 | 6,2 | 4,7 | 2,47 | 3,2 |

22.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3,7 | 4,7 | 3,2 | 1,2 | 1,7 |

23.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2,5 | 3,5 | 2,0 | 1,0 | 1,5 |

24.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5,5 | 6,5 | 5,0 | 3,0 | 3,5 |

25.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,3 | 5,3 | 3,8 | 1,8 | 2,3 |

26.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2,7 | 3,7 | 2,2 | 1,2 | 1,7 |

27.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,67 | 5,7 | 4,2 | 2,2 | 2,7 |