Федеральное агентство морского и речного транспорта

Федеральное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра высшей математики

Ю. И. Загородников

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

для 1-го курса технических специальностей ФОО ОМИ
и руководство к её решению.
Учебное пособие

Владивосток
2011

Студент должен выполнить контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его зачётки.

В конце пособия указаны основные учебники [1-2], из которых студент должен предварительно изучить разделы необходимые для решения контрольной работы.

При решении задач кроме типовых задач, рассмотренных в пособии, можно использовать учебники [3-4], в которых приведены решения различных задач по курсу высшей математики.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задача 1. Найти неопределённые интегралы.

1. а) $\int e^{\cos^2 x}\cdot\sin 2x\,dx$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; в) $\int\frac{dx}{x^3+27}$; г) $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

д) $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

2. а) $\int\frac{x^2\,dx}{(x^3+4)^6}$; б) $\int e^x\ln(1+e^x)\,dx$; в) $\int\frac{x\,dx}{x^3+8}$; г) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$;

д) $\int\cos^2 x\cdot\sin^3 x\,dx$.

3. а) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$; б) $\int x2^x\,dx$; в) $\int\frac{(5x+6)\,dx}{x^3+x^2+x+1}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

д) $\int\sin^3 x\cdot\cos^3 x\,dx$.

4. а) $\int\frac{dx}{\sin^2 x(2\,\mathrm{ctg}\,x+1)}$; б) $\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int\frac{dx}{x^3-x^2+2x-2}$;

г) $\int\frac{x+\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$; д) $\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

5. а) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{5-\cos 2x}$; б) $\int(2x-3)e^{5x}\,dx$; в) $\int\frac{(x+1)\,dx}{x^3-2x^2+x}$; г) $\int\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$;

д) $\int\cos^5 x\,dx$.

6. а) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$; б) $\int x\cdot\arccos\frac{1}{x}dx$; в) $\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^3+3x^2-4x}$; г) $\int\frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)dx}{\left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt[4]{x^3}}$;

д) $\int\sin^7 x\,dx$.

7. а) $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int x \ln(x^2+1)\, dx$; в) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}\, dx$; г) $\int \frac{\sqrt[6]{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}\, dx$;

д) $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x\, dx$.

8. а) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\, dx$; б) $\int x \cos 2x\, dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^3-3x+2}\, dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x}$;

д) $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x\, dx$.

9. а) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{8+3\sin x}}$; б) $\int (x+4)\cdot \ln x\, dx$; в) $\int \frac{x^2+x-1}{x^4+3x^2-4}\, dx$;

г) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[6]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$; д) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\, dx$.

10. а) $\int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\, dx$; б) $\int (2x-5)\cdot \sin 3x\, dx$; в) $\int \frac{x^3+x}{x^4+5x+6}\, dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 1}$; д) $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x\, dx$.

Задача 2. Вычислить определённые интегралы.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$; 2. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$; 3. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$; 4. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

5. $\int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \cos^2 x\, dx$; 6. $\int_1^2 \sqrt{x} \ln x\, dx$; 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; 8. $\int_0^1 x \ln(1+x)\, dx$;

9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$; 10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Задача 3. Дана функция двух переменных $z = f(x; y)$. Найти все частные производные первого и второго порядков.

1. $z = \frac{y}{x^2-y^2}$; 2. $z = \ln(x^2-4y^3)$; 3. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 4. $z = e^{x^2 y} - x^2 y$;

5. $z = \cos(x^2-y^2)$; 6. $z = \arcsin\frac{y}{x^2}$; 7. $z = \ln(x^3-5y^2)$; 8. $z = \sqrt{x^3+x^2y+1}$;

9. $z = \arcsin(x^2 y)$; 10. $z = \mathrm{arctg}(x^2 y)$.

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области D. Область D изобразить на чертеже.

1. $z = x^2 - y^2 + 3xy + 7; D: -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2.$
2. $z = x^2 + 2y^2 - 1; D: x \ge -2, y \ge -2, x + y \le 4.$
3. $z = 3 - x^2 - xy - y^2; D: x \le 1, y \ge -1, x + 1 \ge y.$
4. $z = x^2 + y^2 + x - y; D: x \ge 1, y \ge -1, x + y \le 2.$
5. $z = x^2 + 2xy + 2y^2; D: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 3.$
6. $z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 1; D: x \ge -1, y \ge -1, x + y \le 1.$
7. $z = 5 + 2xy - x^2; D: -1 \le y \le 4 - x^2.$
8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + x; D: x \le 0, y \le 1, x + y + 2 \ge 0$.
9. $z = x^2 - xy - 2; D: 4x^2 - 4 \le y \le 1.$
10. $z = x^2 + xy + 3y^2; D: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1.$

Задача 5. Вычислить двойной интеграл по области D. Область интегрирования D изобразить на чертеже.

1. $\iint\limits_D (xy - y + 1)\,dx\,dy; D: y = x^2, y = 2 - x^2.$
2. $\iint\limits_D (x^2 - xy + x)\,dx\,dy; D: x = 1, y = x^2, y = 0.$
3. $\iint\limits_D (y^2 - xy - y)\,dx\,dy; D: y = x, y = x^3, x \ge 0.$
4. $\iint\limits_D (xy^2 - 2x)\,dx\,dy; D: y = x^2, y = \sqrt{x}.$
5. $\iint\limits_D (3x^2 y - y + 1)\,dx\,dy; D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$
6. $\iint\limits_D (xy - 4x + 2y - 1)\,dx\,dy; D: x = 1, y = x^2, y = 0.$
7. $\iint\limits_D (xy^3 - 1)\,dx\,dy; D: y = x^2, y = \sqrt{x}.$
8. $\iint\limits_D (8xy + 9x^2 y^2)\,dx\,dy; D: x = 1, y = 0, y = -x^3.$
9. $\iint\limits_D (9x^2 y^2 - x + y)\,dx\,dy; D: y = x, y = \sqrt{x}.$
10. $\iint\limits_D (12x^2 y^2 - 1)\,dx\,dy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл. Сделать чертёж дуги L.

1. $\int\limits_L \frac{x^2+1}{y+1}dx + \frac{x-y}{x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до точки (2; 1).

2. $\int\limits_L \frac{x^2}{y+2}dx + \frac{x+2y}{3x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 1) до точки (2; 2).

3. $\int\limits_L \frac{y^2+1}{x+1}dx + \frac{x+1-y}{2}dy$, где L – дуга кривой $y=\ln(x+1)$ от точки (0; 0) до точки (–1; 1).

4. $\int\limits_L \frac{y^2-1}{x+1}dx + \frac{1}{x}dy$, где L – дуга кривой $y=x^2$ от точки (1; 1) до точки (2; 4).

5. $\int\limits_L (y^2-x)dx + (x^2-y)dy$, где L – верхняя половина окружности $x=\sin 2t,\ y=\cos 2t.$ Интегрировать против часовой стрелки.

6. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + \frac{1}{y}dy$, где L – дуга кривой $y=x^2$ от точки (–1; 1) до точки (–2; 4).

7. $\int\limits_L y^2\,dx + x^2\,dy$, где L – верхняя четверть окружности $x=2\sin t,\ y=2\cos t.$, интегрировать против часовой стрелки.

8. $\int\limits_L \frac{x^2+1}{y+1}dx + \frac{x-y}{x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до точки (2; 1).

9. $\int\limits_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x-1}{y}dy$, где L – дуга кривой $y=x^2$ от точки (1;1) до точки (2;4).

10 $\int\limits_L (y-x)dx + (x-y)dy$, где L – верхняя половина эллипса $x=3\sin t,\ y=4\cos t.$, интегрировать против часовой стрелки.

Решение задачи 1

Приведём теоретический материал (см. [2], т. 1), необходимый для решения задачи 1.

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ первообразная $f(x)$, то множество всех первообразных от функции $f(x)$ будет $F(x)+c$, где c – произвольная постоянная.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех её первообразных: $\int f(x)dx = F(x)+c$.

Свойство неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

2. $\int d\left(f(x)\right) = \int f'(x)dx = f(x)+c. \quad \left(\int dx = x+c\right).$

3. $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx.$

4. $\int\left(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)dx.$

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+c$, то

   а) $\int f(u)du = F(u)+c$, где $u=u(x)-$ любая дифференцируемая функция;

   б) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+c$, где a и b – числа, $a\neq 0$

Приведём таблицу неопределённых интегралов

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c, (n\neq -1); \quad \left(\int\dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+c\right).$

2. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a}+c, (a>0, a\neq 1); \quad \left(\int e^u du = e^u+c\right).$

3. $\int\dfrac{du}{u} = \ln|u|+c.$

4. $\int\sin u\,du = -\cos u+c.$

5. $\int\cos u\,du = \sin u+c.$

6. $\int\operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u|+c.$

7. $\int\operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u|+c.$

9. $\int\dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u+c.$

10. $\int\dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a}+c.$

11. $\int\dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right|+c.$

12. $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a}+c.$

13. $\int\dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a}\right|+c.$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c.$

Здесь $u = u(x)-$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Перейдём к изложению методов интегрирования.

Метод приведения интеграла к табличному виду с помощью свойств интегралов

1. $\int \cos^2 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)\,dx =$

$\frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 6x\,dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$. Здесь мы воспользовались свойством 3, а затем 2 и 5б при

$a = 6$ и табличным интегралом 5.

2. $\int \frac{1+x+\sqrt[3]{x^5}}{x^2}dx = \int \left(x^{-2} + \frac{1}{x} + x^{-\frac{1}{3}}\right)dx =$ [применили свойство 4]=

$= \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{1}{3}}dx =$[к первому, третьему и ко второму интегралам применим соответственно табличные интегралы 1 и

3]$= \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x| + \frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot 2}{3} + c =$

$= -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x-4)^2}} = \int (5x-4)^{-\frac{2}{3}}dx =$[применим свойство 5б, затем интеграл 1]=

$= \frac{1}{5}\int (5x-4)^{-\frac{2}{3}}d(5x-4) = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-4)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{5}\cdot(5x-4)^{\frac{1}{3}} + c.$

4. $\int \frac{3x-5}{3x^2-3x+4}dx = \left[\begin{array}{l}\text{т. к. } (3x^2-3x+4)' = 6x-3, \text{ то представим}\\ 3x-5 = \frac{1}{2}(6x-3) + \frac{3}{2} - 5 = \frac{1}{2}(6x-3) - \frac{7}{2}\end{array}\right] =$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(6x-3)-\frac{7}{2}}{3x^2-3x+4}dx=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{6x-3}{3x^2-3x+4}-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3x^2-3x+4}\right)dx=$$

$$=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{(3x^2-3x+4)'}{3x^2-3x+4}dx-\int\frac{7}{2}\cdot\frac{dx}{3(x^2-x+\frac{4}{3})}=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{применим свойство 3 и}\\ \text{выделим полный квадрат в}\\ \text{знаменателе 2-го интеграла}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(3x^2-3x+4)}{3x^2-3x+4}-\frac{7}{2\cdot 3}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}}=$$ [1-й интеграл табличного вида в силу свойства 5а] =

$$\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-3x+4\right|-\frac{7}{6}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{12}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-3x+4\right|-\frac{7}{6}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{13}{12}}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-3x+4\right|-$$

$$-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{12}}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{13}{12}}}+c=\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-3x+4\right|-\frac{7}{6}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}\,(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{13}}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-3x+4\right|-\frac{7}{3\cdot\sqrt{13}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,(2x-1)}{\sqrt{13}}+c=\frac{1}{2}\ln\left|3x^2-3x+4\right|-$$

$$-\frac{7}{\cdot\sqrt{39}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,(2x-1)}{\sqrt{13}}+c.$$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}=$ [приводим интеграл к виду12]= $\int\frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}=$

$$=\int \frac{dx}{2\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}} = \text{[применим свойство 3, затем интеграл 12]} =$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}} + c.$$

Метод замены

Рассмотрим $I = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx.$ Обозначим $u = \varphi(x)$, тогда $du = \varphi'(x)\,dx$. Подставив в подынтегральное выражение, получим $I = \int f(u)\,du = F(u) + c = F(\varphi(x)) + c$, где $F(u)$ – первообразная для $f(u)$.

1. $$\int \frac{5-\ln^3 x}{x}dx = \left[\begin{array}{l}\text{т. к. } (\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \text{ сделаем замену} \\ u = \ln x, \text{ тогда } du = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}\end{array}\right] = \int (5-u^3)\,du =$$

= [применим свойство 4, затем 3 и 2 к первому интегралу и табличный интеграл 1 ко второму интегралу] $= \int 5du - \int u^3du = 5\int du - \int u^3du =$

$$5u - \frac{u^4}{4} + c =$$

= [возвращаемся к старой переменной] $= 5\ln x - \dfrac{\ln^4 x}{4} + c$.

2.

$$\int \frac{3x - 8\operatorname{arctg}^4 3x}{1+9x^2}dx = \left[\begin{array}{l}\text{разобьём интеграл на} \\ \text{разность 2-х более простых,} \\ \text{используя свойство 4}\end{array}\right] = \int\left(\frac{3x}{1+9x^2} - \frac{8\operatorname{arctg}^4 3x}{1+9x^2}\right)dx$$

$$=\int \frac{3x}{1+9x^2}dx - \int \frac{8\operatorname{arctg}^4 3x}{1+9x^2}dx = \left[\begin{array}{l}\text{т. к. } (1+9x^2)' = 18x, \text{ то сделаем замену} \\ u = 1+9x^2, du = 18x\,dx, \text{ т.е. } 3x\,dx = \dfrac{du}{6}; \\ (\operatorname{arctg} 3x)' = \dfrac{3}{1+9x^2}, \text{ то сделаем замену} \\ t = \operatorname{arctg} 3x, dt = \dfrac{3dx}{1+9x^2}, \text{ т. е. } \dfrac{dx}{1+9x^2} = \dfrac{dt}{3}\end{array}\right]$$

$=$

$$=\int\frac{\frac{du}{6}}{u}-\int 8t^4\cdot\frac{dt}{3}=\left[\begin{array}{l}\text{применим свойство 3,}\\ \text{затем интегралы 3 и 1}\\ \text{соответственно}\end{array}\right]=\frac{1}{6}\int\frac{du}{u}-\frac{8}{3}\int t^4dt=\frac{1}{6}\ln|u|-$$

$$-\frac{8}{3}\cdot\frac{t^5}{5}+c=\left[\begin{array}{l}\text{возвращаемся к}\\ \text{старой переменной}\end{array}\right]=\frac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right|-\frac{8}{15}\operatorname{arctg}^5 3x+c\,.$$

Метод интегрирования по частям

Метод основан на использовании формулы $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ и применяется в случае следующих подынтегральных функций:

а) $P_n(x)\cdot a^x,\ P_n(x)\cdot e^x,\ P_n(x)\cdot\sin\alpha x,\ P_n(x)\cdot\cos\alpha x;$

б) $P_n(x)\cdot\ln^k x,\ x^\alpha\cdot\ln^k x\ (\alpha\neq-1,\ \alpha\in R),\ P_n(x)\cdot\operatorname{arctg}\alpha x,\ x^k\cdot\arcsin\alpha x,\ x^k\cdot\arccos\alpha x$

b) $x\cdot f'(x),$ где первообразная для $f(x)$ легко находится.

Здесь $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен степени $n\,(a_0\neq 0)$.

В случае а) за функцию *u* берётся $P_n(x)$ и за $-dv$ – соответственно $a^x dx, e^{\alpha x}dx$,

$\sin\alpha x\,dx,\ \cos\alpha x\,dx;$ в случае б) за функцию *u* берутся соответственно: $\ln^k x,$ $\operatorname{arctg}\alpha x,\ \arcsin\alpha x,\ \arccos\alpha x$ и за dv – соответственно: $P_n(x)\,dx,\ x^\alpha dx$; в случае *b*) за функцию *u* берётся *x* и за $dv-\ f'(x)\,dx.$

Рассмотрим примеры.

1. $$\int(4x+7)\cdot 3^x dx=\left[\begin{array}{l}u=4x+7,\ du=(4x+7)'dx=4dx\\ dv=3^x dx,\ v=\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}-\\ \text{(табличный интеграл 2)}\end{array}\right]=(4x+7)\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-$$

$$-\int\frac{3^x}{\ln 3}\cdot 4dx=\left[\begin{array}{l}\text{применим свойство 3, затем}\\ \text{табличный интеграл 2}\end{array}\right]=(4x+7)\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{4}{\ln 3}\int 3^x dx=$$

$$=(4x+7)\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{4}{\ln 3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+c=(4x+7)\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{4\cdot 3^x}{\ln^2 3}+c.$$

2.

$$\int (x-5)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x,\, du=\dfrac{1}{x}dx,\, dv=(x-5)\,dx, \\ v=\int (x-5)\,dx=\int xdx-5\int dx= \\ =\dfrac{x^2}{2}-5x=x\cdot\left(\dfrac{x}{2}-5\right) \end{array} \right| = \ln x\cdot\left(\frac{x^2}{2}-5x\right)-$$

$$-\int x\cdot\left(\frac{x}{2}-5\right)\cdot\frac{dx}{x}=\ln x\cdot\frac{x^2-10x}{2}-\int\left(\frac{x}{2}-5\right)dx= \ln x\cdot\frac{x^2-10x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx+$$

$$+5\int dx=\ln x\cdot\frac{x^2-10x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+5x+c=\ln x\cdot\frac{x^2-10x}{2}-\frac{x^2}{4}+5x+c\,.$$

[после применения формулы интегрирования по частям мы применили к полученному интегралу 1-й метод].

3.

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\mathrm{arctg}2x,\, du=\dfrac{2}{1+4x^2}dx \\ dv=xdx,\, v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \\ \text{(применили формулу 1)} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,2x-\int\cdot\frac{x^2}{1+4x^2}dx\ =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{1+4x^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(4x^2+1)-1}{1+4x^2}=\dfrac{1}{4}- \\ \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+4x^2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{1}{{}^1\!/_4-x^2},\ \text{то применив} \\ \text{свойство 4, затем3, получим} \end{array} \right| = \int\frac{1}{4}dx+\int\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{{}^1\!/_4+x^2}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{({}^1\!/_2)^2+x^2}=$$ [применим к 1-му интегралу

свойство 2, а ко 2-му формулу 10]= $\dfrac{x^2}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,2x-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{1}{{}^1\!/_2}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{{}^1\!/_2}+c=$

$=\dfrac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg}2x-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+c.$

4.

$\int\dfrac{x\sin x}{\cos^3 x}dx=$[т. к. $\left(\cos^{-2}x\right)'=-2\cos^{-3}x\cdot(-\sin x)=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, то

$\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)'$ применим метод интегрирования по частям, где

$$\left[\begin{array}{l} u=x,\, du=dx,\, dv=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}, \\ v=\displaystyle\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \\ \qquad\text{(по свойству 2)} \end{array}\right]=x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=[\text{применим}$$

свойство 3, а затем формулу 8]= $\dfrac{x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x+c.$

Интегрирование рациональных функций

Функция называется рациональной, если она представлена отношением двух многочленов: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Если степень числителя больше либо равна степени знаменателя, то надо делением выделить целую часть $N(x)$ и остаток $P_1(x)$, степень которого меньше степени знаменателя. Тогда исходная функция будет представлена в виде

$$f(x)=N(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

Интеграл от первого слагаемого сводится к сумме табличных, а для интегрирования второго слагаемого применяется метод его разложения на сумму простейших дробей. Он основан на том, что всякий многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде

$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=$

$=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$, где $\alpha_1\cdots\alpha_\beta$ – действительные корни многочлена $Q(x)$ кратностей $k_1,\cdots,k_\beta$ соответственно, а

$p_1{}^2-4q_1<0\,(i=1,\cdots,s);k_1+\cdots+k_\beta+2l_1+\cdots+2l_s=n$. Тогда всякая рациональная дробь вида $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей, причём множителю вида $(x-a_r)^{k_r}$ соответствует сумма k_r дробей вида

$\frac{A_1}{x-\alpha_r}+\frac{A_2}{(x-\alpha_r)^2}+\cdots+\frac{A_{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}$, а множителю $(x^2+p_r x+q_r)^{s_r}$ соответствует s_r дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^2}+\cdots+\frac{M_{s_r}x+N_{s_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов надо в полученном разложении исходной дроби $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ на сумму простейших дробей привести правую часть к общему знаменателю. Тогда в силу тождественного равенства числитель $P^*(x)$ полученной дроби будет равен $P_1(x)$, т. е. $P^*(x)\equiv P_1(x)$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x или придавая x разные n значений, получим систему n уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения (можно эти два подхода комбинировать).

Примеры.

1. $\int\frac{x}{x^3+x^2-x-1}dx=I$

Разложим знаменатель на простые множители методом группировки:

$x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)\cdot(x^2-1)=(x+1)(x-1)(x+1)=$

$=(x-1)(x+1)^2$. Тогда $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=$

$=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$. Отсюда, приравнивая числители,

получим $x=A(x+1)^2+B(x^2-1)+C(x-1)$

$$\begin{array}{l|l|l|l|}
x^2 & 0=A+B & & B=-A=-1/4 \\
x=1 & 1=4A & A=1/4 & \\
x=-1 & -1=-2c & C=1/2 &
\end{array}\quad \text{И так имеем}$$

$$I=\int\frac{1/4}{x-1}dx+\int\frac{-1/4}{x+1}dx+\int\frac{1/2}{(x+1)^2}dx=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{применив св-во 3, получим в силу}\\ \text{св-ва 5, что первые два интеграла}\\ \text{имеют табличный вид 2, а третий}\\ -\text{вид 1 при } n=-2\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}+c.$$

2.

$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$=I. Так как дробь неправильная, то выделим целую часть методом деления.

$$\begin{array}{l|l} -\,x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \quad\underline{x^5-4x^3} & \overline{x^2+x+4} \\ \qquad -\,x^4+4x^3-8 & \\ \qquad\quad \underline{x^4-4x^2} & \\ \qquad\qquad -\,4x^3+4x^2-8 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{4x^3-16x} & \\ \qquad\qquad\qquad 4x^2+16x-8 & \end{array}$$

И так $I=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx$.

Разложим полученную правильную дробь на сумму простейших. Так как $x^3-4x=x(x-2)(x+2)$, то $\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$

$=\frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$. Приравнивая числители, получим

$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+Bx(x-2)+Cx(x+2)$. Тогда, давая x последовательно значения 0, 2, -2, имеем

$$\begin{array}{l|l|l|} x=0 & -8=-4A & A=2 \\ x=2 & 40=8B & B=5 \\ x=-2 & -24=8C & C=-3 \end{array}$$

Окончательно получили, что $\int\frac{x^5+4x-8}{x^3-4x}dx=$

$=\int x^2dx+\int xdx+4\int dx+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$

$2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+c.$

Здесь мы применили табличные интегралы1, 2 и свойство 2 к третьему интегралу.

Интегрирование иррациональных функций вида $R(x,\sqrt[k_1]{ax+b},\cdots,\sqrt[k_n]{ax+b})$

Здесь R – рациональная функция. С помощью замены $t=\sqrt[m]{ax+b}$, где m – наименьшее общее кратное (НОК) чисел $k_1,k_2,\cdots,k_n$, интеграл от данной функции сводится к интегрированию рациональной функции.

1.

$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}=I$. Так как НОК (2; 4) = 4, то делаем замену, $t=\sqrt[4]{x}$, тогда

$x = t^4$, $dx = 4t^3dt$. поэтому имеем $I = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^3+4} = \int \frac{4t^2(t^3+4) - 16t^2}{t^3+4} dt =$

$= 4\int t^2 dt - 16\int \frac{t^2}{t^3+4} dt = \left[d(t^3+4) = 3t^2 dt \right] = 4\int t^2 dt - \frac{16}{3}\int \frac{d(t^3+4)}{t^3+4} dt = .$

[табличные интегралы 1, 2] = $4\frac{t^3}{3} - \frac{16}{3}\ln\left|t^3+4\right| + c$. Производя обратную замену, получим $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+4} dx = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + c.$

2.

$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} = I.$ Так как НОК (6; 2; 3) = 6, то делаем замену:

$t = \sqrt[6]{x+1}$, тогда $x = t^6 - 1$, $\sqrt[3]{x+1} = t^2$, $\sqrt{x+1} = t^3$, $dx = 6t^5 dt.$

Поэтому получим $I = \int \frac{t \cdot 6t^5 dt}{t^3 + t^2} = \int \frac{6t^4}{t+1} dt$, т. е. интеграл от неправильной рациональной функции. Выделим целую часть.

$$\begin{array}{l|l}
-\,6t^4 & t+1 \\ \cline{2-2}
\underline{6t^4+6t^3} & 6t^3-6t^2+6t-6 \\
\quad -\,-6t^3 & \\
\quad\ \underline{-6t^3-6t^2} & \\
\qquad -\,6t^2 & \\
\qquad\ \underline{6t^2+6t} & \\
\qquad\quad -\,-6t & \\
\qquad\quad\ \underline{-6t-6} & \\
\qquad\qquad 6 &
\end{array}$$

И так имеем, $I = 6\int t^3 dt - 6\int t^2 dt + 6\int t dt - 6\int dt + 6\int \frac{dt}{t+1} =$

$= 6\frac{t^4}{4} - 6\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} - 6t + 6\ln\left|t+1\right| + c =$ [производим обратную замену]=

$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+1)^4} - 2\sqrt[6]{(x+1)^3} + 3\sqrt[6]{(x+1)^2} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right| + c.$

Интегрирование тригонометрических функций

Для вычисления $\int R(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}x)\,dx$ применяется универсальная подстановка: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

В результате исходный интеграл сводится к интегрированию рациональной функции.

Пример $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int \frac{2dt}{\left(8-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{7(1-t^2)}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=$

$=\int \frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=\int \frac{2dt}{15-8t+t^2}=\int \frac{2dt}{(t-4)^2-1}=-2\int \frac{dt}{1-(t-4)^2}=$

$=$[табличный интеграл вида 11] $=-\frac{2}{2}\ln\left|\frac{1+t-4}{1-t+4}\right|+c=\ln\left|\frac{5-t}{t-3}\right|+c=$

$=\ln\left|\frac{5-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+c.$

Для вычисления $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg}x)\, dx$ применяется подстановка:

$\operatorname{tg}x=t, \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, dx=\frac{dt}{1+t^2}.$

Пример

$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+4}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int \frac{(t^2+4)\cdot(1+t^2)^2}{t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{(t^2+4)\cdot(t^2+1)}{t^2}dt=$

$=\int \frac{t^4+5t^2+4}{t^2}dt=\int t^2dt+5\int dt+4\int t^{-2}dt=\frac{t^3}{3}+5t+4\frac{t^{-1}}{-1}+c=$

$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+5\operatorname{tg}x-\frac{4}{\operatorname{tg}x}+c.$

Для вычисления $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{ctg}x)\, dx$ применяется подстановка:

$\operatorname{ctg}x=t, \sin^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \cos^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, dx=-\frac{dt}{1+t^2}$

Пример

$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx=\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^4 x}dx=-\int t^2\cdot(1+t^2)^2\cdot\frac{dt}{1+t^2}=-\int t^2(1+t^2)\,dt=$

$=-\int t^2dt-\int t^4dt=-\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+c.$

Для вычисления $\int f(\sin x, \cos^2 x)\cdot\cos x\,dx;$ $\int f(\cos x, \sin^2 x)\cdot\sin x\,dx;$ применяется соответственно подстановки: $t=\sin x, t=\cos x.$

Пример

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx = \int \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx = \begin{bmatrix} t=\sin x, \\ dn=\cos x dx \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{\sqrt{4+t^2}} = \int \frac{d(4+t^2)}{\sqrt{4+t^2}}$$
=

=[частный случай табличного интеграла 1= $2\sqrt{4+t^2}+c = 2\sqrt{4+\sin^2 x}+c.$]

Вычисление интегралов от произведения тригонометрических функций синусов и косинусов разных углов с помощью формул преобразования произведения в сумму функций сводится к вычислению алгебраической суммы интегралов табличного вида 4, 5.

Пример

$$\int \sin 7x\cdot\cos^2 x\,dx = \int \sin 7x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin 7x\cdot\cos 2x\,dx$$
=

$$=\frac{1}{2}\int \sin 7x\,dx + \frac{1}{4}\int (\sin 9x + \sin 5x)\,dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{36}\cos 9x - \frac{1}{20}\cos 5x + c.$$

Здесь мы использовали свойство 5б.

Решение задачи 2

Приведём теоретический материал (см. [2], т.1), необходимый для решения задачи 2.

Определённым интегралом от функции на отрезке $[a;b]$ называется число обозначаемое $\int\limits_a^b f(x)dx$, равное $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta_{n\to 0})}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, где

$a \le x_0 \le t_1 < x_1 \le t_2 < x_2 \le \cdots \le t_n < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1 \div n)$ – произвольное деление отрезка $[a;b]$ n частей, а $\Delta_n = \max \Delta x_i$, $i = 1 \div n$.

Свойства определённого интеграла:

1) $\int\limits_a^b \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)\right)dx = c_1\int\limits_a^b f_1(x)dx + \cdots + c_n\int\limits_a^b f_n(x)dx$;4

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $f(x)$ – интегрируемая на всех отрезках;

4) Если $f(x)\geq 0$ при $x\in[a;b]$ и $a<b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$;

5) Если $f(x)$ – непрерывна при $x\in[a;b]$ и $\phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, то $\phi'(x)=f(x)$

при
$x\in[a;b]$;
6) Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула

Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$

Метод замены в определённом интеграле
Пусть $z=\varphi(x)$ непрерывна вместе с производной на отрезке $[a;b]$ и монотонна на этом отрезке и пусть $y=f(z)$ непрерывна на области значений функции $z=\varphi(x)$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)dz.$$

Пусть $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной и монотонна на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b.$
Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a;b]$,

Тогда $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$. Замечание: данные методы применяются в тех

же случаях, что и в неопределённом интеграле. Перейдём к решению типовых примеров.

Задача 2.

а) Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4}(\pi-4x)\sin 2x\,dx=I.$ Так как подынтегральная функция

содержит произведение линейной функции на тригонометрическую, то применим метод интегрирования по частям:

$$\left[\begin{array}{l} u=\pi-4x,\ du=(\pi-4x)'dx=-4dx \\ dv=\sin 2xdx,\ v=\int \sin 2xdx= \\ =\frac{1}{2}\int \sin 2xd(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right]$$ здесь мы применили табличный интеграл 4. Итак,

мы имеем, что $I=-(\pi-4x)\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4}-\int\limits_0^{\pi/4}(-\frac{1}{2})\cos 2x\cdot(-4)dx=$

$$-(\pi-\pi)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\pi\cdot\frac{1}{2}\cos 0-\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2x\cdot 2dx=\frac{\pi}{2}-\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0=$$

$$=\frac{\pi}{2}-1.$$

б) Вычислить $\int\limits_1^e(2x-1)\ln xdx=I.$ Так как подынтегральная функция содержит произведение линейной функции на логарифмическую, то применим метод интегрирования по частям:

$$\left[\begin{array}{l} u=\ln x,\ dv=(2x-1)dx, \\ du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx, \\ v=\int(2x-1)dx=2\int xdx-\int dx= \\ 2\cdot\frac{x^2}{2}-x=x(x-1) \end{array}\right]$$ здесь мы воспользовались сначала свойствами неопределённого интеграла

а затем табличными интегралами2 и 1. Итак, мы имеем, что

$$I=\ln x\cdot x(x-1)\Big|_1^e-\int\limits_1^e x(x-1)\cdot\frac{1}{x}dx=\ln e\cdot e(e-1)-\ln 1\cdot 1\cdot(1-1)-\int\limits_1^e(x-1)dx=$$

$$=e^2-e-\int\limits_1^e xdx+\int\limits_1^e dx=e^2-e-\frac{x^2}{2}\Big|_1^e+x\Big|_1^e=e^2-e-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}+e-1=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}.$$

в) Вычислить $\int\limits_0^3 \frac{\ln^3(x+2)}{x+2}dx = I.$ так как $\frac{1}{x+2} = \left(\ln(x+2)\right)'$, а функция $\ln x$ монотонно возрастает, то сделаем замену

$t = \ln(x+2), dt = \left(\ln(t+2)\right)' dx = \frac{1}{x+2}dx.$ Тогда получим

$$I = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{\ln^4 5}{4} - \frac{\ln^4 2}{4}.$$

г) Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x} = I.$ Для функций данного вида применяется универсальная тригонометрическая замена

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$ Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Поэтому мы получаем

$$I = \int\limits_{\operatorname{tg}0}^{\operatorname{tg}\pi/4} \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int\limits_0^1 \frac{1}{\frac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int\limits_0^1 \frac{2dt}{4+2t^2} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{2})^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left.\frac{t}{\sqrt{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Решение задачи 3.

Приведём теоретический материал, необходимый для решения задачи 3. Функцией двух переменных $(x; y)$ называется правило f, по которому каждой паре чисел $(x; y)$, принадлежащей некоторому множеству D на плоскости, ставится в соответствие единственное число z и записывается в вид $z = f(x; y)$. Множество D называется областью определения функции, а совокупность всех её значений – областью значений, переменные $(x; y)$ называются аргументами функции. Множество точек $\left(x; y; f(x; y)\right)$ называются графиком функции двух переменных и является поверхностью в трёхмерном пространстве, проекция которой на плоскость (xoy) совпадает с множеством D.

Число А называется пределом функции $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ и обозначается $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x; y) = A.$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $M(x; y)$ таких, что $0 < \rho\,(MM) < \delta,$ выполняется неравенство $\left|f(x; y) - A\right| < \varepsilon.$ Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если:

1. Функция $f(x; y)$ определена в точке $M_0(x_0; y_0)$ и вблизи этой точки;

2. Существует $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$;

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ по переменной x называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ и обозначается $\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ или $z'_x(x, y)$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ по переменной у называется $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ и обозначается $\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ или $z'_y(x, y)$.

Функция $f(x; y)$ имеющая конечные частные производные в точке $(x; y)$ (в каждой точке некоторой области D) называется дифференцируемой в этой точке (в области D).

Замечание. При нахождении частной производной по одной из переменных другая переменная является постоянная, т. е. производная от неё по другой переменной равна нулю. $\left(x'_y = 0,\ y'_x = 0\right)$. Поэтому для нахождения частных производных можно использовать свойства и таблицу обыкновенных производных.

Частные производные от частных производных первого порядка – называются частными производными второго порядка и обозначается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

.

Замечание. Если частные производные u''_{xy} и u''_{yx} непрерывны, то они равны.

Рассмотрим пример к задаче 3. Пусть $z = x \cdot e^{x^2+3y^2}$. Найдём частные производные 1-го порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x)'_x \cdot e^{x^2+3y^2} + x \cdot \left(e^{x^2+3y^2}\right)'_x = e^{x^2+3y^2} +$

$$+ x \cdot e^{x^2+3y^2} \cdot (x^2 + 3y^2)'_x = e^{x^2+3y^2} + x \cdot e^{x^2+3y^2} \cdot (2x + 0) = e^{x^2+3y^2} \cdot (1 + 2x^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(e^{x^2+3y^2}\right)'_y = xe^{x^2+3y^2} \cdot (x^2 + 3y^2)'_y = x \cdot e^{x^2+3y^2} \cdot (0 + 3 \cdot 2y) = 6xy \cdot e^{x^2+3y^2}.$$

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^{x^2+3y^2} \cdot (1 + 2x^2)\right)' = \left(e^{x^2+3y^2}\right)'_x \cdot (1 + 2x^2) + e^{x^2+3y^2} \cdot (1 + 2x^2)'_x =$$

$$= e^{x^2+3y^2} \cdot (x^2 + 3y^2)'_x \cdot (1 + 2x^2) + e^{x^2+3y^2} \cdot (0 + 2 \cdot 2x) =$$

$$= e^{x^2+3y^2} \cdot (2x + 0) \cdot (1 + 2x^2) + e^{x^2+3y^2} \cdot 4x = e^{x^2+3y^2} \cdot (2x + 4x^3 + 4x) =$$

$$= e^{x^2+3y^2} \cdot (6x + 4x^3);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(e^{x^2+3y^2}\cdot(1+2x^2)\right)'_y=(1+2x^2)\cdot\left(e^{x^2+3y^2}\right)'_y=$$
$$=(1+2x^2)\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(x^2+3y^2)'_y=(1+2x^2)\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(0+3\cdot 2y)=$$
$$=6y\cdot(1+2x^2)\cdot e^{x^2+3y^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(6xy\cdot e^{x^2+3y^2}\right)'_x=(6xy)'_x\cdot e^{x^2+3y^2}+6xy\cdot\left(e^{x^2+3y^2}\right)'_x=6y\cdot x'_x\cdot e^{x^2+3y^2}+$$
$$+6xy\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(x^2+3y^2)'_x=6y\cdot e^{x^2+3y^2}+6xy\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(2x+0)=$$
$$=6y\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(1+2x^2);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(6xy\cdot e^{x^2+3y^2}\right)'_y=(6xy)'_y\cdot e^{x^2+3y^2}+6xy\cdot\left(e^{x^2+3y^2}\right)'_y=6xy'_y\cdot e^{x^2+3y^2}+$$
$$+6xy\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(x^2+3y^2)'_y=6x\cdot e^{x^2+3y^2}+6xy\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(0+3\cdot 2y)=$$
$$=6x\cdot e^{x^2+3y^2}\cdot(1+6y^2).$$

Решение задачи 4

Множество D на плоскости *xoy* называется окрестностью точки $M_0(x_0;\, y_0)$, если существует круг с центром в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ целиком содержащийся в множестве D. Точка $M_0(x_0;\, y_0)$ называется граничной точкой множества D, если любая её окрестность содержит точки принадлежащие и не принадлежащие множеству D за исключением самой точки $M_0(x_0;\, y_0)$.

Область D называется замкнутой, если она содержит все свои граничные точки.

Значение функции $z=f(x;\, y)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с её значениями во всех точках из некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\, y_0)$.

Функция двух переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) во внутренней точке из множества её определения, в которой частные производные первого порядка равны нулю (стационарные критические точки) или не существуют (не стационарные критические точки).

Значение функции $z=f(x;\, y)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ называется наибольшим (наименьшим) в области D, если для любой точки $M(x;\, y)\in D$ $(M\neq M_0)$ справедливо неравенство $f(x;\, y)\leq f(x_0;\, y_0)$ $\left(f(x;\, y)\geq f(x_0;\, y_0)\right)$.

Справедливо утверждение: Если функция $f(x;\, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она имеет в этой области наибольшее $\left(f_{\text{наиб.}}\right)$ и наименьшее $(f_{\text{наим.}})$ значения. Эти значения достигаются во внутренних точках экстремума или в точках, лежащих на границах области D.

Отсюда вытекает правило решения **задачи 4:**

а) находим критические точки, лежащие внутри области D и вычисляем значения функции в них;

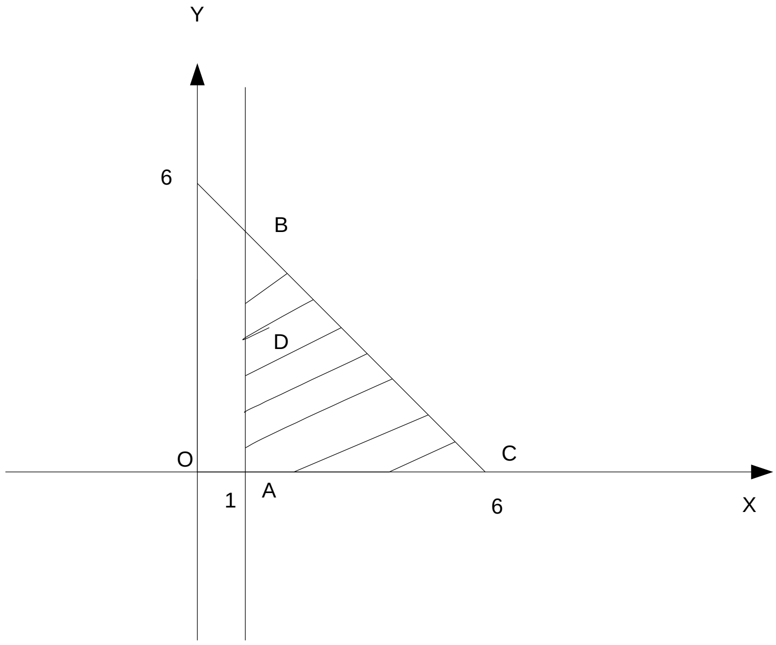
б) находим значения функции в критических точках, лежащих на границе области D и в “угловых” точках границы;

в) сравнивая полученные значения в пунктах а) и б) находим наибольшее и наименьшее значения функции.

Рассмотрим решение типовой задачи.

Пусть $z = 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 8x; \quad D: x \geq 1, y \geq 0, x + y \leq 6.$

Изобразим область D. Она ограничена тремя прямыми: $x = 1, y = 0, x + y = 6.$



Найдём “угловые” точки A, B, C области D. Из построения следует точка $A(1; 0)$. Точка C является точкой пересечения прямой $x + y = 6$ и оси *ox* (*y=0)*, т. е. является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 0 \end{cases}$; подставим $y = 0$ в первое уравнение, получим $x = 6$. Итак $C(6; 0)$. Точка B является точкой пересечения прямых $x + y = 6$ и $x = 1,$ т. е. является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 1 \end{cases}$; подставим $x = 1$ в первое уравнение, получим $1 + y = 6$, т. е. $y = 5$.

Итак $B(1; 5)$. Исследуем функцию z внутри области D. Найдём частные производные первого порядка.

$z'_x = (4xy)'_x - (3x^2)'_x - (4y^2)'_x + (8x)'_x = 4yx'_x - 3\cdot(x^2)'_x + 8x'_x = 4y - 6x + 8;$

$z'_y = (4xy)'_y - (3x^2)'_y - (4y^2)'_y + (8x)'_y = 4y'_y x - 4\cdot(y^2)'_y = 4x - 8y.$

Составим систему уравнений для нахождения критических точек:

$\begin{cases} 4y-6x+8=0; \\ 4x-8y=0. \end{cases}$ Из второго уравнения находим $x=2y$ и подставим его

в первое уравнение, получим: $4y-12y+8=0$, т. е. $8y=8$ или $y=1$. Тогда $x=2$. Итак, критическая точка – $M_0(2;1)\in D$, поэтому находим

$z_1=z(2;1)=4\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2^2-4\cdot 1^2+8\cdot 2=8-12+4+16=16$.

Исследуем функцию на участке границы: $AC: \quad y=0,\ x\in[1;6]$. Подставим $y=0$ в функцию z, получим функцию – $f(x)=-3x^2+8x,\ x\in[1;6]$. Найдём критические точки функции $f(x)$:

$f'(x)=(-3x^2)'+(8x)'=-3\cdot 2x+8=8-6x;$

$8-6x=0;\ 6x=8;\ x=\dfrac{4}{3}\in(1;6).$

Находим значение $z_2=f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+8\cdot\dfrac{4}{3}=-\dfrac{16}{3}+\dfrac{32}{3}=\dfrac{16}{3}.$

Исследуем функцию на участке границы: $AB: \quad x=1,\ y\in[0;5]$. Подставим $x=1$ в функцию z, получим функцию – $\varphi(y)=4y-3-4y^2+8$, т. е. $\varphi(y)=4y-4y^2+5,\ y\in[0;5]$. Найдём критические точки функции $\varphi(y)$:

$\varphi'(y)=(4y)'-\left(4y^2\right)'+5'=4-8y;\ 4-8y=0;\ 8y=4;\ y=\dfrac{1}{2}\in(0;5).$

Находим значение $z_3=\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\cdot\dfrac{1}{2}-4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+5=2-1+5=6.$

Исследуем функцию на последнем участке границы
$BC: \quad y=6-x,\ x\in[1;6]$.

Подставим $y=6-x$, в функцию z, получим функцию

$\psi(x)=4x\cdot(6-x)-3x^2-4\cdot(6-x)^2+8x=24x-4x^2-3x^2-$

$4(36-12x+x^2)+$

$+8x=32x-7x^2-144+48x-4x^2=80x-11x^2-144$ т, е.

$\psi(x)=80x-11x^2-144,\ x\in[1;6]$. Найдём критические точки функции $\psi(x)$:

$\psi'(x)=(80x)'-(11x^2)'-144'=80-22x;\ 80-22x=0;\ 22x=80;$

$x=\dfrac{40}{11}\in(1;6).$

Находим значение $z_4=\psi\left(\dfrac{40}{11}\right)=80\cdot\dfrac{40}{11}-11\cdot\left(\dfrac{40}{11}\right)^2-144=\dfrac{320}{11}-\dfrac{1600}{11}-144=$

$\dfrac{320-1600-1584}{11}=-\dfrac{2844}{11}.$

Находим значения z в “угловых” точках:

$z_5 = z(1;0) = 0-3+0+8=5;\; z_6 = z(1;5) = 4\cdot 1\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 25 + 8\cdot 1 =$
$= 20-3-100+8=-75;\, z_7 = z(6;0) = 0-3\cdot 36-0+8\cdot 6 = -108+48=-60.$
Сравнивая значения, $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$, находим: $z_{\text{наиб.}} = 16$,
$z_{\text{наим.}} = -\dfrac{2844}{11}.$

Решение задачи 5

Рассмотрим теоретический материал, необходимый для решения задачи 5 (см[2], т. 2) Пусть функция $z = f(x;y)$ непрерывна в некоторой замкнутой области D. Разобьём область D на n частей произвольным образом с площадями
$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$, выберем произвольным образом по фиксированной точке $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), \ldots, M_n(x_n;y_n)$ из каждой части и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot \Delta s_i = f(x_1;y_1) + f(x_2;y_2) + \cdots + f(x_n;y_n)$. Она называется интегральной суммой функции $z = f(x;y)$ по области D.

Наибольшее расстояние между двумя точками области называется диаметром области. Обозначим через d_n наибольший из диаметров полученного разбиения области D. Делим область D на всё более мелкие части, так чтобы $d_n \to 0$, и для каждого разбиения строим интегральную сумму.

Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по области D называется предел последовательности интегральных сумм при $d_n \to 0$ и обозначается символом $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$. Если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения области на n частей и способа выбора точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ принадлежащих частям деления, то функция $f(x;y)$ называется интегрируемой.

Пусть область D “правильная” в одном из координатных направлений, т. е. прямые, параллельные этому направлению пересекают границу области D не более чем в двух точках, например, в направлении оси oy. Поэтому граница области D разобьётся на две части: нижнюю γ_1 и верхнюю γ_2, которые можно задать уравнениями соответственно $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, заданными на отрезке $[a;b]$, равному проекции области D на ось ox.

Тогда $\iint\limits_d f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx$, т. е. сводится к повторному вычислению двух определённых интегралов.

Справедливы свойства

1) $\iint\limits_D (c_1 f_1(x, y) \pm c_2 f_2(x, y))\,dxdy = c_1 \iint\limits_D f_1(x, y)\,dxdy + c_2 \iint\limits_D f_2(x, y)\,dxdy;$

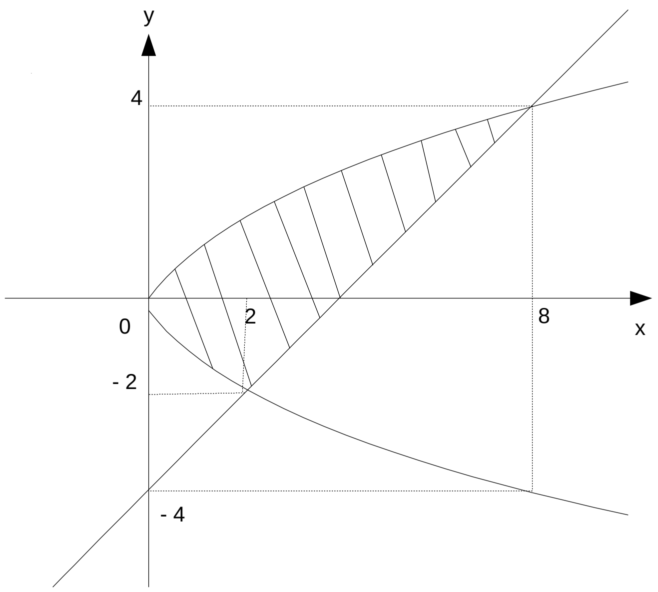
2) $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dxdy$, где D_1 и D_2 не имеют общих точек кроме, быть может, граничных.

Рассмотрим пример. Найти $\iint\limits_D (xy - 2x^2)\,dxdy$, где область D ограничена кривыми: $y = x - 4$, $y^2 = 2x$. Изобразим область D: $y = x - 4$ – прямая, проходящая через точки: $M_1(0; -4)$ и $M_2(4; 0)$; $y^2 = 2x$ – парабола, вершина которой находится в точке $O(0; 0)$, а ветви расположены вдоль положительного направления оси ox.

Найдём точки их пересечения: $\begin{cases} y = x - 4, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$ Умножим первое уравнение на (-2) и прибавим к второму. В результате получим уравнение: $y^2 - 2y = 8$, т. е.

$y^2 - 2y - 8 = 0; D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36;$ $y_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2;$

$y_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4.$ Тогда $x_1 = 2, x_2 = 8.$



Так как прямые параллельные оси ox входят в область D через параболу $x=\dfrac{y^2}{2}$, а выходят из области D через прямую $x=y+4$ и проекция области D на ось oy есть отрезок [–2; 4], то $\iint\limits_D (xy-2x^2)\,dxdy=\iint\limits_D xy\,dxdy-$

$$-2\iint\limits_D x^2\,dxdy=\int\limits_{-2}^{4}\left(\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xy\,dx\right)dy-2\int\limits_{-2}^{4}\left(\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} x^2\,dx\right)dy=$$ [т. к. внутренний интеграл

берётся по переменной x, то y считается постоянной] = $\displaystyle\int\limits_{-2}^{4}\left(y\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}\right)dy-$

$$-2\int\limits_{-2}^{4}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}\right)dy=\int\limits_{-2}^{4}\left(y\cdot\frac{(y+4)^2}{2}-y\cdot\frac{y^4}{8}\right)dy-\frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{4}\left((y+4)^3-\frac{y^6}{8}\right)dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{4}\left(\frac{y\cdot(y^2+8y+16)}{2}-\frac{y^5}{8}\right)dy-\frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{4}(y+4)^3dy+\frac{2}{24}\int\limits_{-2}^{4}y^6dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{4}\left(\frac{y^3}{2}+4y^2+8y-\frac{y^5}{8}\right)dy-\frac{2}{3}\cdot\frac{(y+4)^4}{4}\bigg|_{-2}^{4}+\frac{1}{12}\cdot\frac{y^7}{7}\bigg|_{-2}^{4}=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4}y^3dy+$$

$$+4\int\limits_{-2}^{4}y^2dy+8\int\limits_{-2}^{4}y\,dy-\frac{1}{8}\int\limits_{-2}^{4}y^5dy-\frac{1}{6}\cdot 8^4+\frac{1}{6}\cdot 2^4+\frac{1}{84}\cdot 4^7-\frac{1}{84}\cdot(-2)^7=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^4}{4}\bigg|_{-2}^{4}+4\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_{-2}^{4}+8\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_{-2}^{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{y^6}{6}\bigg|_{-2}^{4}-\frac{2048}{3}+\frac{8}{3}+\frac{4096}{21}+\frac{32}{21}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 4^4-\frac{1}{8}\cdot(-2)^4+\frac{4}{3}\cdot 4^3-\frac{4}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot 4^2-4\cdot(-2)^2-\frac{1}{48}\cdot 4^6+\frac{1}{48}\cdot(-2)^6-$$

$$-\frac{2040}{3}+\frac{4128}{21}=32-2+\frac{256}{3}+\frac{32}{3}+64-16-\frac{256}{3}+\frac{2}{3}-680+\frac{1376}{7}=$$

$$=-602+\frac{288}{3}-\frac{254}{3}+\frac{1376}{7}=\frac{-10626-1778+4128}{21}=-\frac{8276}{21}.$$

Решение задачи 6

Рассмотрим теоретический материал, необходимый для решения задачи 6 (см. [2], т. 2) Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функции двух переменных непрерывные в области D и пусть L – кивая, целиком расположенная в этой области. Разобьём кривую L на n частей и выберем по произвольной точке $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2),\ldots,M_n(x_n;y_n)$, принадлежащие этим областям. Обозначим проекции k–й части на оси координат Δx_k и Δy_k и составим сумму $\sum_{k=1}^{n}\left(P(x_k,y_k)\cdot\Delta x_k+Q(x_k,y_k)\cdot\Delta y_k\right)=S_n$. Сумма S_n называется $n-$й интегральной суммой по кривой L, а её предел

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(d_n\to 0)}} S_n=\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$ где d_n-максимальная из длин частей разложения, называется криволинейным интегралом по кривой L (криволинейным интегралом 2-го рода). Если кривая L задана уравнением – $y=f(x),$ где $x=a$ отвечает начальной точке кривой, а $x=b-$конечной точке кривой, то

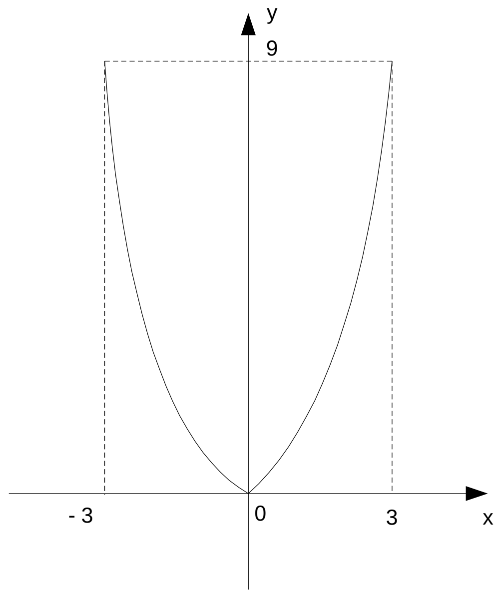
$$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_a^b\left(P(x,\ f(x)+Q(x,\ f(x)\cdot f'(x)\right)dx.$$

Если кривая L задана уравнением $y=f(t),\ y=y(t),$ где $t=\alpha$ отвечает начальной точке кривой, а $t=\beta-$конечной точке кривой, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta\left(P(x(t),\,y(t)\cdot x'(t)+Q(x(t),\,y(t)\cdot y'(t)\right)dt.$$

Рассмотрим примеры.

1. Найти $\int\limits_L 2x(y-1)\,dx+x^2dy$, где L задана уравнением $y=x^2$ от точки $A(-3;9)$ до точки $B(3;9)$. Сделаем чертёж кривой L. Кривая L – парабола с вершиной $O(0,0)$, ветви которой направлены вдоль оси oy.



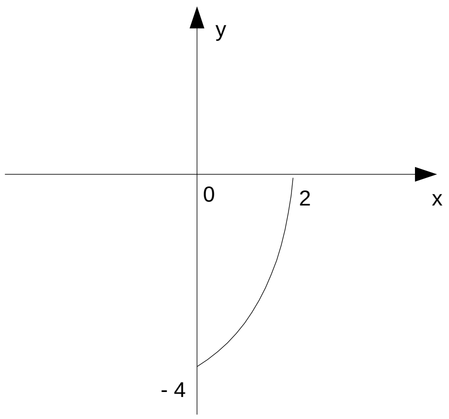
$$\int_L 2x(y-1)\,dx+x^2dy=\int_{-3}^{3}\Big(2x\cdot(x^2-1)+x^2\cdot 2x\Big)dx=\int_{-3}^{3}(2x^3-2x+2x^3)\,dx=$$

$$=\int_{-3}^{3}(4x^3-2x)\,dx=4\int_{-3}^{3}x^3dx-2\int_{-3}^{3}x\,dx=4\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-3}^{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{3}=3^4-(-3)^4+$$

$$+3^2-(-3)^2=0.$$

2. Найти $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy,$ где L задана параметрически $x=2\sin t,\ y=4\cos t\ (x\geq 0,\ y\leq),$ проходимая против часовой стрелки.

Сделаем чертёж кривой L. Данная кривая – часть эллипса, расположенная в 4-й координатной четверти, с полуосями $a=2, b=4.$



Начальной точке A отвечает значение $t=\pi,$ а конечной точке $B - t=\dfrac{\pi}{2}.$

Поэтому $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2 t-16\cos^2 t)\cdot 2\cos t\,dt+$

$$+(4\sin^2 t+16\cos^2 t)\cdot(-4\sin t)\,dt=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2 t-16+16\sin^2 t)\cdot 2\cos t\,dt-$$

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(4-4\cos^2 t+16\cos^2 t)\cdot 4\sin t\,dt=2\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(20\sin^2 t-16)\cdot\cos t\,dt-$$

$-4\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(4+12\cos^2 t)\cdot\sin t\,dt=$ [в первом интеграле сделаем замену $u=\sin t,$

$du = \cos t\, dt;$ во втором интеграле сделаем замену $v = \cos t,\, dv = -\sin t\, dt.$

Замены возможны т. к. $\sin t$ и $\cos t$ монотонны на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$] =

$$= 2\int_{\sin\pi}^{\sin\frac{\pi}{2}} (20u^2 - 16)\, du + 4\int_{\cos\pi}^{\cos\frac{\pi}{2}} (4 + 12v^2)\, dv = 2\int_0^1 (20u^2 - 16)\, du +$$

$$+4\int_{-1}^{0} (4 + 12v^2)\, dv = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{u^3}{3} - 16u\right)\Bigg|_0^1 + 4\left(4v - 12 \cdot \frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} - 16\right) -$$

$$-4 \cdot (-4 + 4) = \frac{4}{3} - 32 = -\frac{92}{3}.$$

Список литературы

1. Привалов И.И. Аналитическая Геометрия, – С.-П.: Лань, 2008, 304 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, М: Наука, 1985. В 2-х т.,. Т. 1. – 432 с.; т. 2. – 576 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, – М: Высш. шк., 1986. В 2-х ч. ч., ч. I. – 304 с., ч.II
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу, – С.-П. Лань, 2009, 464 с.